

М.И. Меерович., И.В. Шрагин

ШКИВ РЕГУЛИРУЕМОГО ДИАМЕТРА ДЛЯ
БЕССТУПЕНЧАТОГО ВАРИАТОРА

Abstract

Design of unstep variable-speed drive pulley with adjustable diameter is suggested. The pulley operating surfaces are mathematically determined taking into account the engagement with flexible link.

Предлагаемый шкив содержит несколько пар двузвучит рычагов 4 и 5, равномерно размещенных вокруг вала 1 и создающих рабочую поверхность 6, охваченную гибкой связью 7. Рычаги соединены друг с другом шарниром 8, а со ступицами 2 и 3 - шарниром 9. Увеличение диаметра шкива производится перемещением ступицы 2 и 3 навстречу друг другу, а уменьшение диаметра - их перемещением в противоположные стороны. Во избежание чрезмерного натяжения гибкой связи шкивами либо, наоборот, ее проскальзывания по рабочим поверхностям 6 производить изменение диаметров взаимодействующих шкивов необходимо синхронно.

На рис.1 изображен шкив с положением рычагов, создающих минимальный диаметр, а на рис.2 - шкив при максимальном диаметре.

Как видно из чертежей, диапазон регулирования диаметра каждого шкива и, соответственно, передаточного отношения вариатора определяется только соотношением плеч рычагов 4 и 5 и общим габаритом устройства. Поэтому представляется целесообразным ввести понятие "коэффициент изменения диаметра шкива $k_{ш}$ ", равный отношению максимального диаметра шкива D_{max} к минимальному D_{min} :

$$k_{ш} = \frac{D_{max}}{D_{min}}$$

а также коэффициент, характеризующий диапазон изменения передаточного отношения вариатора Π_B , равный произведению коэффициентов изменения диаметра шкивов:

$$\Pi_B = K_{ш1} \cdot K_{ш2}$$

Очевидно, что при перемещении ступиц в любом направлении угол между рычагами 4 и 5 будет изменяться (средельное изменение — от 180° при горизонтальном положении рычагов, создающих минимальный диаметр шкива, до 0° , когда ступицы полностью сдвинуты друг с другом и рычаги, стоя перпендикулярно к валу, создают максимальный диаметр). Соответственно, будет изменяться угол между верхними плечами рычагов.

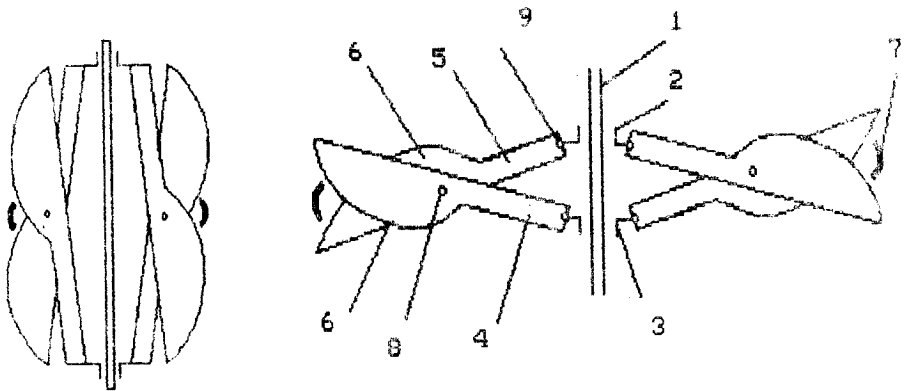


Рис. 1

Рис. 2

Передача вращающего момента $M_{вр}$ с одного шкива на другой осуществляется с помощью клиноременной гибкой связи 7. Сечение

такой гибкой связи представляет собой равнобокую трапецию с длиной средней линии $2a$ и углом наклона α боковой стороны к оси симметрии.

Обеспечить сцепление такой гибкой связи с рабочими поверхностями можно только в том случае, если при каждом изменении положения рычагов относительно вала на рабочей поверхности будет точка, находящаяся на расстоянии a от оси симметрии трапеции (сечения гибкой связи), при этом касательная, проведенная к рабочей поверхности через эту точку, будет проходить к оси симметрии под углом α .

Математический расчет формы рабочих поверхностей

Сечение гибкой связи 7 (клиновидного ремня) представляет собой равнобокую трапецию со средней линией $2a$ и острым углом α , образуемым боковой стороной с осью симметрии трапеции. Необходимо придать рабочим поверхностям 6 такую форму, чтобы они касались (в математическом смысле) гибкой связи 7 при любом положении рычагов 4 и 5. Это и есть и следующей задаче.

В полярной системе координат с полюсом O найти кривую, обладающую свойством: в каждой точке M кривой касательная составляет угол α с осью O_m , проходящей на расстоянии a от точки M (рис. 3).

Заметим, что в предельном случае, когда $a=0$, эта кривая есть не что иное, как логарифмическая спираль.

Введем некоторые обозначения и попутно уточним постановку задачи. Пусть Ox – полярная ось, θ – полярный угол точки M , $\rho = OM$ – ее полярный радиус, O_m – луч, проходящий через точку M . Из условия задачи следует, что $\rho \geq a$ (иначе не существует оси O_m на расстоянии a от точки M).

Исходя из практического применения искомой кривой как продольного сечения рабочей поверхности рычага 4 (полярную ось Ox считаем параллельной валу I), из двух осей, проходящих через полюс O (в качестве полюса O принята ось шарнира 8) на расстоянии a от точки M , возьмем в качестве O_m ту ось, которая

относительно луча Op повернута против часовой стрелки. Пусть γ - угол между Op и Op_1 . Очевидно, $0 \leq \gamma \leq \pi/2$, причем $\gamma = \pi/2$ при $\rho = a$, т.е. когда точка M занимает положение точки P (рис. 3).

Далее, из двух прямых, проходящих через точку M и составляющих данный угол α ($0 < \alpha < \pi/2$) с осью Op , будем считать касательной к искомой кривой ту прямую, которая повернута (на угол α) относительно оси Op по часовой стрелке. Выберем за касательной прямой направление от точки K ее пересечения с осью Op к точке M . Касательный луч M_K (рис.3) будем считать направленным в этом направлении.

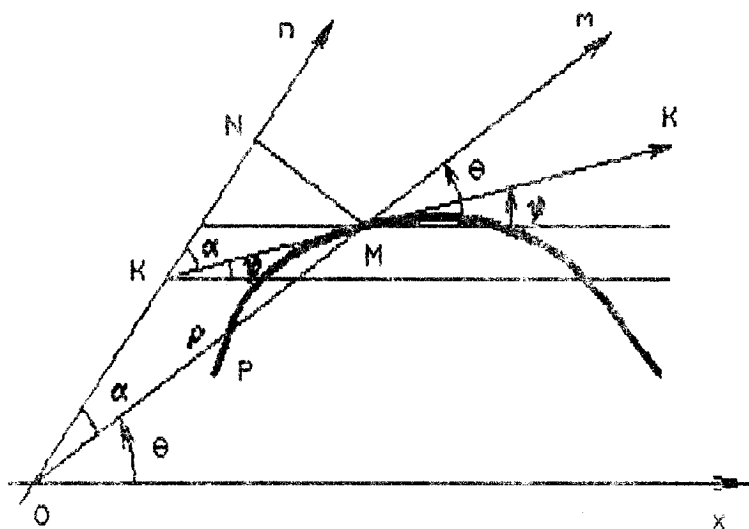


Рис.3

Обозначим через ψ угол наклона касательного луча M_K к полярной оси Ox и положим $\omega = \psi - \theta$. Т.е. ω — это угол наклона луча M_K к лучу Om . Т.к. $\theta + \gamma = \psi + \alpha$, то $\gamma = \omega + \alpha$. Отсюда следует, что $-\alpha < \omega \leq \pi/2 - \alpha$.

Приступим к выводу уравнения кривой. Из прямоугольного треугольника OMN имеем $\rho \sin \omega = a$, т.е.

$$\rho \sin \omega + \alpha = a, \quad (1)$$

Раскрывая $\sin(\omega + \alpha)$ и заменяя $\sin \omega$ на $\pm(1 + \text{ctg}^2 \omega)^{-1/2}$ (исключив тем самым на время $\omega=0$), получим

$$\rho(\text{ctg} \omega \sin \alpha + \cos \alpha) = \pm(1 + \text{ctg}^2 \omega)^{1/2}. \quad (2)$$

Как известно, для кривой с уравнением $\rho = \rho(\theta)$ справедлива

$$\text{ctg} \omega = \rho' / \rho.$$

Подставляя это выражение в (2), получим дифференциальное уравнение искомой кривой

$$\rho' \rho \cos \alpha + \rho^2 \omega = \pm a \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Сделав замену $\rho = e^\sigma$, получим

$$e^\sigma (\cos \alpha + \sigma' \sin \alpha) = \pm a \sqrt{1 + \sigma'^2}.$$

или

$$\sigma = \ln \frac{a \sqrt{1 + \sigma'^2}}{|\cos \alpha + \sigma' \sin \alpha|}. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (3), разрешенное относительно искомой функции $\sigma = \sigma(\theta)$, решаем известным приемом. А именно, введем параметр $p = \sigma'$, т.е.

$$\sigma = \ln a + \ln \sqrt{1 + p^2} - \ln |\cos \alpha + p \sin \alpha|.$$

и продифференцировав это равенство по θ , получим

$$p = \left(\frac{p}{1+p^2} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha + p \sin \alpha} \right) \frac{dp}{d\theta}$$

или

$$d\theta = \left(\frac{1}{1+p^2} - \frac{\sin \alpha}{p(\cos \alpha + p \sin \alpha)} \right) dp.$$

Заменяем параметр p на ω . Т.к. $\sigma = \ln p$, то $p = \sigma' = \rho' / \rho = \operatorname{ctg} \omega$.
Поэтому

$$d\theta = \left(-1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \omega \cdot \sin(\omega + \alpha)} \right) d\omega$$

или

$$d\theta = \left[-1 + \operatorname{tg} \alpha \left(\frac{\cos(\omega + \alpha)}{\sin(\omega + \alpha)} + \frac{\sin \omega}{\cos \omega} \right) \right] d\omega.$$

Отсюда

$$\theta = -\omega + \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{\sin(\omega + \alpha)}{\cos \omega} + C.$$

Для определения константы C зададим $\theta = \theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) в точке A , для которой ось O_n перпендикулярна оси Ox (в этой точке происходит касание со связью 7 при минимальном диаметре шкива). При этом $\gamma = \pi/2 - \theta_0$, $\psi = \pi/2 - \alpha$, так что $\omega = \pi/2 - \alpha - \theta_0$ (рис. 4).

Определив с помощью этих значений константу C , получим

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \omega + \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{\sin(\alpha + \theta) \sin(\omega + \alpha)}{\cos \theta_0 \cos \omega}. \quad (4)$$

Присоединив к (4) равенство (см. (1)),

$$\rho = \frac{a}{\sin(\omega + \alpha)}, \quad (5)$$

имеем параметрические уравнения искомой кривой. Параметр ω в пределах "рабочей" части кривой AB меняется от значения $\omega_A = \pi/2 - \theta_0 - \alpha$ в точке A до значения

$$\omega_B = \arcsin \frac{a}{d} - \alpha$$

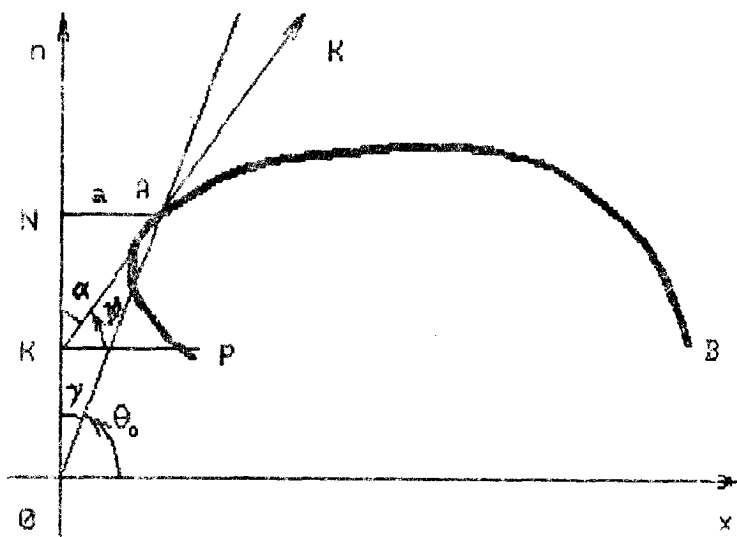


Рис. 4

в точке В, которое определяется из (5) при $\rho = OB = d$ и соответствует максимальному диаметру шкива. При этом не исключается и значение $\omega = 0$.

Выражая ω из (5) и подставляя в (4), получаем уравнение кривой в виде $\theta = \theta(\rho)$:

$$\theta = \arccos \frac{a}{\rho} + \operatorname{tg} \alpha \ln \frac{a \sin(\alpha + \theta_0)}{\cos \theta_0 (a \sin \alpha + \sqrt{\rho^2 - a^2} \cos \alpha)} \quad (6)$$

В пределах "рабочей" части кривой ρ меняется от $\rho_A = \frac{a}{\cos \theta}$ до $\rho_B = d$. Будем считать, что $a < d \cos \theta$. Тогда $\rho_A < \rho_B$ и $\omega_A > \omega_B$.

Выскажем некоторые соображения относительно формы найденной

кривой. С этой целью заметим, что

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{d\theta}{d\rho} \frac{d\rho}{d\omega} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\rho} \cdot \frac{-a \cos(\omega + \alpha)}{\sin^2(\omega + \alpha)} = -\operatorname{tg}\omega \cdot \operatorname{ctg}(\omega + \alpha) \quad (7)$$

Т.к. $\omega + \alpha \in (0, \pi/2)$, то $\operatorname{ctg}(\omega + \alpha) \geq 0$.

Поэтому из (7) следует, что θ принимает наибольшее значение θ_{\max} при $\omega=0$, т.е. при

$$\rho = \frac{a}{\sin\alpha}$$

В соответствующей точке M_0 луч Om идет по касательной. При этом, как следует из (4),

$$\theta_{\max} = \frac{\pi}{2} - \alpha + \operatorname{tg}\alpha \ln \frac{\sin(\alpha + \theta_0) \sin\alpha}{\cos\theta_0}$$

Исходя из требуемого вида рабочей поверхности, будем считать, что $\omega_B < 0$. Это обеспечивается неравенством

$$a < d \sin\alpha.$$

Вид кривой в пределах от А до В зависит от того, лежит ли точка M_0 между А и В или нет. А это, в свою очередь, зависит от величины θ_0 , т.е. от начального положения связи γ .

В случае, изображенном на рис.4, $\theta_0 > \pi/2 - \alpha = \psi$, т.е. $\omega_A < 0$. Т.к. $\omega_B < \omega_A$, то при движении точки по кривой от А к В ее полярный угол θ убывает (см.(7)). При этом точка M_0 находится между точками В и А, т.е. вне "рабочей" части кривой.

Если $\theta_0 = \pi/2 - \alpha$ (рис.5), то $\omega_A = 0$, т.е. $\theta_{\max} = \theta_0$ (с M_0 совпадает с А), θ убывает от θ_0 до θ_B .

Наконец, если $\theta_0 < \pi/2 - \alpha$ (рис.6), то $\omega_A > 0$, так что точка M_0 лежит между А и В. В этом случае θ при движении точки от А до M_0 возрастает, а от M_0 до В — убывает.

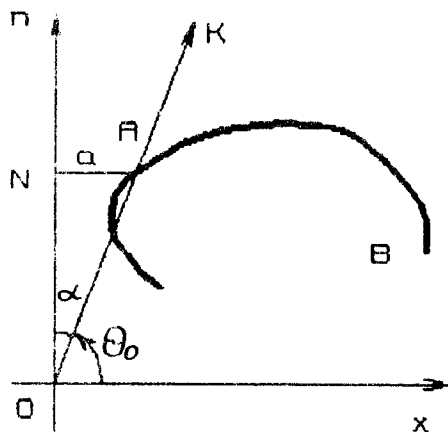


Рис.5

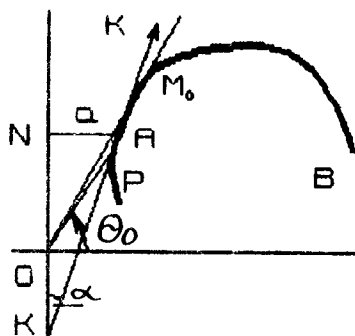


Рис.6

В заключении обсудим вопрос о соотношениях между параметрами задачи a , α , θ_0 и ρ . Выше были приняты условия $\alpha < \theta_0$ и $\alpha < \rho \sin \theta_0$. Очевидно, если $\theta_0 > \rho \sin \alpha$ (рис.4), то второе условие вытекает из первого. Если $\theta_0 < \rho \sin \alpha$ (рис.6), то первое следует из второго, а если $\theta_0 = \rho \sin \alpha$ (рис.5), то оба условия совпадают. Таким образом, в каждом случае достаточно обеспечить одно из этих условий.

Кроме того, по практическому смыслу задачи должно быть $\rho_R > 0$. Значение ρ_R получается из (6) при $\rho = a$. Это дает еще одно соотношение между a , α , θ_0 и ρ . Заметим, что, как следует из (6), $\rho \rightarrow -\infty$ при $\rho \rightarrow \infty$, т.е. вся кривая представляет собой бесконечно расширяющуюся спираль с началом в точке P и бесконечным множеством витков вокруг полюса O . Поэтому при заданных a , α , и θ_0 величина ρ не должна быть слишком большой.

Одесский политехнический институт

Пермский государственный университет