Паньков А.А.

Расчет упругих свойств и напряжений на поверхностях разупорядоченных включений композита методом периодических составляющих

Abstract

Prezented method of micromehanic of composits (method of periodic components) in desisions of problem is influence chaos places of inclusions on elastic properties and strength of composite. In this method stohastic regional problem of theory of elastic of composite come to two more simple problems are problem on the cell of stohastic. This problems on the cells calculation by modern numerical methods.

Одна из задач микромеханики композитных сред – учет разупорядоченности во взаимном расположении элементов структуры (волокон) при расчете компонент тензора упругих свойств композита и напряжений в стуктурных элементах. Структуры, в которых разупорядоченность описывается малыми смещениями включений от Y – периодической схемы укладки. ($Y=(Y_1,Y_2,Y_3)$ – основные периоды), назовем Y квазипериодическими. Рассматривая Y – квазипериодическую структуру как деформированную разупорядоченную, поля напряжений на микроуровне не будут периодическими и при простом нагружении композита. Стохастическая же модель Y – квазипериодической структуры позволяет решать задачу в Y – периодических моментных функциях случайных полей напряжений микроуровня.

Постановка задачи

Рассмотрим стохастическую задачу о деформировании области V с границей Γ. Будем считать, что материал области V представляет собой композит матричного типа, причем характерный размер неоднородностей (волокон) намного меньше такового области V. Из модельных представлений разупорядоченную структуру композита будем описывать статистически однородными квазипериодическими разрывными по координатам функциями упругих свойств, полагая возможным разбиение структуры композита на однотипные ячейки, в каждой из которых содержится одно независимо разупорядоченное включение рис.1,а. Предположим, что форма и свойства однородных компонентов структуры детерминированы и заданы, на межфазных

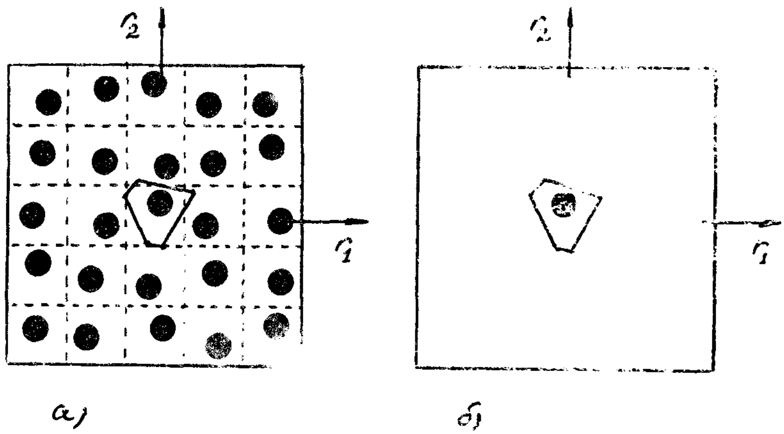

Рис.1. а) квазипериодическая структура
б) стохастическая ячейка

поверхностях идеальная связь структурных элементов. Пусть в некоторой декартовой системе координат определяющие соотношения, связывающие тензор деформаций $e_{ij}(r)$ и тензор напряжений $\sigma_{ij}(r)$, задаются в виде

$$\sigma_{ij}(r) = a_{ijmn}(r)e_{mn}(r), \qquad (1)$$

где $a_{ijmn}(r)$ - случайное поле структурных модулей упругости

$$a_{ijmn}(r) = a^{f}_{ijmn}\omega(r) + a^{m}_{ijmn}(1-\omega(r)), \qquad (2)$$

a^{f}_{ijmn}, a^{m}_{ijmn} – известные тензоры упругости включений и матрицы, $\omega(r)=(1,0)$ – индикаторная функция включений.

Деформации будем считать малыми, так что выполняются соотношения Коши

$$e_{ij}(r) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(r) + u_{j,i}(r)). \qquad (3)$$

Пусть заданы и уравнения равновесия среды

$$\sigma_{ij,j}(r) = 0. \qquad (4)$$

Для определения компонент тензора упругих модулей композитного материала a^{*}_{ijmn}, согласно соотношению

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = a^{*}_{ijmn}\langle e_{mn}\rangle, \qquad (5)$$

$\langle..\rangle$ – оператор осреднения по случайным однородным полям или по объему V), необходимо решить стохастическую краевую задачу (1)-(4) с однородными граничными условиями

$$u_{i}\big/_{\Gamma} = e^{*}_{ij}r_{j}, \qquad (6)$$

где $e^{*}_{ij} = \langle e_{ij}\rangle$ – произвольный симметричный тензор второго ранга, имеющий смысл малых упругих макродеформаций.

Расчет упругих свойств композита

От системы дифференциальных уравнений (1),(3),(4) перейдем к следующей

$$(a_{ijmn}(r)u_{m,n}(r))_{,j} = 0 \qquad (7)$$

и расчет a^{*}_{ijmn}, согласно (5), проводим по зависимостям

$$a^{*}_{ijmn} = \langle a_{ij\alpha\beta}(r)U_{\alpha\beta mn}(r)\rangle,$$

$$u_{i,j}(r) = U_{ijmn}(r)e^{*}_{mn},$$

e^{*}_{ij} - известный из постановки задачи тензор.

Полагаем известным решение сопутствующей периодической краевой задачи для области V

$$(a^{p}_{ijmn}(r)u^{p}_{m,n}(r))_{,j} = 0,$$

$$a^{p}_{ijmn}(r) = a^{f}_{ijmn}\omega^{p}(r) + a^{m}_{ijmn}(1-\omega^{p}(r)),$$

$\omega^{p}(r) = \{1,0\}$ - периодическая индикаторная функция включений, $\omega^{p}(r)=\omega(r)$ если разупорядоченность в квазипериодической структуре отсутствует, $u^{p}_{i}\big/_{\Gamma} = e^{*}_{ij}r_{j}$ - граничные условия и, согласно методу периодических составляющих /6/, выделим периодические составляющие полей:

$$a_{ijmn}(r) = a^{p}_{ijmn}(r) + a'_{ijmn}(r),\quad u_{i,j}(r) = u^{p}_{i,j}(r) + u'_{i,j}(r) \tag{8}$$

и от системы дифференциальных уравнений (7) перейдем к системе интегро-дифференциальных:

$$u'_{i,j}(r) = \int_{V} G_{i\alpha,\beta j}(r,r^{(1)})(a'_{\alpha\beta mn}(r^{(1)})u^{p}_{m,n}(r^{(1)}) + \tilde{a}_{\alpha\beta mn}(r^{(2)})u'_{m,n}(r^{(1)}))dr^{(1)}, \tag{9}$$

$G_{i\alpha}(r,r^{(1)})$ - тензор Грина неограниченной однородной среды с тензором упругости h_{ijmn}, $\tilde{a}_{ijmn}(r)=a_{ijmn}(r)-h_{ijmn}$.

В (7) приводится разложение второй производной тензора Грина

$G_{ij,\alpha\beta}$ на сингулярную, пропорциональную дельта-функции Дирака $\delta(r-r^{(1)})$, и регулярную составляющие. "Сингулярное приближение" решения уравнения типа (9) /7/ основано на приближенном равенстве $G_{ij,\alpha\beta}$ своей сингулярной составляющей. Домножим обе части урвнения (9) на тензор $a''_{dbij}(r)=a_{dbij}(r)-\langle a_{dbij}\rangle$ и полученное уравнение осредним оператором $\langle\ldots\rangle$, $\langle a_{dbij}\rangle=a^{f}_{dbij}G_f+a^{m}_{dbij}(1-G_f)$, $G_f=\langle\omega\rangle$ – относительное объемное содержание волокон. Осредненное уравнение решаем в сингулярном приближении и, доказав вспомогательное соотношение

$$\frac{\langle\omega''^{P}(\omega'')^{k}\rangle}{\langle(\omega'')^{k+1}\rangle}=p=\mathrm{const}(k),$$

где $\omega''(r)=\omega(r)-G_f$, $\omega''^{P}(r)=\omega^{P}(r)-G_f$ – пульсации индикаторных функций; $k=1,2,\ldots$; p – коэффициент периодичности разупорядоченной структуры вычисляется по формуле

$$p=\frac{\langle\omega\omega^{P}\rangle-G_f^2}{G_f(1-G_f)},\qquad(10)$$

получим формулу

$$a^{*}_{ijmn}=a^{*P}_{ijmn}p+a^{*c}_{ijmn}(1-p)\qquad(11)$$

– формулу расчета тензора упругих свойств a^{*}_{ijmn} композита с разупорядоченной структурой через a^{*P}_{ijmn} и a^{*c}_{ijmn} – тензоры упругости композитов с периодической структурой и структурой "статистическая смесь" /3,6,7/, соответственно, и с использованием p – коэффициента периодичности (10). Компоненты тензора a^{*P}_{ijmn} вычисляются с использованием численных методов на ячейке периодичности неразупорядоченной структуры /2/, а компоненты тензора a^{*c}_{ijmn} вычисляются по известным аналитическим формулам /3,6,7/.

Для однонаправленного волокнистого композита с квазипериодической структурой, согласно (II), $a^*_{ijmn} \approx a^{*p}_{ijmn}$, что и иллюстрирует расчет $E^*_\perp$ - модуля Юнга композита в направлениях I и 2 и его сравнения с $E^{*p}_\perp$ рис.2, если μ_f=20МПа, ν_f=0,2 и μ_m=1МПа, ν_m=0,39 - модули сдвига и коэффициенты Пуассона соответственно волокон и матрицы композита.

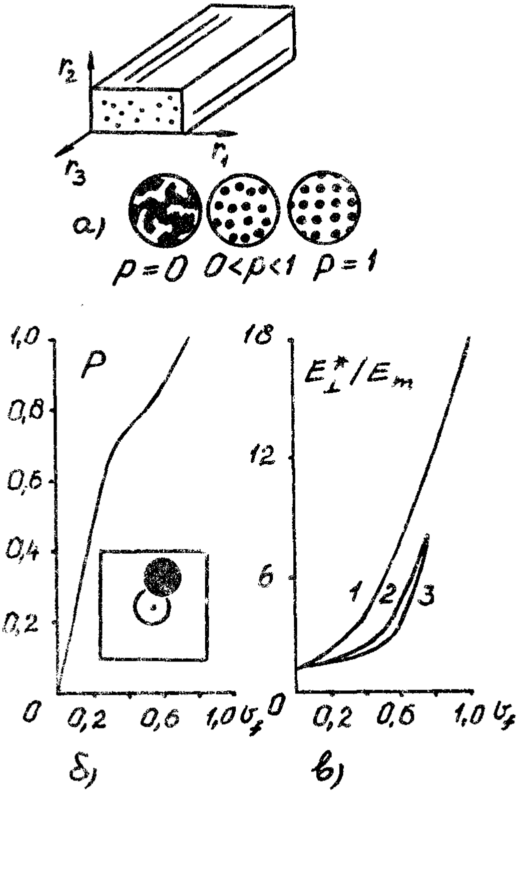

Рис.2. Расчет упругих свойств квазипериодического композита

а) структурные модели неоднородных сред

б) зависимость коэффициента периодичности p от содержания волокон в композите

в) 1 - $E^{*e}_\perp$ /3/, если $h_{ijmn} = \langle a_{ijmn} \rangle$,

2 - $E^*_\perp$ (II), 3 - $E^{*p}_\perp$ /6/.

Расчет полей напряжений

Поля деформирования на структурном уровне композита вычислим методом периодических составляющих, не прибегая к сингулярному приближению, эффективному лишь при вычислении упругих свойств композита. С использованием соотношений

$$a_{ijmn}(r) = a^{P}_{ijmn}(r-\delta(n)), \qquad u_i(r) = u^{P}_i(r-\delta(n))+u^{o}_i(r), \tag{12}$$

$\delta(n)$ - вектор смещения включения из периодического неразупорядоченного положения в n-ой ячейке, дифференциальные уравнения (7) преобразуем к интегро-дифференциальным:

$$u^{o}_i(r) = \int\limits_V G_{i\alpha}(r,r^{(1)})\Big(a^{P}_{\alpha\beta mn}(r^{(1)}-\delta(n))\frac{\partial}{\partial r^{(1)}_n}u^{P}_m(r^{(1)}-\delta(n))+ \tag{13}$$

$$+\tilde a_{\alpha\beta mn}(r^{(1)})\frac{\partial}{\partial r^{(1)}_n}u^{o}_m(r^{(1)})\Big)_{,\beta}dr^{(1)},$$

$G_{i\alpha}(r,r^{(1)})$ - тензор Грина области с границей Г и с элементарным неоднородным полем упругих свойств $h_{ijmn}(r)$: однородное поле матрицы (a^{m}_{ijmn}) с одним включением (a^{f}_{ijmn}), координаты центра которого соответствуют координатам центра исследуемого включения в квазипериодической структуре. Согласно методу последовательных приближений, решение уравнения (13) представим в виде асимптотического ряда $u^{o}_i(r)=\sum\limits_{t=1}^{\infty}u^{(t)}_i(r)$:

$$u^{(1)}_i(r) = \int\limits_S G_{i\alpha}(r,r^{(1)})\frac{\partial}{\partial r^{(1)}_\beta}\Big(a^{P}_{\alpha\beta mn}(r^{(1)}-\delta(n))\frac{\partial}{\partial r^{(1)}_n}u^{P}_m(r^{(1)}- \tag{14}$$

$$-\delta(n))\Big)\cdot\gamma dr^{(1)}$$

и при $t=2,3\ldots$

$$u_i^{(t)}(r)=\int_V G_{i\alpha}(r,r^{(1)})\frac{\partial}{\partial r_\beta^{(1)}}(\tilde{a}_{\alpha\beta mn}(r^{(1)})\frac{\partial}{\partial r_n^{(1)}}u^{(t-1)}(r^{(1)}))dr^{(1)}$$

В формуле (14) переход от интегрирования по неограниченной области V к интегрированию по s – малой окрестности контура стохастической ячейки, образованного пересечением серединных перпендикуляров к отрезкам, соединяющих центры разупорядоченных включений (рис.I,б), сделан на основе равенства $(a^P_{ijmn}(r)u^P_{m,n}(r))_{,j}=0$ и принципа локальности /7/. В s-окрестности i-ой грани стохастической ячейки индикаторная фукция взаимного положения включений $\gamma^{(i)}$ равна 2, если расстояние между соответсвующей парой включений в результате разупорядоченности увеличилось, и равна I/2 - если уменьшилось.

Численный расчет показал, что вблизи межфазных поверхностей включений $u_i^0(r) \approx u_i^{(1)}(r)$ и поля напряжений здесь с хорошей точностью описываются формулой

$$\sigma_{ij}(r) = \sigma^P_{ij}(r-\delta(n)) + a_{ij\alpha\beta}(r)\int_S G_{\alpha,\beta}(r,r^{(1)})\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial r_\beta^{(1)}}(a^P_{p\beta mn}(r^{(1)}-\delta(m))\frac{\partial}{\partial r_n^{(1)}}u^P_m(r^{(1)}-\delta(m)))\gamma dr^{(1)}. \qquad (15)$$

Расчет по формуле (15) приведем для армированного однонаправленными волокнами композита, обладающего при отсутствии разупорядоченности волокон тетрагональной симметрией структуры и упругих свойств. При E_m=1 ГПа и ν_m=0,35 - модуль Юнга и коэффициент Пуассона матрицы, с c_f=0,545 - относительное объемное содержание жестких волокон, расчитаем рис.3 радиальных $\sigma_{rr}(\varphi)$ и касательных $\varphi_{r\varphi}(\varphi)$ напряжений на межфазной поверхности одного из разупорядоченных волокон при нагружении композита в поперечной направлению армирования плоскости, соответствующего e^*_{11}=0,30, e^*_{22}=-0,12. Безразмерные координаты (отнесенные к радиусу волокна) центров поперечных сечений волокон при совмещении начала системы с центром поперечного сечения исследуемого (на рисунке центрального) волокна следующие: (-2,2;0,2); (0;2,4); (2,2;0,2), (0;-2,4), имеющих в неразупорядоченном состоянии координаты (-2,4;0), (0;2,4); (2,4;0); (0;-2,4). На рис.3 штриховой линией показаны расчеты соответствующих величин по методам граничных элементов и локального приближения /1,6/.

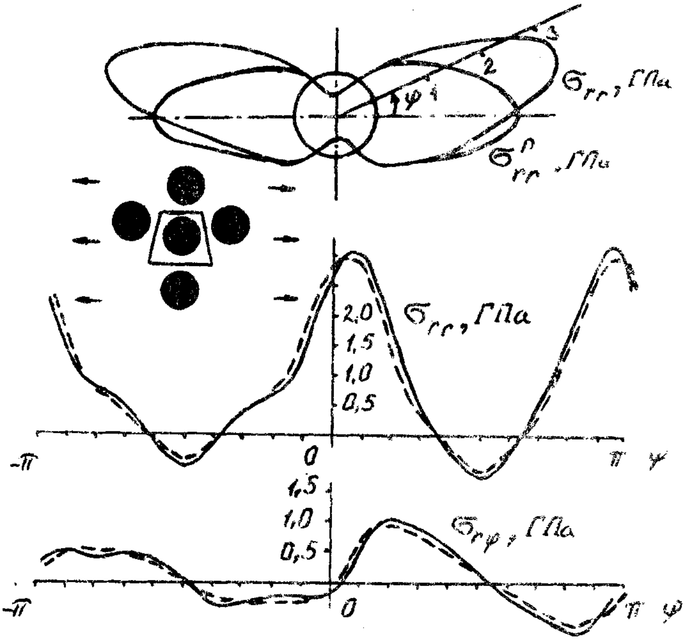

Рис 3. Межфазные напряжения на поверхности разупорядоченных волокон.

Таким образом, решение задачи теории упругости для области с многими включениями методом периодических составляющих с хорошей точностью сводится к последовательному решению двух значительно более простых задач: на ячейке периодичности и на стохастической ячейке. К решению задач на ячейках применяются современные численные методы, например метод граничных элементов.

Литература

1. Аношкин А.Н., Паньков А.А. Статистическое моделирование и оценка прочности квазипериодических композитов /Тез. докл. Всесоюзн.научно-технич. конференции "Повышение качества и надежности продукции, программного обеспечения ЭВМ и технических средств обучения", г.Куйбышев, 19-21 сент. 1989. -С.11-12.

2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. -М.:Наука, 1984. -352с.

3. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. -Минск: Из-во Белорус. гос.ун-та, 1978. -208с

4. Композиционные материалы: В 8-и т. Т.2. Механика композиционных материалов /Сендецки Дж.-М.:Мир, 1978. -563с.

5. Ломакин В.А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. -М.:Наука, 1970.-139с.

6. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. -М.:Из-во МГУ, 1984. -336с.

7. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. -М.:Наука, 1984. -116с.

8. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. -М.:Наука, 1977. -400с.

Пермский государственный технический университет