УДК 517.95

Сильченко Ю.Т.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

1. При исследовании динамических задач термоупругости возникает связанная система дифференциальных уравнений [1]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - a_1\Delta u + b_1 \operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t} = f_1, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a_2(\mu\Delta v + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} v) + b_2 \operatorname{grad} u = f_2 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Здесь a_1, a_2, λ, μ – положительные константы, b_1, b_2 – произвольные константы, выражающиеся через плотность, коэффициенты Ляме и термические коэффициенты, f_1 – внешний источник тепла, f_2 – объемная плотность заданных сил, $u=u(t,x)$ – отклонение температуры, $v=v(t,x)$ – вектор упругих смещений, $t\in[0,T]$ $(0<T<\infty)$, $x\in\Omega\subset\mathbb{R}^3$. Эта задача исследовалась в работах [2], [3], где ставилась краевая задача. В данной работе рассматривается система (1), когда $x\in\mathbb{R}^3$ и исследуется задача Коши

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad v(0,x)=v_0(x), \qquad v'_t(0,x)=v_1(x) \qquad (2)$$

В предположении иной гладкости данных задачи /по сравнению с [2], [3] / устанавливается

<u>Теорема 1.</u> Пусть выполнены условия

1) $f_1\in C^{\alpha}(0,T;L^2)$, $f_2, \dfrac{\partial f_2}{\partial t}\in C^{\alpha}(0,T;(L^2)^3)$, $L^2=L^2(\mathbb{R}^3)$,

/ C^{α} – семейство функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α/ при некотором $\alpha\in(0,1)$;

2° $u_0 \in W_2^2$, $\quad V_0 \in W_2^{2+\alpha}$, $\quad V_1 \in W_2^{1+\alpha}$.

Тогда задача (1)-(2) имеет единственное решение, обладающее свойствами

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial t},\ \Delta u,\ \operatorname{div}\frac{\partial V}{\partial t} \in C(0,T;L^2),$$

$$V,\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},\ \mu\Delta V+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}V,\ \operatorname{grad}u \in C(0,T;L^2)^3.$$

2. Задача (1)-(2) будет исследоваться методами теории полугрупп [4]. Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u + B_1\frac{\partial V}{\partial t} = f_1(t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + A_2 V + B_2 u = f_2(t), \tag{4}$$

$$u(0) = u_0, \quad V(0) = V_0, \quad V'(0) = V_1 \tag{5}$$

$$0 \le t \le T, \qquad u \in H_1, \qquad V$$

Здесь уравнение (3) рассматривается в гильбертовом пространстве H_1, уравнение (4) – в гильбертовом пространстве H_2, A_i – заданные линейные операторы в H_i с областями определения $D(A_i) \subset H_i$ соответственно $(i=1,2)$, B_1 – линейный оператор из H_2 в H_1 с областью определения $D(B_1) \subset H_2$, B_2 – линейный оператор H_1 в H_2 с областью определения $D(B_2) \subset H_1$, $f_i(t) \in H_i$ – заданные непрерывные функции $(i, 1, 2)$, $u_0 \in H_1$, V_0, $V_1 \in H_2$ – заданные элементы. Под решением задачи (3)-(5) понимаются функции $u(t) \in H_1$, $V(t) \in H_2$, такие, что существуют и непрерывны при $t \in [0,T]$ функции, входящие в левые части равенств (3), (4), и для которых выполнены соотношения (3), (4), (5).

<u>Теорема 2.</u> Пусть выполнены условия:

1° оператор $-A_1$ является производящим оператором аналитической полугруппы $\exp(-A_1 t)$;

2° определен оператор $A_2^{1/2} \equiv A$, оператор iA является производящим оператором сильно непрерывной группы;

3° существуют и ограничены операторы B_1A^{-1}, $AB_2A_1^{-1}$, $A_2B_2A_1^{-\frac{3}{2}}$.

4° $f_1(t)\in C^{\alpha}$, $f_2'(t)\in C^{\alpha}$ при некотором $\alpha\in(0,1)$;

5° $u_0\in D(A_1)$, $v_0\in D(A_2^{1+\alpha})$, $v_1\in D(A_2^{\frac{1}{2}+\alpha})$,

$f_2(0)-A_2v_0\in D(A_2^{\alpha})$.

Тогда решение задачи (3)-(5) существует и единственно.

3. Перейдем к доказательству теоремы 2. Сведем задачу (3)-(5) к некоторому интегральному уравнению. При этом будем использовать следующие оператор-функции

$$C(t)=\frac{1}{2}\left[\exp(tA)+\exp(-tA)\right],\quad S(t)=\frac{1}{2i}\left[\exp(tA)-\exp(-tA)\right].$$

Если решение задачи (3)-(5) существует, то из уравнения (3) можно выразить u через v

$$u(t)=\exp(-tA_1)u_0+\int_0^t\exp\left[-(t-s)A_1\right]\left[f_1(s)-B_1v'(s)\right]ds, \qquad (6)$$

а из уравнения (4) - v через u

$$v(t)=C(t)v_0+A^{-1}S(t)v_1+\int_0^t A^{-1}S(t-\tau)\left[f_2(\tau)-B_2u(\tau)\right]d\tau. \qquad (7)$$

Подставим выражение для u из (6) в равенство (7). Тем самым мы исключим из (7) функцию u. Обе части полученного равенства продифференцируем по t и проведем интегрирование по частям. Затем к обеим частям этого равенства применим оператор B_1 и в повторных интегралах поменяем порядок интегрирования. В результате получим следующее выражение

$$B_1v'(t)=B_1A^{-1}\varphi(t)+\int_0^t B_1A^{-1}Q(t-s)B_1v'(s)ds, \qquad (8)$$

где

$$\varphi(t)=AC(t)v_1+S(t)\left[f_2(0)-A_2v_0\right]+\int_0^t S(t-\tau)f_2'(\tau)d\tau-$$

$$-\int_0^t Q(t-\tau)f_1(\tau)d\tau-Q(t)u_0 \ -$$

внеинтегральное слагаемое, а

$$Q(t) \ = \ \int_0^t AC(t-\tau)B_2\exp(-\tau A_1)d\tau \qquad (9)$$

- ядро. Таким образом, установлена

Лемма I. Если решение задачи (3)-(5) существует, то функция $B_1v'(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (8).

Теперь решение задачи (3)-(5) будем искать как решение интегрального уравнения

$$z(t) \ = \ \varphi(t) \ + \ \int_0^t Q(t-s)B_1A^{-1}z(s)ds \qquad (10)$$

получающегося из (8), если положить $z(t)=Av'(t)$. Предварительно отметим некоторые свойства ядра $Q(t)$, которые устанавливаются с помощью интегрирования по частям в формуле (9).

Лемма 2. Оператор-функция $Q(t)$ непрерывна на $[0,T]$, оператор-функция $A^{-1}Q(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0,T]$. Справедливо включение $\int_0^t Q(s)ds \in D(A)$, оператор-функция $\int_0^t AQ(s)ds$ непрерывна на $[0,T]$.

Используя лемму 2, можно заключить, что интегральное уравнение (10) имеет единственное непрерывное на $[0,T]$ решение $z(t)$. По $z(t)$ определим функцию $v(t)$ по формуле

$$v(t) \ = \ v_0 \ + \ \int_0^t A^{-1}z(s)ds.$$

Из интегрального уравнения (10) следует, что функция $v(t)$ два раза непрерывно дифференцируема. Для нее справедливы включения $v'(t) \in D(B_1)$, $v(t) \in D(A_2)$, функции $B_1 v'(t)$, $A_2 v(t)$ – непрерывны и функция $B_1 v'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. При этом функция $v(t)$ удовлетворяет соотношению

$$v''(t) + A_2 v(t) = f_2(t) - B_2(\exp(-tA_1)u_0 +$$

$$+ \int_0^t \exp[-(t-s)A_1][f_1(s) - B_1 v'(t)]ds). \tag{11}$$

В последнем интеграле выражение $f_1(s)-B_1 v'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α. Этого достаточно /см. [4]/ для существования функции $u(t)$, которую можно определить формулой (6). Таким образом, получаем непрерывное решение $u(t)$, для которого выполнено неравенство

$$\|u'\|_C + \|A_1 u\|_C \le \mathcal{K}(\|Au_0\| + \|f_1\|_{C^\alpha} + \|B_1 v'\|_{C^\alpha}). \tag{12}$$

/C – семейство непрерывных функций/. Из формул (6), (7), (11) вытекает, что функции $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют системе (3)-(4) и являются решением задачи (3)-(5). Для функции $v(t)$ при этом выполнено неравенство

$$\|v''\|_C + \|A_2 v\|_C + \|Bv'\|_C \le \mathcal{K}(\|A_1^{1/2}u_0\| +$$

$$+ \|A_2 v_0\| + \|A_2^{1/2} v_1\| + \|f_1\|_C + \|f_2'\|_C). \tag{13}$$

Из неравенств (12), (13) вытекает единственность решения. Теорема 2 доказана.

4. Перейдем к доказательству теоремы I. В гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ введем операторы $A_1=-(a_1\Delta + I)$ и $B_2=b_2\mathrm{grad}+I$ с областями определения $D(A_1)=W_2^2(\mathbb{R}^3)$, $D(B_2)=W_1^1(\mathbb{R}^3)$ соответственно, а в гильбертовом пространстве $[L^2(\mathbb{R}^3)]^3$ операторы $A_2=-a_2(\mu\Delta+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div})-I$, $B_1=b_1\mathrm{div}+I$ с областями определения $D(A_2)=[W_2^2(\mathbb{R}^3)]^3$, $D(B_1)=[W_1^1(\mathbb{R}^3)]^3$ соответственно. При этом оператор A_1 является производящим оператором аналитической полугруппы, оператор A_2 – самосопряженным положительно

определенным, для него определены дробные степени, и оператор $iA_2^{1/2}$ порождает сильно непрерывную группу. Для элементов $v\in(W_2^1(\mathbb{R}^3))^3$ выполнено неравенство $\|B_1v\| \le c\|A_2^{1/2}v\|$, для $u\in W_2^2(\mathbb{R}^3)$ – неравенство $\|A_2^{1/2}B_2u\| \le c\|A_1u\|$ и для $u\in W_2^3(\mathbb{R}^3)$ – неравенство $\|A_2B_2u\| \le c\|A_1^{3/2}u\|$.

Таким образом, для задачи (1)-(2) выполнены условия теоремы 2, в силу которой задача (1)-(2) имеет единственное решение, обладающее указанными свойствами.

Литература

1. Бурчуладзе Т.В., Купрадзе В.Д. Динамические задачи упругости и термоупругости. – В кн.: Современные проблемы математики, т. 7. – М.: Наука, с. 163-294.

2. Боценюк А.Н., Панков А.А. Некоторые сцепленные системы абстрактных дифференциальных уравнений типа уравнений термоупругости. – Докл. АН УССР, сер. А, 1982,. N 10, с. 6-8.

3. Боценюк А.Н. Регулярность решений связанных систем абстрактных дифференциальных уравнений типа уравнений термоупругости. – В сб.: Материалы 10-й конференции молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР. Ч. II. – Львов, 1984, с. 35-39. /Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.II.84.; N 7197-84 Деп./.

4. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., Наука, 1967.

Воронежский государственный университет