

УДК 004.942

К.С. Острер, А.Д. Макашова, Ю.В. Акулич**K.S. Ostrer, A.D. Makashova, Yu.V. Akulich**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
г. Пермь, Российская Федерация

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ НИЖНЕЙ КОНЕЧНОСТИ ЧЕЛОВЕКА НА ФАЗЕ ПОЛНОЙ ОПОРЫ СТОПЫ ЦИКЛА ШАГА

APPLICATION OF THE MATRIX METHOD FOR SIMULATION OF MOTION OF THE HUMAN LOWER LIMB IN THE FULL SUPPORT PHASE OF THE FOOT STEP CYCLE

Метод матриц является современным средством моделирования движения разомкнутых систем абсолютно твердых тел и применяется в технике при проектировании манипуляционных роботов и в биомеханике при тренировке спортсменов и реабилитации пациентов. Цель исследования состоит в применении метода матриц для биомеханического моделирования кинематики движения нижней конечности человека на фазе цикла шага полной опоры стопы. Оценка точности модели осуществлялась путем сравнения расчетных и экспериментальных значений координат большого вертела бедра нижней конечности. В эксперименте фотографически регистрировалось изменение во времени межзвенных углов конечности и измерялись длины сегментов конечности (голен и бедра). Установлено в первом приближении удовлетворительное соответствие сравниваемых величин: 11,4 % для мужчины и 13,7 % для женщины. Разработанная цифровая модель предполагается к использованию при проектировании протеза стопы.

Ключевые слова: нижняя конечность человека, ходьба в норме, фаза полной опоры стопы, метод матриц, математическая модель, оценка точности модели.

The matrix method is a modern means of modeling the motion of open-loop systems of absolutely solid bodies and is used in engineering when designing manipulation robots and in biomechanics when training athletes and rehabilitating patients. The aim of the study is to apply the matrix method for biomechanical modeling of the kinematics of human lower limb motion in the phase of the full foot support step cycle. The accuracy of the model was assessed by comparing the calculated and experimental values of the coordinates of the great femoral trochanter of the lower limb. In the experiment, the change in time of the inter-link angles of the limb was recorded photographically and the lengths of the limb segments (tibia and femur) were measured. A satisfactory agreement of the compared values was established to a first approximation: 11.4 % for male and 13.7 % for female. The developed digital model is supposed to be used in the design of the prothetic.

Keywords: human lower limb, normal walking, phase of full foot support, matrix method, mathematical model, estimation of model accuracy.

Введение

Согласно исследованиям, молодому организму рекомендуется делать от 10 до 19 тыс. шагов в день, что соответствует 1,5–2,0 ч тренировки [3]. При ходьбе человека выделяются две основные фазы: передний толчок (опора на пяточную часть) стопы и опора на всю стопу. Во время опоры на всю стопу кости голени и бедра выпрямляются, что приводит к передаче силы от сгибаемых мышц к внутренним органам без амортизации, что при повторяющемся воздействии этого процесса может негативно сказываться на здоровье человека [9].

Исследование движений является эффективным методом для диагностики заболеваний опорно-двигательной системы, подготовки спортсменов [7, 8], поиска подходящих методов лечения и реабилитации пациентов с ортопедическими проблемами (например, многоплоскостные деформации стопы [12], диабетическая стопа [17], мышечная дистрофия [26]), а также для оптимизации их состояния [5, 10], в том числе на ранних этапах (например, при асимметричном переносе тяжестей [13]), и помощи в восстановлении функций передвижения у детей [23].

Создание цифровой модели позволяет изучать развитие патологических процессов, таких как болезнь Паркинсона [6], инсульт [11], рассеянный склероз [15, 24], перегрузочная метатарзалгия [19] и пателлофemorальный болевой синдром [27], что способствует разработке более эффективных методов диагностики заболеваний.

Метод матриц [4] применяется в компьютерном моделировании для анализа движения и проектирования биомеханических систем, таких как медицинские роботы (тренажеры ходьбы [14], спортивные и промышленные экзоскелеты [16, 18, 28]) и протезы конечностей. Особенно он полезен для разомкнутых систем, таких как верхние и нижние конечности человека, благодаря использованию однородных преобразований координат и специальной системы координат, привязанной к движущимся телам разомкнутой системы.

Получение качественных анатомо-функциональных результатов позволяет разработать системы предоперационного планирования [20], что, в свою очередь, помогает лечению переломов бедра [21] или исследованию состояния имплантата при ходьбе [22, 29]. Также исследования походки можно совмещать со стабилметрией [25, 30].

Положение твердого тела, свободно движущегося в пространстве, полностью определяется шестью обобщенными координатами: три координаты начала подвижной системы координат, связанной с телом, и три угла Эйлера, определяющие расположение осей подвижной системы координат относительно неподвижной.

Два смежных тела образуют кинематическую пару, и поскольку в конечностях все суставы моделируются цилиндрическими шарнирами, то все пары системы являются парами вращательного типа.

Чтобы найти однородное преобразование координат с помощью специальной системы координат, нужно построить ее по следующему правилу [1]:

1) ось z_{i-1} (рис. 1) направляется вдоль оси i -й кинематической пары. Номер кинематической пары совпадает со старшим номером тел, образующих кинематическую пару;

2) ось x_i перпендикулярна осям кинематической пары (z_{i-1} и z_i) и направлена от оси с меньшим номером, то есть от оси z_{i-1} к оси z_i ;

3) ось y выбираем так, чтобы система координат была «правой».

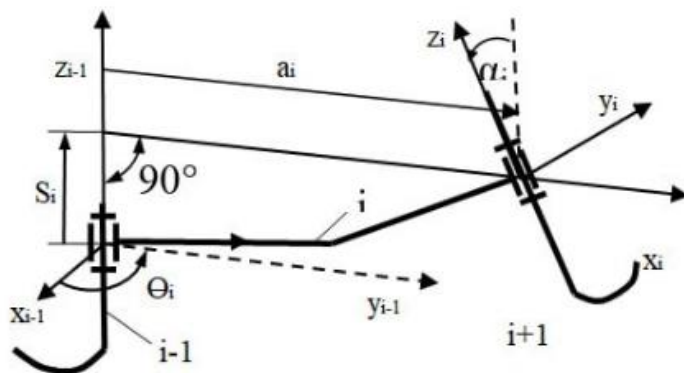


Рис. 1. Правила построения и последовательность совмещения специальной системы координат x_{i-1} , y_{i-1} , z_{i-1} с осями системы x_i , y_i , z_i путем последовательных перемещений на величины параметров θ_i , S_i , a_i , α_i в разомкнутой механической системе трех тел, связанных цилиндрическими шарнирами. Нумерация тел: $i-1$, i , $i+1$

Чтобы найти координаты точки в системе с индексом $i-1$ по координатам ее в системе i , нужно совместить оси с индексом $i-1$ с осями с индексом i . Этот механизм математического преобразования координат осуществляется с помощью четырех последовательных независимых перемещений (см. рис. 1):

- 1) поворот оси x_{i-1} на угол θ_i до положения, параллельного x_i ;
- 2) перемещение осей $(i-1)$ -й системы на S_i вдоль оси z_{i-1} до совмещения оси x_{i-1} с осью x_i , таким образом, оси совпадут;
- 3) сдвиг на расстояние a_i вдоль оси x_i ;
- 4) поворот оси z_{i-1} к оси z_i на угол α_i .

Параметр θ_i – обобщенная координата i -й кинематической пары, остальные три параметра являются постоянными, определяющими геометрию конструкции пары.

Каждое перемещение описывается своей матрицей. Матрица поворота на угол θ_i :

$$K_i = \begin{bmatrix} \cos \Theta_i & -\sin \Theta_i & 0 & 1 \\ \sin \Theta_i & \cos \Theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Перемещение на S_i :

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Матрица сдвига на a_i :

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Переворот вокруг оси u :

$$N_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Координаты точки из системы с индексом i в систему с индексом $i-1$ получаются путем преобразования:

$$A_i = K_i L_i M_i N_i;$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & s_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матрица A_i называется матрицей положения, поскольку ее левый верхний 3×3 блок направляющих косинусов определяет направление осей i -й координатной системы в $(i-1)$ -й системе, а последний столбец является радиус-вектором начала координат i -й системы (\vec{h}_{i-1}). В матрице A_i содержится четыре параметра – θ_i , S_i , a_i , α_i – и только один из них, а именно угол поворота в шарнире $\theta_i = \theta_i(t)$, изменяется при движении механической системы. В связи с этим угол θ_i принимается в дальнейшем за обобщенную координату. Остальные параметры являются постоянными и характеризуют размеры и форму тел системы.

Для преобразования из последней системы координат в нулевую:

$$\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \prod_{i=7}^{\emptyset} A_i \begin{Bmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \\ 1 \end{Bmatrix} = B_7 \begin{Bmatrix} x_7 \\ y_7 \\ z_7 \\ 1 \end{Bmatrix}_t. \quad (6)$$

Матрица B имеет такую же структуру, как и матрица A :

$$B_i = \begin{bmatrix} M_i & h_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где M_i (матрица поворота, или ортогональная матрица) имеет направляющие косинусы осей СК, связанные с последним телом: системы с индексом i и системы абсолютной, связанной с телом 0; B_i также называют матрица положения (координат) всех СК от 1-го до i -го номера.

Расчет экспериментальных значений

Экспериментально найдем углы ϕ_1 и ϕ_2 и выведем зависимость углов от времени шага t .

Необходимое оборудование:

- камера;
- маркеры-датчики.

Последовательность выполнения эксперимента:

- крепим датчики на бедренный, коленный и голеностопный суставы с правой стороны, поскольку будет фиксироваться правая нога;
- на камеру совершаем три шага правой ногой;
- делаем раскадровку видео, выбираем наилучшие кадры в разные моменты времени, вычисляем координаты точек коленного и бедренного суставов и углы. Рассчитываем зависимость углов от времени шага.

Кадры, взятые для расчета углов в эксперименте для мужчины (№ 1) в определенных моменты времени, представлены на рис. 2. Расчет углов и координат в эти моменты времени представлен на рис. 3.

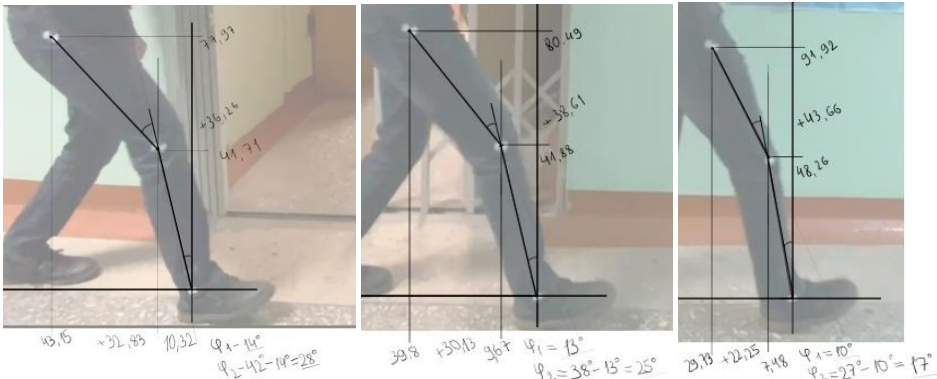


а

б

в

Рис. 2. Кадры, взятые для расчета углов в эксперименте № 1, в моменты времени:
 $a - t_1 = 4 \text{ с}$; $б - t_2 = 7 \text{ с}$; $в - t_3 = 11 \text{ с}$



а

б

в

Рис. 3. Координаты в моменты времени: $a - t_1 = 4 \text{ с}$; $б - t_2 = 7 \text{ с}$; $в - t_3 = 11 \text{ с}$

Кадры, взятые для расчета углов в эксперименте для женщины (№ 2) в определенных моменты времени, представлены на рис. 4. Расчет углов и координат в эти моменты времени представлен на рис. 5.

*a**б**в*

Рис. 4. Кадры, взятые для расчета углов в эксперименте № 2, в моменты времени:
 $a - t_1 = 4$ с; $б - t_2 = 7$ с; $в - t_3 = 11$ с

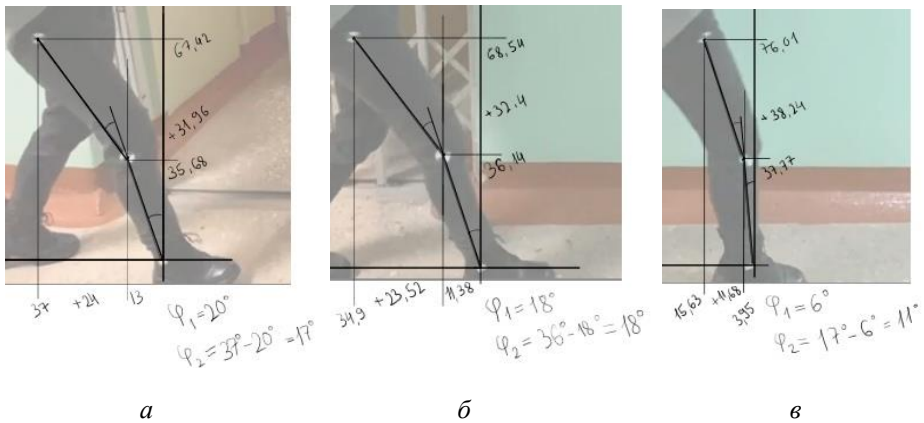


Рис. 5. Координаты в моменты времени: $a - t_1 = 4$ с; $б - t_2 = 7$ с; $в - t_3 = 11$ с

Далее все значения были сведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Эксперимент № 1

Значение	t1 = 4 с	t2 = 7 с	t3 = 11 с
X1, см	10,32	9,67	7,48
Y1, см	41,71	41,88	48,26
X2, см	41,15	39,38	29,73
Y2, см	77,37	80,49	91,92
$\phi_1, ^\circ$	14	13	10
$\phi_2, ^\circ$	28	25	17

Таблица 2

Эксперимент № 2

Значение	t1 = 4 с	t2 = 7 с	t3 = 11 с
X1, см	13	11,38	11,68
Y1, см	35,68	36,14	37,77
X2, см	37	34,9	15,63
Y2, см	67,42	68,54	76,01
$\phi_1, ^\circ$	20	18	6
$\phi_2, ^\circ$	17	18	11

Построен график зависимости значения углов от времени (рис. 6).

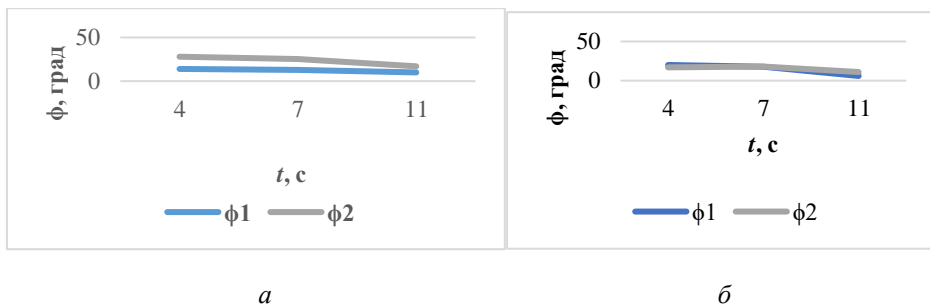


Рис. 6. Графики зависимости углов от времени: а – для мужчины; б – для женщины

Найдем радиус-вектор точки С (то есть ее положение) для $t = 5$ с геометрически. Для этого рассчитаем углы и воспользуемся теоремой косинусов (рис. 7).

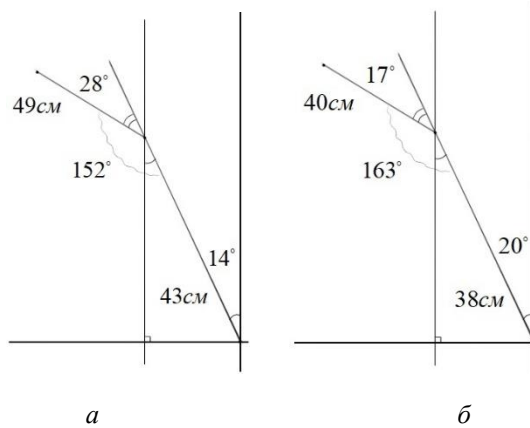


Рис. 7. Схемы сгиба ноги для двух экспериментов:
a – эксперимент № 1; *б* – эксперимент № 2

$$r_c = \sqrt{49^2 + 43^2 - 2 \cdot 49 \cdot 43 \cdot \cos 152^\circ} \approx 89,279 \text{ см} \quad \text{– для мужчины;}$$

$$r_c = \sqrt{38^2 + 40^2 - 2 \cdot 38 \cdot 40 \cdot \cos 163^\circ} \approx 77,144 \text{ см} \quad \text{– для женщины.}$$

Расчет численных значений

На рис. 8 представлена модель нижней конечности человека и специальные системы координат. Движение конечности рассматривается в плоскости, параллельной сагитальной [2]. Суставы представляются цилиндрическими шарнирами, и оси *z* перпендикулярны плоскости чертежа.

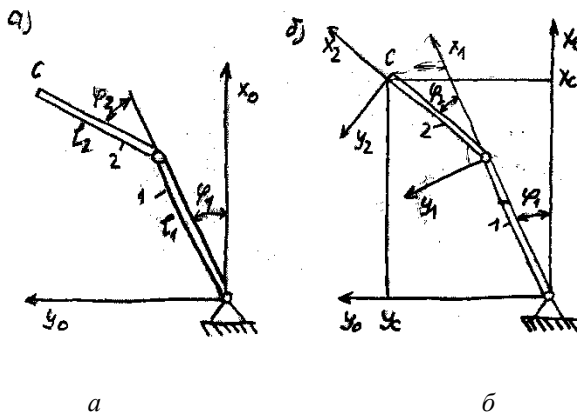


Рис. 8. Модель нижней конечности человека:
a – расчетная схема; *б* – кинематическая расчетная схема

Необходимо создать таблицу параметров модели. К параметрам относятся:

- Θ_i (угол поворота, где i – номер кинематической пары, с которым связаны локальные системы координат (СК));
- S_i – расстояние между пересечением оси z_{i-1} с осью x_i и началом $i-1$ системы координат;
- a_i – расстояние между началом i и $i-1$ СК, которые отсчитываются вдоль оси x_{i-1} (всегда положительно);
- α_i – угол, на который необходимо повернуть ось z_{i-1} вокруг оси x_i , чтобы она стала сонаправлена с осью z_i .

Дальнейшие таблицы и формулы приводятся для двух экспериментов.

Таблица 3

Эксперимент № 1

Номер пары	i	$\Theta_i, ^\circ$	$S_i, \text{см1}$	$a_i, \text{см}$	$\alpha_i, ^\circ$
0-1	1	φ_1	43	0	0
1-2	2	φ_2	49	0	0

Таблица 4

Эксперимент № 2

Номер пары	i	$\Theta_i, ^\circ$	$S_i, \text{см1}$	$a_i, \text{см}$	$\alpha_i, ^\circ$
0-1	1	φ_1	38	0	0
1-2	2	φ_2	40	0	0

Прямая задача кинематики состоит в том, чтобы по заданным значениям обобщенных координат $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_j$ определить положение, скорость и ускорение точки С в абсолютной системе координат.

Решение прямой задачи кинематики обычно используется для оценки точности компьютерной модели путем сравнения с экспериментальными данными и определяется по уравнениям:

$$\vec{r}_c = B_2(\theta_i, i = \overline{1,2}) \cdot \vec{r}_2, \quad (8)$$

где \vec{r}_c – радиус-вектор точки С в нулевой системе координат, а \vec{r}_2 – радиус-вектор точки С в системе координат с индексом 1.

¹ Было определено с помощью таблицы масс-инерциальных характеристик [1].

$$r_2 = \begin{bmatrix} S2 \cos(\varphi_2) \\ S2 \cos(-90 + \varphi_2) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (10)$$

$$B_1 = A_1; \quad (11)$$

$$B_2 = A_1 \cdot A_2; \quad (12)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) & 0 & 0 \\ \sin(x) & \cos(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Скорость точки С можно найти по формулам:

$$\bar{v}_c = \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial B_2}{\partial \theta_j} \cdot \dot{\theta}_j \bar{r}_2; \quad (15)$$

$$\bar{v}_c = \frac{\partial B_2}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 \bar{r}_2 + \frac{\partial B_2}{\partial \varphi_2} \dot{\varphi}_2 \bar{r}_2. \quad (16)$$

Угловую скорость и угловое ускорение тел 1 и 2 можно найти по формулам:

$$\bar{\omega}_i = \sum_{j=1}^2 \dot{\theta}_j B_{j-1} \bar{e}_{j-1}; \quad (17)$$

$$\bar{\omega}_1 = \dot{\varphi}_1 B_0 \bar{e}_0; \quad (18)$$

$$\bar{\omega}_2 = \dot{\varphi}_1 B_0 \bar{e}_0 + \dot{\varphi}_2 B_1 \bar{e}_1, \quad (19)$$

$$\text{где } \bar{e}_0 = \bar{e}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (21)$$

$$\vec{\varepsilon}_l = \sum_{j=1}^i \left(\ddot{\theta}_j B_{j-1} \vec{e}_{j-1} + \dot{\theta}_l \sum_{k=1}^i \frac{\partial B_{j-1}}{\partial \theta_k} \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \vec{e}_{j-1} \right); \quad (22)$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \dot{\varphi}_1 B_0 \vec{e}_0; \quad (23)$$

$$\vec{\varepsilon}_2 := \dot{\varphi}_1 B_0 \vec{e}_0 + \dot{\varphi}_1 B_1 \vec{e}_1 + \dot{\varphi}_2 \left(\frac{\partial B_1}{\partial \varphi_1} \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \vec{e}_1 \right). \quad (24)$$

Результаты

Аппроксимация уравнений движения квадратичным полиномом. Общий вид квадратичного полинома:

$$\varphi = a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \quad (25)$$

Для эксперимента № 1 (для мужчины):

Система уравнений для φ_1 :

$$\begin{cases} 14 = a_0 + 5a_1 + 25a_2 \\ 13 = a_0 + 8a_1 + 64a_2 \\ 10 = a_0 + 10a_1 + 100a_2 \end{cases}. \quad (26)$$

Отсюда найдем неизвестные коэффициенты: $a_0 = \frac{19}{3}$, $a_1 = \frac{27}{10}$, $a_2 = -\frac{7}{30}$.

Система уравнений для φ_2 :

$$\begin{cases} 28 = a_0 + 5a_1 + 25a_2 \\ 25 = a_0 + 8a_1 + 64a_2 \\ 17 = a_0 + 10a_1 + 100a_2 \end{cases}. \quad (27)$$

Решение системы (27) дает значения неизвестных коэффициентов: $a_0 = 9$, $a_1 = \frac{34}{5}$, $a_2 = -\frac{3}{5}$.

Выводим зависимости углов от времени:

$$\varphi_1 = \frac{19}{3} + \frac{27}{10} t - \frac{7}{30} t^2; \quad (28)$$

$$\varphi_2 = 9 + \frac{34}{5} t - \frac{3}{5} t^2. \quad (29)$$

Подставим время $t = 5$ с и численно найдем вектор \vec{r}_c :

$$\vec{r}_c = \begin{bmatrix} 13.535 \\ 35.559 \\ 92 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Длина вектора $\vec{r}_c = \sqrt{13,535^2 + 35,559^2 + 92^2 + 1^2} = 99,526$, см. Таким образом, относительная погрешность Δ вычислительного метода составила:

$$\Delta = \frac{99,526 - 89,279}{89,279} \cdot 100 \% \approx 11,4 \%$$

Зная зависимости углов от времени, найдем неизвестные значения $\vec{v}_c, \vec{\omega}_1, \vec{\varepsilon}_1$: подставив значения углов ($\varphi_1 = 14^\circ, \varphi_2 = 28^\circ$) и времени ($t = 5$), найдем точные значения:

$$\vec{v}_c(t = 5) = \begin{bmatrix} 38,19 \\ -13,81 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{см}}{c} \right]; \quad (31)$$

$$\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{11}{10} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{c} \right]; \quad (32)$$

$$\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{6} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,83 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{c} \right]; \quad (33)$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{7}{15} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,47 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{c^2} \right]; \quad (34)$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,67 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{c^2} \right]. \quad (35)$$

Для эксперимента № 2 (для женщины):

Система уравнений для φ_1 :

$$\begin{cases} 20 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 \\ 18 = a_0 + 7a_1 + 49a_2 \\ 6 = a_0 + 11a_1 + 121a_2 \end{cases} \quad (36)$$

Отсюда найдем неизвестные коэффициенты: $a_0 = \frac{40}{3}, a_1 = 3, a_2 = -\frac{1}{3}$.

Система уравнений для φ_2 :

$$\begin{cases} 17 = a_0 + 4a_1 + 16a_2 \\ 18 = a_0 + 7a_1 + 49a_2 \\ 11 = a_0 + 11a_1 + 121a_2 \end{cases} \quad (37)$$

Отсюда найдем неизвестные коэффициенты: $a_0 = \frac{22}{3}$, $a_1 = \frac{101}{28}$, $a_2 = -\frac{25}{84}$.

Выводим зависимости углов от времени:

$$\varphi_1 = \frac{40}{3} + 3t - \frac{1}{3}t^2; \quad (38)$$

$$\varphi_2 = \frac{22}{3} + \frac{101}{28}t - \frac{25}{84}t^2. \quad (39)$$

Подставим время $t = 4$ с и численно найдем \vec{r}_c :

$$\varphi_1 = 20^\circ; \quad (40)$$

$$\varphi_2 = 17^\circ; \quad (41)$$

$$\vec{r}_c = \begin{bmatrix} 23.917 \\ 32.326 \\ 78 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Длина вектора \vec{r}_c в соответствии с уравнением (8) равна $r_c = \sqrt{23,917^2 + 32,326^2 + 78^2 + 1^2} = 87,761$, см. Таким образом, относительная погрешность Δ вычислительного метода составила:

$$\Delta = \frac{87,761 - 77,144}{77,144} \cdot 100 \% \approx 13,7 \%.$$

Зная зависимости углов от времени, найдем неизвестные значения \vec{v}_c , $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$: подставив значения углов ($\varphi_1 = 20^\circ$, $\varphi_2 = 17^\circ$) и времени ($t = 4$), найдем точные значения:

$$\vec{v}_c = \begin{bmatrix} -50.41266761 \\ 37.29994190 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{см}}{\text{с}} \right]; \quad (43)$$

$$\vec{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,33 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]; \quad (44)$$

$$\vec{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{131}{84} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,56 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]; \quad (45)$$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,67 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{c^2} \right]; \quad (46)$$

$$\vec{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{53}{42} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1,26 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\frac{\text{рад}}{c^2} \right]. \quad (47)$$

Выводы

1. Результаты для мужчин и женщин качественно идентичны и не сильно разнятся по значениям. Получившиеся отличия возникают из-за разной длины ног и походки, что скорее зависит от конкретного человека, нежели от пола. Для более точного рассмотрения этого вопроса стоит провести эксперимент с большим количеством испытуемых.

2. Анализируя угловые перемещения, скорости и ускорения звеньев нижней конечности человека при выполнении различных целенаправленных движений типа «движение вперед-назад», можно оценивать качественно и количественно процесс реабилитации пациента. Естественно, что при построении кинематической схемы и анализе движений нужно учитывать антропометрические данные и ограничения, налагаемые на движения в суставах.

3. Маркеры, прикрепленные к местам сгиба суставов, и камера позволяют получить исходные экспериментальные данные, на основе которых можно смоделировать движение и получить координаты звеньев конечности в пространстве и их скорость и ускорение в любой момент времени движения.

4. Метод работает корректно, поскольку погрешность составляет приемлемое значение 11,4 % и 13,7 % соответственно для первого (муж.) и второго (жен.) экспериментов, следовательно, первая задача кинематики движения конечности на фазе полной опоры в первом приближении решена. Однако исследование следует продолжить в направлении уточнения экспериментальных данных на этапе увеличения дискретизации по времени, то есть увеличения числа кадров и повышения степени аппроксимации зависимостей (28), (29) / (38), (39) обобщенных координат конечности φ_1 , φ_2 от времени.

Список литературы

1. Фролов К.В., Воробьев Е.И. Механика промышленных роботов. Т. 1. Кинематика и Динамика. – М.: Высшая школа, 1988.
2. Бегун П.И., Шукейло Ю.А. Биомеханика: учебник для вузов. – СПб.: Политехника, 2000. – 463 с.

3. Шутова Т.Н., Бунина П.С., Грачева Д.В. Шагометрия и пульсометрия в анализе двигательной активности студентов // Физическая культура, спорт, туризм: материалы Всерос. науч.-практ. конф. – 2018. – С. 196–201.

4. Воробьев Е.И. Построение уравнений программного движения пространственных механизмов с несколькими степенями свободы // Машиноведение. – 1981. – № 5. – С. 30–37.

5. Аксенов А.Ю. Комплексная инструментальная оценка функционального состояния нижних конечностей и коррекция их нарушений // Биотехносфера. – 2015. – № 4 (40).

6. Dobrynina Yu.V., Dayanova D.D., Kozlov A.S., Umarov B.K. Modelirovaniye evolyutsii patologicheskikh protsessov pri bolezni Parkinsona [Simulation of the Evolution of Pathological Processes in Parkinson's Disease] // Vestnik novykh meditsinskiykh tekhnologiy [Journal of New Medical Technologies]. – 2015. – No. 2. – P. 26–32. – DOI: 10.12737/11828

7. Zagrevskiy V.I., Zagrevskiy O.I. Biofizika fizicheskikh uprazhneniy [Exercise Biophysics]. – Tomsk, Izdatelskiy dom Tomskogo gosudarstvennogo universiteta, 2018. – 262 p.

8. Горбунов Д.В. Симуляционное моделирование движения конечности человека // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 32–43. – DOI: 10.15688/mpcm.jvolsu.2020.1.4

9. Александров С.П., Жуковская Т.В. Амортизация тела человека в фазе полной опоры на стопу // Сб. науч. ст. и восп. «памяти В.А. Фукина посвящается». – 2014. – Т. 2. – С. 36–45.

10. Влияние максимальной велоэргометрической нагрузки на координационные способности и функциональное состояние спортсменов циклических видов спорта / И.О. Гарнов, Н.Г. Варламова, Т.П. Логинова, Н.Н. Потолицына, А.А. Черных, Е.Р. Бойко // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 174–183.

11. Клинико-биомеханическое обоснование применения экзоскелета «ЭкзоАтлет» при ходьбе больных с последствиями ишемического инсульта / Е.В. Письменная, К.А. Петрушанская, С.В. Котов, Г.Е. Аведиков, И.Е. Митрофанов, К.М. Толстов, В.А. Ефаров // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 2. – С. 204–230.

12. Изменение биомеханики походки больных, перенесших реконструктивные операции на стопе по поводу алкогольной нейропатии / В.Б. Богатов, А.В. Лычагин, А.Р. Дрогин, А.В. Гаркави, А.А. Шишова // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 3. – С. 326–335.

13. Влияние асимметричной нагрузки на реакции опоры при походке / И. Талар, К. Газинский, П.-А. Семма, Б. Загородний // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 4. – С. 557–565.

14. Эргономические предложения по развитию роботизированных тренажеров для ходьбы / Д. Заркович, М. Шорфова, К. Гролегер-Шршень, Д. Равник // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 4. – С. 566–578.

15. Клинико-физиологическое обоснование применения экзоскелета «Экзо-Атлет» при ходьбе для больных с рассеянным склерозом / С.В. Котов, К.А. Петрушанская, В.Ю. Лиждвой, Е.В. Письменная, А.Б. Секирин, И.А. Сутченков // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 2. – С. 148–166.

16. Медведев В.Г. Антропоморфная мехатроника для спорта и медицины // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 2. – С. 232–242.

17. Главловская А., Загородний Б. Нахождение силы реакции опоры во время подъема по лестнице при трансфemorальной ампутации (пример из практики) // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 4. – С. 455–468.

18. Исследование амплитуд движений в крупных суставах верхних и нижних конечностей и сочленениях позвоночника при использовании промышленных экзоскелетов / А.М. Гергей, Е.В. Бондарук, И.С. Малахова, А.Р. Ефимов, В.Х. Тах, А.В. Сотин // Российский журнал биомеханики. – 2020. – Т. 24, № 4. – С. 475–490.

19. Роль подбарометрии в оценке предоперационного и послеоперационного состояния больных с перегрузочной метатарзалгией / Л.Ю. Слинъяков, В.Б. Богатов, Н.В. Ригин, Д.С. Бобров, А.А. Шубкина // Российский журнал биомеханики. – 2019. – Т. 23, № 4. – С. 500–510.

20. Разработка системы поддержки принятия врачебных решений в травматологии и ортопедии. Биомеханика как инструмент предоперационного планирования / А.С. Бескровный, Л.В. Бессонов, А.А. Голядкина, А.В. Доль, Д.В. Иванов, И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович, Д.А. Сидоренко // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 2. – С. 118–133.

21. Биомеханический подход к выбору вида интрамедуллярного фиксатора при смоделированном переломе бедренной кости / Ю.А. Барабаш, Д.В. Иванов, В.Б. Богатов, А.В. Лычагин // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 2. – С. 209–217.

22. Конечно-элементный анализ напряженно-деформированного состояния эндопротеза тазобедренного сустава при ходьбе / Л.Б. Маслов, А.Ю. Дмитрюк, М.А. Жмайло, А.Н. Коваленко // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 4. – С. 414–433.

23. Особенности биомеханической и иннервационной структуры ходьбы у здоровых детей раннего возраста / Т.Т. Батышева, Е.В. Письменная, К.А. Петрушанская, М.В. Писарева, М.В. Ковина // Российский журнал биомеханики. – 2021. – Т. 25, № 4. – С. 434–443.

24. Петрушанская К.А., Котов С.В., Лиждвой В.Ю. Первые результаты применения функциональной электрической стимуляции мышц при ходьбе

у пациентов с рассеянным склерозом // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, № 2.

25. Кручинин П.А., Холмогорова Н.В. Энергетические оценки в стабиллометрии // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, № 4. – С. 42–55.

26. Петрушанская К.А., Белова Ю.А., Новикова Е.С. Клинико-биомеханическое обоснование необходимости реабилитации у взрослых пациентов с наследственной прогрессирующей конечностно-поясной мышечной дистрофией, тип 1А: клинический случай // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 1. – С. 55–63.

27. Биомеханический анализ статики и походки пациентов с пателлофemorальным болевым синдромом / В.О. Сушин, Н.Н. Рукина, А.Н. Кузнецов, А.Н. Белова, О.В. Воробьева, А.Д. Бутченко, Е.А. Дудоров // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 4. – С. 148–158.

28. Моделирование движения активного экзоскелета с пятью управляемыми электроприводами звеньями / А.О. Блинов, А.В. Борисов, Л.В. Кончина, М.Г. Куликова, К.С. Маслова // Российский журнал биомеханики. 2023. Т. 27. №4: 186-199.

29. Исследование индивидуального эксплуатационного ресурса эндопротеза тазобедренного сустава / Н.М. Белокрылов, В.Л. Скрыбин, А.В. Сотин, Г.В. Миллер, Л.В. Шарова, М.И. Шмурак // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, № 4. – С. 98–104.

30. Любкевич А.А., Кручинин П.А. Диффузионный анализ стабиллометрических измерений и особенности работы вестибулярного аппарата // Российский журнал биомеханики. – 2023. – Т. 27, № 2. – С. 47–54.

Сведения об авторах

Острер Константин Станиславович – студент гр. БМ-22-1м факультета прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.

Макашова Анастасия Дмитриевна – студентка гр. БМ-22-1м факультета прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.

Акулич Юрий Владимирович – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики, механики и биомеханики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.

Финансирование: исследование выполнено без финансирования.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Получена: 20.05.2024

Одобрена: 24.05.2024

Принята к публикации: 29.05.2024

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом: Острер, К. С. Применение метода матриц для моделирования движения нижней конечности человека на фазе полной опоры стопы цикла шага / К. С. Острер, А. Д. Макашова, Ю. В. Акулич // *Master's Journal*. – 2024. – № 1. – Art. 15.

Please cite this article in English as: Ostrer K. S., Makashova A. D., Akulich Uu. V. Application of the matrix method for simulation of motion of the human lower limb in the full support phase of the foot step cycle. *Master's Journal*, 2024, no. 1. art. no. 15.