УДК 539.3

М.Г.Давыдов

О развитии энергетического подхода к исследованию устойчивости процесса упругопластического деформирования

ABSTRACT

Stability energy criterion for quasi-static elasto-plastic deformation process is formulated. This criterion is based on stability definition with respect to two metrics of distributed systems. The difference between internal stresses work and external forces work on the displasements corresponding to the momentary acting disturbances is used as Liapunov functional. The following problems are considered for illustration of energy criterion application: idealized column compressing by axial force; firstorder rate bifurcation without unloading; the onset of localization of deformation determination.

С помощью определения устойчивости по двум метрикам систем с распределенными параметрами, основанного на классическом понятии устойчивости по Ляпунову, используя энергетические соображения, сформулирован критерий устойчивости процесса упругопластического деформирования. Обоснование полученному критерию дает теорема А.М.Ляпунова об устойчивости, обобщенная на системы с бесконечным числом степеней свободы. В качестве функции Ляпунова взят функционал, характеризующий изменение в процессе упругопластического деформирования разности работ внутренних и внешних сил на перемещениях, соответствующих мгновенно действующим возмущениям. Для иллюстрации сформулированного критерия устойчивости при условии равноактивной бифуркации получено условие отсутствия бифуркации процесса упругопластического деформирования первого порядка, совпадающее с достаточным условием Р.Хилла, а также рассмотрена модель локализации пластической деформации как предельного типа бифуркации.

1. Введение

При математическом моделировании выпучивания упругопластических тел определение устойчивости и формулировка критерия, отражающего особенность этого явления, представляют собой важный этап исследования. На необходимость рассмотрения устойчивости упругопластических тел с позиций классического определения устойчивости по Ляпунову указывалось ранее многими исследователями. В первую очередь это связано с тем, что при моделировании упругопластического выпучивания возникает проблема анализа устойчивости процесса деформирования в отличие от оценки устойчивости состояния при упругой потере устойчивости [1]. Кроме того, при решении задач упругопластического деформирования, в том числе задач устойчивости за пределом упругости, необходимо идти по пути исследования процессов [2]. Ясно, что речь идет не о движениях, изучаемых теоретической механикой, развивающихся в реальном времени, для которых главную роль играет свойство инерционности, а о квазистатических процессах, отражающих историю деформирования в каждой материальной частице исследуемого тела. Интегральная мера этих локальных процессов должна иметь энергетический смысл.

Энергетические критерии устойчивости процесса упругопластического деформирования в различных формах были предложены ранее [3, 4, 5 и др.]. В [6], основываясь на положениях работы [4], энергетический критерий сформулирован для анализа поведения конструкции на "запредельной" стадии работы материала, в частности для оценки разрушения. Отметим, что специальный обзор понятий, определений и критериев, используемых при описании упругопластического выпучивания, выходит за рамки настоящей публикации и, в силу сложности рассматриваемого явления и многообразия существующих подходов, требует отдельного исследования. Критерии устойчивости, приведенные в перечисленных выше работах, различаясь в деталях, базируются на общем положении, которое является обобщением энергетического критерия устойчивости, имеющего строгое обоснование для консервативных систем, на сильно диссипативные системы. В перечисленных выше работах постулируется следующее: для устойчивой упругопластической системы при действии на нее некоторых возмущений допускаемых наложенными на систему связями дополнительная работа внутренних сил, обусловленная любыми возмущениями рассматриваемого класса, должна быть больше дополнительной работы внешних сил на этих возмущениях. Очевидно, данное правило в такой форме имеет мало общего с понятием устойчивости по Ляпунову, которое заключается в сравнении невозмущенного и возмущенных процессов, реализуемых при тех же силах и связях. В настоящем исследовании сделана попытка получить энергетический критерий устойчивости из определения устойчивости по двум метрикам на конечном интервале времени для систем с распределенными параметрами [7], основанного на классическом понятии устойчивости по Ляпунову. Дополнительное обоснование критерию дает теорема А.А.Мовчана [7], обобщающая известную теорему об устойчивости А.М.Ляпунова на системы с бесконечным числом степеней свободы. Строгое обоснование энергетического критерия, естественно, должно базироваться на термодинамических положениях, как это выполнено для упругих тел под действием консервативной нагрузки (см., например, обзорный доклад В.Т.Койтера [8]). Поэтому полученный результат, строго говоря, является гипотезой.

Некоторые понятия, аналогичные используемым в настоящей работе, вводились ранее Д.Друккером [4], А.М.Линьковым [6], H.Petryk [5]. Сформулированный критерий может быть использован как для оценки состояния равновесия (в частном случае, для упругих тел), так и для анализа устойчивости процесса упругопластического деформирования. Как и предложенные ранее [3,5], энергетический критерий, полученный в настоящей работе, включает, в виде частного случая, бифуркационный критерий [1,3] и, как показано ниже, может быть использован в рамках известной модели Дж.Райса [9] для исследования локализации в форме предельного типа бифуркации. Основные обозначения, принятые в настоящей работе, соответствуют монографии [10].

2. Формулировка энергетического критерия устойчивости

Рассмотрим происходящий на отрезке времени $[t_1,t]$ квазистатический процесс упругопластического деформирования. Для удобства в описании напряженно-деформированного состояния будем пользоваться записью в терминах отсчетной конфигурации. Последнее будем отмечать знаком "$\circ$" сверху в обозначениях. Пусть $\mathcal{X}^{o}(t)$- основной, невозмущенный процесс деформирования, вызванный приложенной на части границы $\overset{\circ}{S}_T$ нагрузкой $\overset{\circ}{T}{}^{o}=\overset{\circ}{T}(\mathcal{X}^{o}(t),t)$. Соответствующие этому процессу величины здесь и ниже помечаются знаком "o" справа вверху; возмущенные параметры напряженно-деформированного состояния ничем не помечаются. Для простоты полагаем, что объемные силы отсутствуют. Наряду с невозмущенным процессом $\mathcal{X}^{o}(t)$ будем рассматривать множество кинематически допустимых возмущенных процессов $\mathcal{X}(t)$, удовлетворяющих на части границы $\overset{\circ}{S}_u$ тем же кинематическим граничным условиям, что и $\mathcal{X}^{o}(t)$:

$$\mathcal{X}(R_o,\tau) - \mathcal{X}^{o}(R_o,\tau) = 0, \quad \forall\tau\in [t_1,t], \ R_o\in \overset{\circ}{S}_u . \qquad (2.1)$$

Причем для возможности сравнить полученный ниже результат с известным [3] кинематические граничные условия полагаем неизменными в процессе деформирования

$$d\mathcal{X}(R_o,t)/dt = 0, \quad R_o\in \overset{\circ}{S}_u . \qquad (2.2)$$

Напряженное состояние будем описывать с помощью первого тензора напряжений Пиола-Кирхгофа [10], энергетически сопряженной мерой деформации к которому является градиент скорости деформации, определенный в отсчетной конфигурации $\overset{\circ}{\nabla}V^{T}$.

Для формулировки определения устойчивости по аналогии с работами [3,4,6] для каждого момента времени t определим на классе перемещений $U(t)=\mathcal{X}(t)-\mathcal{X}^{o}(t)$, допустимых кинематическими граничными условиями на $\overset{\circ}{S}_u$, работу внутренних сил

$$W^{i}(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t) = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \int\limits_{0}^{U(t)} \mathcal{P} : \overset{\circ}{\nabla}(dU)^{T} d\overset{\circ}{V} \qquad (2.3)$$

и работу внешних сил

$$\overset{\circ}{W}(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t)=\int\limits_{\overset{\circ}{S}_{T}}\int\limits_{0}^{U(t)}T\cdot dU\,dS. \qquad (2.4)$$

Внутренние интегралы в (2.3) и (2.4) берутся вдоль любого пути в фиксированный момент времени t, ведущего к возмущенной конфигурации $\mathcal{X}(t)$, отличающейся от невозмущенной $\mathcal{X}^{o}(t)$. Промежуточные конфигурации не обязательно являются положениями равновесия, поскольку будем считать, что они достигаются в процессе "мгновенного" движения, следующего за "мгновенно" действующими возмущениями в выбранный момент времени t. Нужно подчеркнуть, что (2.3),(2.4) не соответствуют обычно используемым понятиям работы сил на действительных перемещениях. С другой стороны, от работы на возможных перемещениях уравнения $(\overset{\circ}{2}.3)$ и (2.4) отличает то, что напряжения P и усилия на границе T здесь не считаются фиксированными, а зависят от $\mathcal{X}(t)$.

Изменение энергии исследуемого тела (в указанном выше смысле) в процессе $\mathcal{X}(t)$будет

$$E(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t)=W^{i}(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t)-\overset{\circ}{W}(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t). \qquad (2.5)$$

По примеру [5] введем меру различия протекающих упругопластических процессов – невозмущенного $\mathcal{X}^{o}(t)$ и возмущенного $\mathcal{X}(t)$ (в [5] для этой цели использовались понятия работы внутренних и внешних сил на действительных перемещениях):

$$\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t)=\max_{\tau\in[t_1,t]}E(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},\tau). \qquad (2.6)$$

Для оценки внешней стороны этих процессов можно ввести также меру

$$d(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t)=\max_{\tau\in[t_1,t]}\left\|\mathcal{X}(\tau)-\mathcal{X}^{o}(\tau)\right\|= \qquad (2.7)$$

$$=\max_{\tau\in[t_1,t]}\max_{R_o\in\overset{\circ}{V}}\left|\mathcal{X}(R_o,\tau)-\mathcal{X}^{o}(R_o,\tau)\right|.$$

Меры различия процессов $\mathcal{X}^{o}(t)$и $\mathcal{X}(t)$ могут быть выбраны и в другом виде. Например, чтобы подчеркнуть, что сравниваются различные квазистатические процессы деформации, развивающиеся во времени, вместо (2.6) и (2.7) могут быть предложены соответственно

$$\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t)=\int\limits_{t_1}^{t}E(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t)d\tau, \qquad (2.8)$$

$$d(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t) = \int_{t_1}^{t} \left\| \mathcal{X}(\tau) - \mathcal{X}^{o}(\tau) \right\| d\tau . \qquad (2.9)$$

Очевидно, что меры (2.7) и (2.9) эквивалентны.

<u>Определение 1.</u> Основной процесс $\mathcal{X}^{o}(\tau)$ будем называть устойчивым на отрезке времени $[t_1,t]$ по отношению к действующим возмущениям тогда и только тогда, если $(\forall\varepsilon>0)$ $(\exists\delta>0)$ такое, что $\forall\mathcal{X}(t)$, удовлетворяющго (1.1), из условия

$$d(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},\tau_1) < \delta \qquad (2.10)$$

следует $\forall\tau\in[t_1,t]$, $\tau_1\le\tau$

$$\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},\tau) < \varepsilon . \qquad (2.11)$$

В противном случае процесс $\mathcal{X}^{o}(t)$ называется неустойчивым на данном интервале.

Приведенное определение соответствует определению устойчивости по двум метрикам системы с распределенными параметрами на конечном отрезке времени. При использовании в (2.10) меры (2.7) в виде $d(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},t_1)$, а меры в (2.11) в виде $d(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},\tau)$, $\tau\in[t_1,\infty)$ определение 1 соответствует классическому определению устойчивости А.М.Ляпунова по отношению к начальным возмущениям. Чтобы получить критерий устойчивости, перефразируем определение 1, пользуясь известным в математике приемом, поменяв все математические кванторы на противоположные. Получим следующее определение:

<u>Определение 2.</u> Основной процесс $\mathcal{X}^{o}(t)$ будем называть устойчивым тогда и только тогда, если $(\forall\delta>0)$ $(\exists\varepsilon>0)$ такое, что $\forall\mathcal{X}(t)$, удовлетворяющего (1.1) из условия

$$\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},\tau_1) > \delta \qquad (2.12)$$

следует $\forall\tau\in[t_1,t]$, $\tau_1\le\tau$

$$\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},\tau) > \varepsilon . \qquad (2.13)$$

В противном случае $\mathcal{X}^{o}(t)$ считается неустойчивым.

Приведенное определение основано на том, что для невозмущеного процесса $\rho(\mathcal{X}^{o},\mathcal{X}^{o},t)\equiv0$. Иными словами, процесс считается устойчивым, если отклонение от него требует подведения некоторого дополнительного количества энергии. Поэтому для устойчивого протекания $\mathcal{X}^{o}(t)$ необходимо, чтобы для любого возмущенного процесса, отличающегося от исходного,

$$E(\mathcal{X},\mathcal{X}^{o},\tau) > \varepsilon > 0, \quad \forall\tau\in[t_1,t]. \qquad (2.14)$$

Записанное условие можно считать критерием устойчивости. Отметим, что оно совпадает с постулированным в [4] критерием устойчивости в большом. Нетрудно убедиться, что с учетом (2.14) меры (2.6) и (2.8) эквивалентны.

Отметим связь условия (2.14) с классическим энергетическим критерием устойчивости равновесия, обоснование которого для консервативных систем дает теорема Лагранжа-Дирихле. Полагая в этом случае внешние силы в каждый момент времени фиксированными, а напряжения $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$ линейно зависящими от градиента перемещений $\nabla \mathrm{U}^{\mathrm{T}}$, из (2.14) получим

$$\frac{1}{2} \int_{\overset{\circ}{V}} \mathcal{P} : \overset{\circ}{\nabla} \mathrm{U}^{\mathrm{T}} d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{S}_{\mathrm{T}}} \overset{\circ}{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{U} d\overset{\circ}{S} > 0 . \qquad (2.15)$$

Последнее соответствует энергетическому критерию устойчивости для консервативных систем: в устойчивом положении равновесия полная потенциальная энергия имеет изолированный минимум.

Уравнение для определения критических значений нагрузки и, возможно, других величин, соответствующих потере устойчивости, будет

$$E(\mathcal{X}, \mathcal{X}^{0}, \tau_{cr}) = 0 , \quad t \le \tau_{cr} \le t , \qquad (2.16)$$

где τ_{cr} соответствует моменту потери устойчивости.

3. Модельная задача упругопластической устойчивости

Для примера, поясняющего некоторые из приведенных выше положений, воспользуемся моделью стойки, представляющей собой абсолютно твердое тело, опирающееся на два деформирующихся опорных стержня (рис.1). Такая модель позволяет, как и известная модель Ридера-Шенли, качественно проанализировать особенности упругопластической потери устойчивости. Для этих целей воспользуемся сформулированным энергетическим критерием. Подобные результаты, полученные с помощью рассматриваемой модели другим путем, подробно проанализированы в монографии [11]. Обозначения, принятые в этом параграфе, соответствуют [11]. В порядке изложения также будем следовать указанной монографии.

Обозначим через F площадь сечения каждого из стержней. Обозначения размеров модели даны на рис.1. Предположим, что свойства материала стержней характеризуются диаграммой с линейным упрочнением; E-модуль упругости, νE -касательный модуль (величина $\nu \le 1$ считается заданной). Приложенная нагрузка P является "мертвой". Усилия, возникающие в стержнях до момента потери устойчивости, обозначим P_1 и P_2. Здесь и далее индекс "1" относится к левому стержню, "2"- к правому. Приращения величин, соответствующие потере устойчивости, будем помечать значком "Δ". Возможные укорочения опорных стержней в момент потери устойчивости показаны на рис.2. Кинематические параметры Δl – вертикальное смещение середины основания OO_1 и φ – угол его

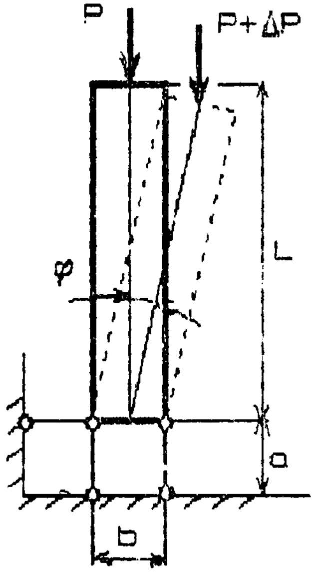

Рис. 1.

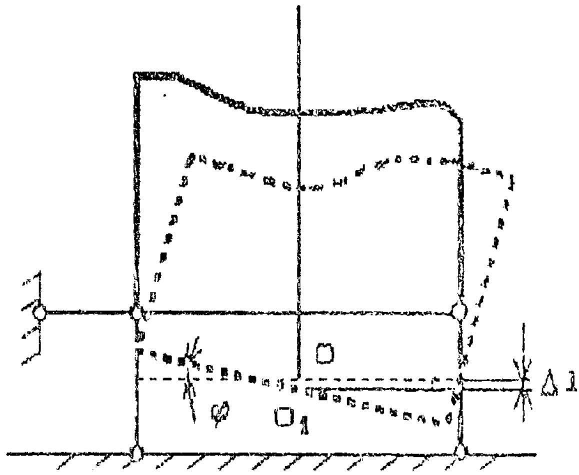

Рис. 2.

поворота считаются величинами малыми и являются, в общем случае, независимыми параметрами. Величины Δl и φ характеризуют возможные возмущения основного процесса деформирования (в обозначениях предыдущего параграфа это соответствует полю $U = \mathcal{X}-\mathcal{X}^{0}$). Из условия равновесия в докритическом состоянии имеем

$$P_1=P_2=P/2 \ . \qquad (3.1)$$

Дополнительные укорочения опорных стержней, вызванные возмущениями Δl и φ, будут

$$\Delta l_1=\Delta l-\frac{\varphi b}{2}, \qquad \Delta l_2=\Delta l+\frac{\varphi b}{2} \ . \qquad (3.2)$$

Считаем, что потеря устойчивости происходит за пределом упругости. Тогда, в общем случае, при наложении возмущений левый стержень разгружается, правый продолжает деформироваться пластически.

Дополнительные усилия, возникающие в стержнях в момент потери устойчивости, соответственно равны

$$\Delta P_1=-\frac{EF}{a}(\Delta l-\frac{\varphi b}{2}),$$
$$\Delta P_2=\frac{\nu EF}{a}(\Delta l+\frac{\varphi b}{2}). \qquad (3.3)$$

Сумму этих приращений обозначим ΔP.

Для задачи бифуркации принимается $\Delta P=0$. В общем случае при анализе устойчивости квазистатического процесса упругопластического деформирования $\Delta P\neq 0$. Последнее соответствует существованию равновесных состояний, отличных от основного (в данном случае - прямолинейного положения стойки), при нагрузках выше некоторой критической.

Работа внутренних сил (2.3) на классе допустимых возмущений в нашем примере запишется так:

$$W^i=\int_0^{\Delta l_1}(P_1+\Delta P_1)d(\Delta l_1)+\int_0^{\Delta l_2}(P_2+\Delta P_2)d(\Delta l_2)\ . \qquad (3.4)$$

Работа внешней силы (определение (2.4) будет

$$W^i=\int_0^{\Delta u}(P+\Delta P)d(\Delta u), \qquad (3.5)$$

где $\Delta u=\Delta l+\frac{\varphi^2 L}{2}$ - суммарное вертикальное смещение точки приложения силы P для рассматриваемых возмущений.

В качестве условия, определяющего момент потери устойчивости, примем следующее из критерия (2.16) равенство

$$W^i-W^e=0. \qquad (3.6)$$

С учетом (3.1) условие (3.6) примет вид

$$\int_0^{\Delta l_1}\Delta P_1 d(\Delta l_1)+\int_0^{\Delta l_2}\Delta P_2 d(\Delta l_2)-\int_0^{\varphi}(P+\Delta P)L\varphi d\varphi=0. \qquad (3.7)$$

Вначале рассмотрим три известные бифуркационные задачи [11]:

1. Считая, что материал обоих опорных стержней следует закону Гука ($\nu=1$), определим Эйлерову критическую силу $P_э$. В этом случае условие $\Delta P=0$ с учетом (3.3) при $\nu=1$ дает для возможных укорочений опорных стержней

$$\Delta l_1 = -\frac{\varphi\ b}{2}, \qquad \Delta l_2 = \frac{\varphi\ b}{2}. \tag{3.8}$$

Полагая $\varphi\neq0$, после подстановки (3.8) в (3.7) и сокращения на φ^2 получим

$$P_э = \frac{EFb^2}{2aL}. \tag{3.9}$$

2. Значение касательно-модульной нагрузки P_* получается в предположении, что потеря устойчивости происходит за пределом упругости без разгрузки в левом стержне. Все рассуждения остаются прежними, если модуль упругости E заменить на касательный модуль νE. Получим

$$P_* = \frac{\nu EFb^2}{2aL}. \tag{3.10}$$

3. По теории приведенного модуля, учитывая разгрузку в левом стержне, из условия $\delta P=0$ и соотношений (3.3) находим связь между Δl и φ:

$$\Delta l_1 = \frac{\varphi b}{2}\,\frac{1-\nu}{1+\nu}. \tag{3.11}$$

Подстановка последнего в равенство (3.7) после сокращений на φ^2 дает приведенно-модульную нагрузку

$$P_{**} = \frac{EFb^2}{2aL}\,\frac{1}{1+\nu}. \tag{3.12}$$

Заметим, что $P_{**}>P_{**}$ при $\nu<1$. При $\nu=1$ значения критического усилия, подсчитанные по формулам (3.9), (3.10) и (3.12), совпадают.

Далее, полагая $\Delta P\neq0$, изучим возможность существования равновесных состояний, отличных от основного, при нагрузках выше P_*. При этом параметры возмущений Δl и φ не связаны между собой и могут варьироваться независимо. Тогда, варьируя только угол φ, уравнение (3.7) можно записать следующим образом:

$$\frac{EFb}{2a}\int_0^{\varphi}\left(\Delta l - \frac{\varphi b}{2}\right)d\varphi + \frac{\nu EFb}{2a}\int_0^{\varphi}\left(\Delta l + \frac{\varphi b}{2}\right)d\varphi - \int_0^{\varphi}(P+\Delta P)L\varphi d\varphi = 0. \tag{3.13}$$

Объединив слагаемые в левой части (3.13) в один интеграл, в силу произвольности φ можно приравнять нулю полученное подынтегральное выражение. В итоге получим линейное относительно Δl и φ уравнение

$$\frac{EFb}{2a}(1+\nu)\Delta l + \frac{EFb^2}{4a}(1-\nu)\varphi = (P+\Delta P)L\varphi, \tag{3.14}$$

что соответствует равенству нулю моментов сил относительно т.O_1 (рис.2). Другим будет очевидное уравнение равновесия: сумма приращений (3.3) должна равняться ΔP:

$$\frac{EF}{a}(1+\nu)\Delta l - \frac{EFb}{2a}(1-\nu)\varphi = \Delta P. \qquad (3.15)$$

На (3.14) и (3.15) можно смотреть как на систему линейных алгебраических уравнений относительно Δl и φ, решение которой приведено в [11]. В частности, решение φ дает возможность проследить за отклонением верхнего конца стойки $\omega=\varphi L$ при возрастании нагрузки P от значения P_* до P_{**}

$$\omega = \frac{b(1-\nu)(P-P_*)}{2(1+\nu)(P_{**}-P)}. \qquad (3.16)$$

Уравнения (3.14) и (3.14) выведены в предположении, что в левом стержне происходит разгрузка, условие которой записывается в виде

$$\frac{\varphi b}{2} \geq \Delta l\ , \qquad (3.17)$$

что, как нетрудно убедиться, эквивалентно условию $P \geq P_*$. Таким образом, отклоненные равновесные состояния стойки осуществимы при условии разгрузки в левом опорном стержне, причем если нагрузка растет начиная со значения P_*. Этот результат можно трактовать в рамках так называемой концепции Ф.Шенли как потерю устойчивости процесса упругопластического деформирования при сохранении устойчивости состояний равновесия. В [11] дан подробный анализ этого результата и обсуждение современной концепции упругопластической устойчивости.

4. Теорема об устойчивости и задачи бифуркации

Преобразуем условие (2.14), используя метод функции Ляпунова. Одним из ключевых вопросов в использовании этого метода является выбор функции Ляпунова. Для систем с бесконечным числом степеней свободы указанный объект является функционалом. В качестве последнего здесь принят $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^0,t)$ (2.6). Утверждение теоремы об устойчивости, используемой в прямом методе Ляпунова, заимствуем из работы А.А.Мовчана [7]. Вначале, следуя [7], дадим определение понятий, используемых в указанной теореме.

Функционал $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)$ будем называть определенно-положительным в силу уравнений краевой задачи, если $\forall\delta>0$ и любых $\tau\in[t_1,t]$ и $\mathcal{X}(\tau)^*$ таких, что $d(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,\tau)>\delta$, существует $\varepsilon>0$, что выполняется условие $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)>\varepsilon$.

Функционал $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)$ допускается в силу уравнений краевой задачи бесконечно малый высший предел, если $(\forall\varepsilon>0)$, $(\exists\delta>0)$, что $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)<\varepsilon$ для любых $\tau\in[t_1,t]$ и $\mathcal{X}(\tau)$, удовлетворяющих условию $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)<\delta$.

Функционал $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)$ называется невозрастающим в силу уравнений краевой задачи, если вдоль любого возмущенного процесса $\mathcal{X}(t)$ не возрастает с ростом t (как функция переменой t) функционал $\rho(t)=\rho(\mathcal{X}(t),\mathcal{X}^\circ(t),t)$. Это соответствует для функционала условию $d\rho/dt\le 0$.

<u>Теорема</u> [7]. Для того, чтобы невозмущенное движение было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы существовал в силу уравнений краевой задачи определенно-положительный, допускающий бесконечно малый предел н нарастающий функционал.

Определение 2 показывает, что введенный ранее функционал $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)$ определенно-положительный, определение 1 - что $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)$ имеет бесконечно малый высший предел. Для выяснения последнего требования, предъявляемого условиями теоремы к функционалу, рассмотрим $dE(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)/dt$. Конструкция функционала (2.5) сводит производную по времени к производной по верхнему пределу в интегралах (2.3), (2.4). Используя следующее обозначение $dU/dt=W$, получим:

$$dE(\mathcal{X},\mathcal{X}^0,t)/dt = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \overset{\circ}{\mathcal{P}} : \overset{\circ}{\nabla} W^T dV - \int\limits_{\overset{\circ}{S}_T} \overset{\circ}{T} \cdot \overset{\circ}{W} d\overset{\circ}{S} . \qquad (4.1)$$

Последнее следует из теоремы о дивергенции с учетом условия (2.2), а также уравнения равновесия и статического граничного условия для процесса $\mathcal{X}(t)$ (уравнений задачи в возмущениях):

$$\overset{\circ}{\nabla} \cdot \mathcal{P} = 0 \quad , \qquad R_0 \in \overset{\circ}{V} \quad , \qquad (4.2)$$

$$N \cdot \mathcal{P} = \overset{\circ}{T} \quad , \qquad R_0 \in \overset{\circ}{S} . \qquad (4.3)$$

Таким образом, имеют место условия приведенной теоремы об устойчивости. Достаточные условия последней могут служить дополнительным обоснованием определения 2 и следующего из него критерия устойчивости (2.14).

Используя полученный критерий устойчивости, подробнее рассмотрим частный случай потери устойчивости - бифуркацию процесса упругопластического деформирования первого порядка. В данном случае теоретическое обоснование и экспериментальное подтверждение имеет гипотеза о равноактивной бифуркации [1], согласно которой продолжение упругопластического процесса в бесконечно близкий момент за точкой бифуркации характеризуется тем же распределением упругих и пластических зон, что и в момент, соответствующий потере устойчивости. Иными словами, предполагается, что бифуркация процесса деформирования происходит на путях полного догружения (без разгрузки) [1]. Исходя из этого полагаем, что тензоры напряжений в возмущенном состоянии $\mathcal{P}$ и невозмущенном $\mathcal{P}^0$ связаны с соответствующими градиентами скорости V и V^0 посредством одного и того же тензора четвертого ранга C :

$$\mathcal{P} = C : \overset{\circ}{\nabla}v , \qquad \mathcal{P}^o = C : \overset{\circ}{\nabla}v^o , \tag{4.4}$$

причем $C = C(R_o, \nabla\mathcal{X}^o, \nabla v^o, \ldots)$.

Здесь многоточие означает, что C может зависеть также от параметров структуры. Заметим, что полученный ниже результат не изменится, если вместо определяющих соотношений (4.4) взять их дифференциальную форму, связывающую скорость тензора напряжений Пиола-Кирхгофа с градиентом вектора скорости. Полагаем, что возмущенный и невозмущенный процессы связаны соотношением

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}^o + \eta\, \delta\mathcal{X} . \tag{4.5}$$

Здесь η - малый параметр; $\delta\mathcal{X}$ - изохронная вариация.

Функционал (2.5) с точностью до членов второго порядка малости представим в виде разложения

$$E(\mathcal{X},\mathcal{X}^o,t) = \delta E(\mathcal{X},\mathcal{X}^o,t) + \frac{1}{2}\,\delta^2 E(\mathcal{X},\mathcal{X}^o,t). \tag{4.6}$$

Вариации функционала $E(\mathcal{X},\mathcal{X}^o,t)$, стоящие в (4.6), вычисляются по формулам

$$\delta E = \partial E(\mathcal{X}^o + \eta\,\delta\mathcal{X}, \mathcal{X}^o, t)/\partial\eta\,\big|_{\eta=0} , \tag{4.7}$$

$$\delta^2 E = \partial^2 E(\mathcal{X}^o + \eta\,\delta\mathcal{X}, \mathcal{X}^o, t)/\partial\eta^2\,\big|_{\eta=0} . \tag{4.8}$$

На основании (4.4) можно заключить, что для напряжений в возмущенном состоянии имеет место представление

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^o + \eta\,\delta\mathcal{P} . \tag{4.9}$$

Поверхностную нагрузку для определенности считаем "мертвой"

$$\overset{\circ}{T}(\mathcal{X},t) = \overset{\circ}{T}(\mathcal{X}^o,t) . \tag{4.10}$$

Нетрудно получить, что первая вариация

$$\delta E(\mathcal{X},\mathcal{X}^o,t) = 0 . \tag{4.11}$$

Действительно ,

$$\frac{\partial E}{\partial\eta} = \frac{\partial E}{\partial(\eta\delta\mathcal{X})} \cdot \delta\mathcal{X}\,\big|_{\eta=0} = \int\limits_{\overset{\circ}{V}} \mathcal{P}^o : \overset{\circ}{\nabla}(\delta\mathcal{X})^T\, d\overset{\circ}{V} - \int\limits_{\overset{\circ}{S}_T} T^o \cdot \delta\mathcal{X}\, d\overset{\circ}{S} = 0 \tag{4.12}$$

с учетом $\delta\mathcal{X}=0$ на $\overset{\circ}{S}_u$ и уравнений типа (4.2), (4.3) для характеристик невозмущенного напряженного состояния $\mathcal{P}^o$. Иными словами, (4.12) имеет место в силу уравнений краевой задачи.

Условие положительной определенности функционала $\rho(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)$ или $E(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)$ на устойчивой стадии процесса деформирования условие устойчивости (2.14) имеет вид

$$\delta^2 E\ (\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t) > 0 \tag{4.13}$$

и в рассматриваемом случае

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \int_{0}^{\delta\mathcal{X}} \delta P : \overset{\circ}{\nabla} d(\delta\mathcal{X})^{T} d\overset{\circ}{V} > 0\ . \tag{4.14}$$

Такое же условие устойчивости из энергетических соображений сформулировано Р.Хиллом [3] при отсутствии смещений на части границы $\overset{\circ}{S}_u$ и мертвой поверхностной нагрузке на $\overset{\circ}{S}_T$. Бифуркации процесса упругопластического деформирования соответствует равенство нулю левой части (4.14).

Подчеркнем, что условие (4.14), названное Р.Хиллом [3] достаточным условием отсутствия бифуркации, здесь получено в предположении равноактивной бифуркации. В этой связи отметим работу [12], в которой на основе бифуркационного критерия Р.Хилла и дифференциально-нелинейного варианта теории пластичности, развиваемого авторами работы [12], получено, что бифуркация процесса деформирования первого порядка реализуется на путях полного догружения.

Заметим также, что в общем случае в задачах устойчивости $\delta\overset{\circ}{T} \neq \mathbf{0}$. Так будет, в частности, при следящей поверхностной нагрузке постоянной интенсивности. Условие типа (4.14) в этом случае будет иметь вид

$$\int_{\overset{\circ}{V}} \int_{0}^{\delta\mathcal{X}} \delta P : \overset{\circ}{\nabla} d(\delta\mathcal{X})^{T} d\overset{\circ}{V} - \int_{\overset{\circ}{V}} \int_{0}^{\delta\mathcal{X}} \delta\overset{\circ}{T} \cdot d(\delta\mathcal{X}) d\overset{\circ}{S} > 0\ . \tag{4.15}$$

В заключение с позиций энергетического критерия устойчивости рассмотрим известную модель локализации пластической деформации [9]. Указанная модель позволяет определить, возможна ли бифуркация внутри локализованной полосы. Используя кинематическое представление, лежащее в основе этой модели, и условие равноактивной бифуркации из бифуркационного критерия, получим условие начала локализации [9]. Рассматривается однородное и однородно деформируемое тело, подверженное квазистатическому нагружению. В этом теле внутри локализованной полосы $\overset{\circ}{V}_h$ (рис.3), заданной вектором нормали **N** в отсчетном сотоянии, поле скоростей непрерывно, а градиент вектора скорос и имеет вид [9]

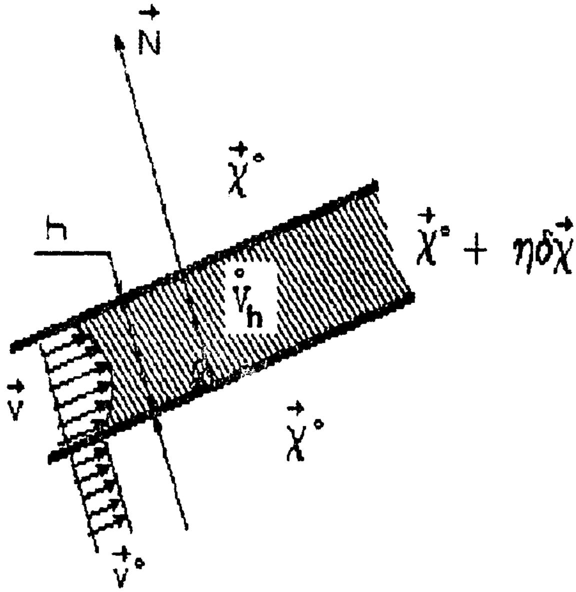

Рис. 3.

$$\overset{\circ}{\nabla}V = \overset{\circ}{\nabla}V^{0} + Ng , \qquad (4.16)$$

где g - некоторая вектор-функция координаты ξ вдоль вектора N $(\xi = N \cdot R_o)$

$$g \neq 0 , \qquad R_o \in \overset{\circ}{V}_h . \qquad (4.17)$$

Придавая параметру η смысл времени и сравнивая разложения *(4.5)* и *(4.16)*, можно положить

$$\nabla\, \delta\chi = Ng . \qquad (4.18)$$

Далее, считаем, что имеет место равноактивная бифуркация *(4.4)*. Тогда с учетом разложения *(4.9)* и *(4.16)* критерий бифуркации примет вид

$$\int_{\overset{\circ}{V}_h} \left\{ \int_{0}^{\delta\chi} (C : \overset{\circ}{\nabla}\, \delta\chi) : d(\overset{\circ}{\nabla}\delta\chi^{T}) \right\} d\overset{\circ}{V}_h = 0 . \qquad (4.19)$$

Здесь $\overset{\circ}{V}_h$ - обозначает объем полосы локализации деформаций. Заметим, что для $R_o \in V \setminus \overset{\circ}{V}_h$ имеем $\mathcal{X} \equiv \mathcal{X}^o$ и $E(\mathcal{X},\mathcal{X}^\circ,t)=0$. Предполагая симметрию тензора C относительно перестановки первой и второй пар индексов ($C_{ijkl}=C_{lkji}$), можно, проинтегрировав внутренний интеграл в (4.19), используя (4.18), получить

$$\int_{\overset{\circ}{V}_h} g\cdot\Big[\ N\cdot C\cdot N\ \Big]\cdot g\ d\overset{\circ}{V}_h=0\ . \tag{4.20}$$

Откуда, с учетом симметрии C и (4.17), следует условие начала локализации [9]:

$$det\Big(\Big[\ N\cdot C\cdot N\ \Big]_{jk}\Big) = 0\ ,\qquad R_o \in \overset{\circ}{V}_h\ . \tag{4.21}$$

Проделав обратные рассуждения, можно, по примеру [9], получить, что локализация пластической деформации является предельным типом бифуркации в том смысле, что условие (4.21) в однородной полосе всегда влечет бифуркацию [9].

5. Заключение

Энергетический критерий устойчивости упругопластических процессов в настоящей работе получен на основе определения устойчивости по Ляпунову, обобщенного на системы с распределенными параметрами. Это отличает указанный критерий от известных, которые в большей мере постулированы. Некоторые обоснования критерию дает аналог теоремы Ляпунова об устойчивости, обобщенной на системы с бесконечным числом степеней свободы. Отсутствие обоснования с общих термодинамических позиций дает основание рассматривать этот критерий как гипотезу. Выше было показано, что из сформулированного критерия устойчивости следует энергетический критерий устойчивости для консервативных систем и бифуркационный - для упругопластических. Тем не менее, мы не претендуем на его универсальность хотя бы потому, что представленная модель пока не охватывает некоторые существенные стороны упругопластического выпучивания. К примеру, известно, что потере устойчивости в геометрическом представлении процесса упругопластического деформирования соответствует излом траектории деформации. Последнее связано, возможно, с резким изменением упругопластических характеристик и требует отказаться от гипотезы равноактивной бифуркации. В этом случае изменение в возмущенном и невозмущенном процессах тензора $C-C^o$ будет конечной величиной даже при малых возмущениях, что затрудняет применение используемой выше методики. Связанные с этим вопросы, в также проблема послебифуркационного поведения и многие другие задачи не затронуты в настоящей публикации и требуют дальнейшего исследования.

Автор благодарит профессора П.В.Трусова, под руководством которого была выполнена работа, за доброжелательную критику и поддержку.

Литература

1. Клюшников В.Д. Устойчивость упругопластических систем. М.: Наука, 1980. 240 с.

2. Ильюшин А.А. Общая характеристика проблемы неупругой устойчивости в механике деформируемого твердого тела // Устойчивость в механике деформируемого твердого тела: Материалы Всесоюзн. симп. Калинин: КГУ, 1981. С. 4-11.

3. Хилл Р. Общая теория единственности и устойчивости для упругопластических тел // Механика: Сборник переводов. М.: Мир, 1958. №6 (52). С. 81-96.

4. Друккер Д. О постулате устойчивости материала в механике сплошной среды // Механика: Сборник переводов. М.: Мир, 1964. №3 (85). С. 115-128.

5. *Petryk H. On the onset of instability in elasto-plastic solids // Plasticity Today: Modelling, Meth. and Appl. London - New York,* 1985. P. 429-447.

6. Ларьков А.М. Об условиях устойчивости в механике разрушения // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, №1. С. 45-48.

7. Мовчан А.А. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем // Прикладная математика и механика. 1959. Т. 23, вып. 3. С. 483-493.

8. Койтер В.Т. Термодинамика упругой устойчивости // Механика. Сборник переводов. М.: Мир, 1971. №6 (130). С. 102-111.

9. Райс Дж. Р. Локализация пластической деформации // Теоретическая и прикладная механика / Труды XIV Международного конгресса IUTAM. М.: Мир, 1979. С. 439-471.

10. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. М.: Наука, 1986.232 с.

11. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, ошибки и парадоксы. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1979. 384 с.

12. Черняков Ю.А., Швайко Н.Ю. Бифуркация процесса деформирования и критерий единственности решения краевой задачи теории пластичности в скоростях // Докл. АН УССР. Сер. А. Физико-математ. и технич. науки. 1981. №1. С. 54-58.

Пермский политехнический институт