

УДК 539.3 + 620.1

С.А. Чернопазов, В.С. Печенов

ВЛИЯНИЕ СОТОВОГО НАПОЛНИТЕЛЯ НА РАЗМЕРНУЮ СТАБИЛЬНОСТЬ
ТРЕХСЛОЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УГЛЕПЛАСТИКОВЫХ РЕФЛЕКТОРОВ

ABSTRACT

Necessity of consideration the thermal expansion of the light honeycomb middle lay in the three - lays shells under heat load is substantiated. The calculation methods for effective properties of the middle lay are proposed in this paper.

К параболическим рефлекторам, используемым в качестве элементов антенн на космических аппаратах, предъявляются высокие требования по размерной стабильности в процессе эксплуатации. При неравномерном нагреве солнцем и охлаждении в тени среднеквадратичное отклонение (СКО) поверхности рефлектора от идеальной параболической формы не должно превышать заданной величины. Конструктивно рефлектор состоит из двух многослойных обшивок из волокнистого углепластика, скрепленных сотовым наполнителем (СН). При анализе рефлектор предполагается тонкой термоупругой трехслойной ортотропной оболочкой типа Кирхгофа - Лява. Постановки соответствующих задач объемной нестационарной теплопроводности и термоупругости приведены в [1]. Обычно при расчетах таких конструкций на силовое нагружение жесткостью СН пренебрегают ввиду ее малости. В случае же температурного нагружения влияние наполнителя для размеростабильных конструкций может быть существенным из-за большего, чем у силовых обшивок, коэффициента линейного температурного расширения (КЛТР).

Влияние температурного расширения СН определим из решения следующей задачи. Трехслойный пакет, занимающий область Ω (рис.1) с границей S , находится при температуре T_0 . Полагаем, что температура в области Ω изменяется на величину θ . Считая границу S свободной от нагрузок, найдем изменение линейных размеров пакета в направлении координатных осей x, y . Полагаем материал обшивок ортотропным, СН - изотропным. Главные направления тензора свойств материала обшивок и направления выкладки СН совпадают с координатными осями x, y . При деформировании стенки сот не теряют устойчивость. В области Ω выполняется гипотеза плоских сечений. В обшивках реализуется плосконапряженное состояние ($\sigma_z = 0$), в стенках сот - одноосное. Тензор упругих деформаций $\tilde{\epsilon}$ есть разность полных $\tilde{\epsilon}$ и температурных деформаций $\tilde{\epsilon}^T$:

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon} - \tilde{\epsilon}^T. \quad (1)$$

С учетом принятых предположений определяющие соотношения для материала обшивок имеют вид [2]:

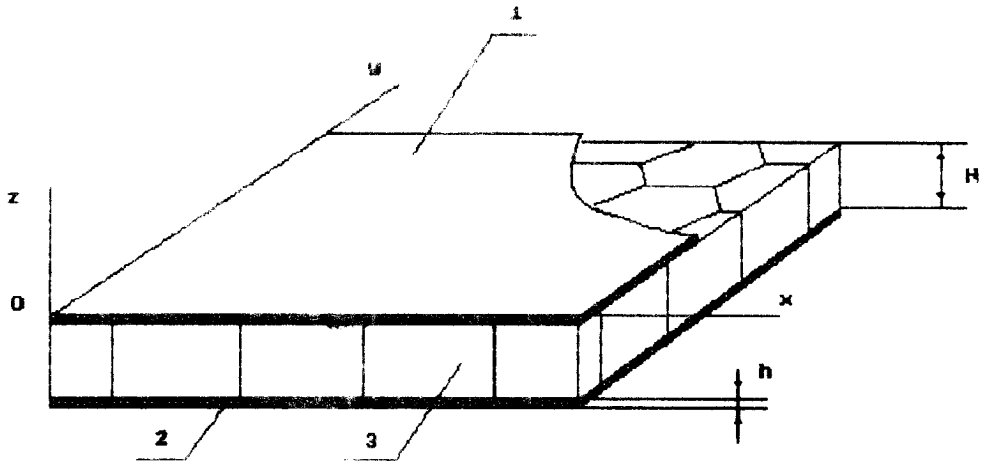


Рис. 1. Схема трехслойного пакета.
1,2 - силовые обшивки толщиной h ,
3 - сотовый наполнитель толщиной H .

$$\sigma_x(\bar{u}) = \bar{E}_y (e_x(\bar{u}) - e_x^T + \mu_x (e_y(\bar{u}) - e_y^T)), \quad (x \leftrightarrow y), \quad (2)$$

где $e_x^T = \alpha_x \theta$, $\bar{E}_x = E_x / (1 - \mu_x \mu_y)$;

$$e_x(\bar{u}) = \partial u_x / \partial x, \quad (x \leftrightarrow y);$$

\bar{u} - вектор перемещений;

$\alpha_x(\alpha_y)$, $E_x(E_y)$ - КЛТР, модуль Юнга по оси $x(y)$;

$\mu_x(\mu_y)$ - коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении оси $y(x)$ при растяжении в направлении оси $x(y)$.

Из симметрии упругих свойств справедливо соотношение :

$$\mu_x E_x = \mu_y E_y.$$

Из гипотезы плоских сечений и симметрии напряженно-деформированного состояния (НДС) следует, что сдвиговые деформации ϵ_{xy} и соответствующие им напряжения равны нулю.

Для материала СН (рис. 2) :

$$\sigma = E_c (e - \alpha_c \theta), \quad (3)$$

Вариационная постановка краевой задачи для области Ω без учета объемных сил имеет вид [3]: найти $\bar{u} \in U_{\text{доп}}$, что

$$\int_{\Omega} \tilde{\sigma}(\bar{u}) \cdot \tilde{\varepsilon}(\bar{v}) \, d\Omega = 0, \quad \forall \bar{v} \in U_{\text{доп}}, \quad (4)$$

где $U_{\text{доп}}$ - кинематически допустимое множество перемещений,
 $\tilde{\varepsilon}$ - тензор деформаций.

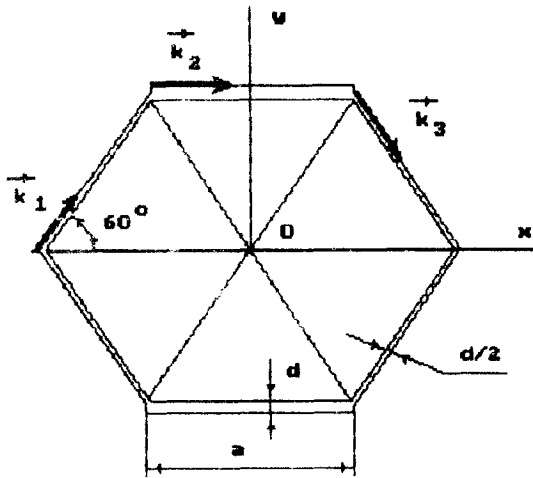


Рис. 2. Ячейка сотового наполнителя.
 a - размер ячейки, d - толщина ленты

Для нахождения двух искомых эффективных КЛТР пакета $\langle \alpha_x \rangle$, $\langle \alpha_y \rangle$, соответствующих случаю однородного температурного поля, выберем последовательно две пробные функции $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in U_{\text{доп}}$, которые, после подстановки их в (4), дадут два линейно независимых уравнения относительно искомых величин. В качестве первой пробной функции выбираем такую, чтобы $\tilde{\varepsilon}_1(\bar{v}) = \bar{ii}$, второй - чтобы $\tilde{\varepsilon}_2(\bar{v}) = \bar{jj}$, где \bar{i}, \bar{j} - единичные орты для осей x, y , \bar{ii}, \bar{jj} - диадные произведения векторов. Из гипотезы плоских сечений следует соотношение между полной деформацией стенки соты e и полными деформациями обшивок $\tilde{\varepsilon}$:

$$e = \bar{k} \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \bar{k} = \bar{k} \cdot (e_x \bar{ii} + e_y \bar{jj}) \cdot \bar{k}, \quad (5)$$

где \bar{k} - единичный вектор, характеризующий положение стенки соты (векторы $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$ указаны на рис. 2).

После подстановки пробных функций \bar{v}_1 и \bar{v}_2 в (4) с учетом (2), (3), (5) и необходимых преобразований приходим к системе двух уравнений относительно компонент полных деформаций пакета e_x, e_y :

$$\begin{aligned} A_{11} e_x + A_{12} e_y &= \theta B_1, \\ A_{12} e_x + A_{22} e_y &= \theta B_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $A_{11} = a_{11} + c_{11}$, $A_{22} = a_{22} + c_{22}$;

$$A_{12} = \mu_x a_{11} + 3 c_{11} / 17;$$

$$B_1 = a_{11} (\alpha_x + \alpha_y \mu_x) + 20 c_{11} \alpha_c / 17;$$

$$B_2 = a_{22} (\alpha_y + \alpha_x \mu_y) + 4 c_{22} \alpha_c / 3; \quad (7)$$

$$a_{11} = 8 \bar{E}_x h (3\sqrt{3} a + 2d), \quad a_{22} = 8 \bar{E}_y h (3\sqrt{3} a + 2d);$$

$$c_{11} = 17 E_c H d, \quad c_{22} = 9 E_c H d.$$

Решение системы (6) имеет вид :

$$e_x = \theta (B_1 A_{22} - B_2 A_{12}) / \Delta, \quad (8)$$

$$e_y = \theta (B_2 A_{11} - B_1 A_{12}) / \Delta,$$

$$\text{где } \Delta = A_{11} A_{22} - A_{12}^2.$$

Эффективные КЛТР пакета $\langle \alpha_x \rangle$, $\langle \alpha_y \rangle$ определяются из соотношений :

$$\langle \alpha_x \rangle = e_x / \theta, \quad \langle \alpha_y \rangle = e_y / \theta. \quad (9)$$

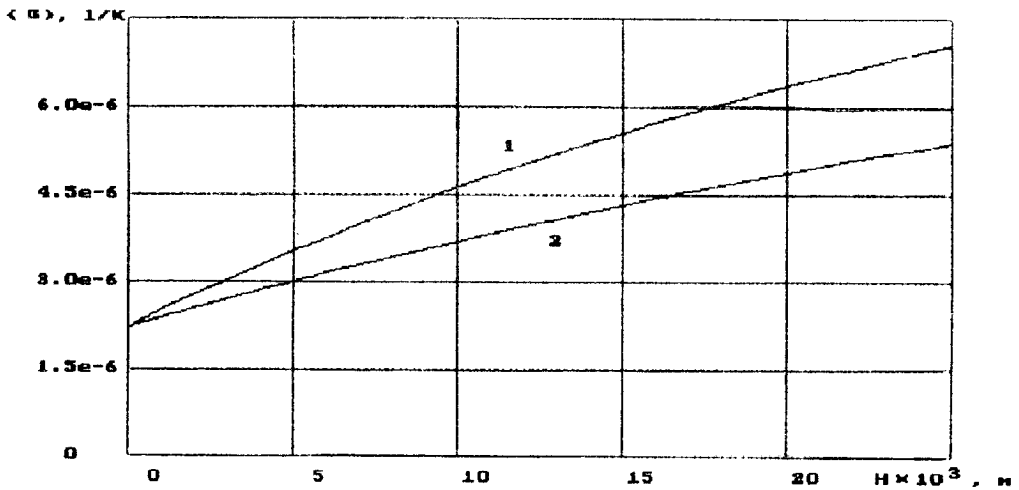


Рис. 3. Эффективные КЛТР трехслойного пакета.

1 - $\langle \alpha_x \rangle$, 2 - $\langle \alpha_y \rangle$.

Эти величины количественно характеризуют влияние СН при однородном нагреве. При нулевой толщине обшивок ($h = 0$) эффективные КЛТР пакета $\langle \alpha_x \rangle$, $\langle \alpha_y \rangle$, как и следовало ожидать, равны КЛТР материала СН α_c . На рис. 3 приведена зависимость $\langle \alpha_x \rangle$, $\langle \alpha_y \rangle$ от толщины СН H для пакета с четырехслойными обшивками из углепластика КМУ-4Л с выкладкой 0-90-90-0 и толщиной $h = 6 \cdot 10^{-4}$ м.

Эффективные характеристики обшивок $E_x = E_y = 72.64$ ГПа, $\mu_x = \mu_y = 0.01743$, $\alpha_x = \alpha_y = 2.23 \cdot 10^{-6}$ 1/К. В качестве наполнителя использованы алюминиевые соты с параметрами $a = 3 \cdot 10^{-3}$ м, $d = 5 \cdot 10^{-5}$ м, $E_c = 108.25$ ГПа, $\alpha_c = 1.67 \cdot 10^{-5}$ 1/К. Как видно из приведенных графиков, действительно, за счет больших КЛТР наполнителя эффективный КЛТР пакета может в 2..3 раза превышать КЛТР обшивок.

Для практических расчетов в случае неоднородных температурных полей найдем эффективные механические характеристики СН. Симметрия выкладки его относительно осей x, y позволяет записать определяющие соотношения в виде, совпадающем с (2):

$$\langle \sigma_x(\bar{u}) \rangle = \langle \bar{E}_x \rangle (e_x(\bar{u}) - e_x^T + \langle \mu_x \rangle (e_y(\bar{u}) - e_y^T)), \quad (x \neq y). \quad (10)$$

При изменении температуры в области Ω на величину θ в любых сечениях, параллельных плоскостям Oxz, Oyz , выполняются уравнения равновесия:

$$\int_S \sigma_x(\bar{u}) \, dS = \int_S \sigma_y(\bar{u}) \, dS = 0,$$

из которых с учетом соотношений (2), (10) получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \langle \bar{E}_x \rangle (e_x - \alpha_c \theta + \langle \mu_x \rangle (e_y - \alpha_c \theta)) H + \\ \bar{E}_x (e_x - \alpha_x \theta + \mu_x (e_y - \alpha_y \theta)) 2h = 0, \quad (x \neq y), \quad (11) \end{aligned}$$

где полные деформации e_x, e_y определены соотношениями (8). Недостающие два уравнения для нахождения четырех неизвестных $\langle \bar{E}_x \rangle, \langle \bar{E}_y \rangle, \langle \mu_x \rangle, \langle \mu_y \rangle$ получим, рассмотрев НДС области Ω при изменении температуры на величину θ последовательно при двух условиях: сначала потребовав $e_x(\bar{u}) = 0$, затем $e_y(\bar{u}) = 0$. Для первого случая пробную функцию выбираем такую, чтобы $\tilde{\epsilon}(\bar{v}) = \bar{i}i$, для второго - чтобы $\tilde{\epsilon}(\bar{v}_2) = \bar{j}j$. После подстановки пробных функций \bar{v}_1 и \bar{v}_2 в (4) с учетом определяющих соотношений (2), (10) и необходимых преобразований получаем систему четырех уравнений:

$$\begin{aligned} \langle \bar{E}_x \rangle (a_{11} + a_{12} \langle \mu_x \rangle) &= c_1; \\ \langle \bar{E}_y \rangle (a_{21} + a_{22} \langle \mu_y \rangle) &= c_2; \\ \langle \bar{E}_x \rangle (a_{31} + a_{32} \langle \mu_x \rangle) &= c_3; \\ \langle \bar{E}_y \rangle (a_{41} + a_{42} \langle \mu_y \rangle) &= c_4, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
\text{где } a_{11} &= (B_1 / A_{11} - \alpha_c) H, \quad a_{12} = -\alpha_c H; \\
c_1 &= -E_x (B_1 / A_{11} - (\alpha_x + \mu_x \alpha_y)) 2 h; \\
a_{21} &= (B_2 / A_{22} - \alpha_c) H, \quad a_{22} = -\alpha_c H; \\
c_2 &= -E_y (B_2 / A_{22} - (\alpha_y + \mu_y \alpha_x)) 2 h; \\
a_{31} &= (\langle \alpha_x \rangle - \alpha_c) H, \quad a_{32} = (\langle \alpha_y \rangle - \alpha_c) H; \\
c_3 &= -E_x (\langle \alpha_x \rangle - \alpha_x + \mu_x (\langle \alpha_y \rangle - \alpha_y)) 2 h; \\
a_{41} &= (\langle \alpha_y \rangle - \alpha_c) H, \quad a_{42} = (\langle \alpha_x \rangle - \alpha_c) H; \\
c_4 &= -E_y (\langle \alpha_y \rangle - \alpha_y + \mu_y (\langle \alpha_x \rangle - \alpha_x)) 2 h; \\
\langle \alpha_x \rangle, \langle \alpha_y \rangle &\text{ определяются соотношениями (9);} \\
A_{11}, A_{22}, B_1, B_2 &\text{ - соотношениями (7).}
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (12) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\langle \bar{E}_x \rangle &= (c_1 a_{32} - c_3 a_{12}) / (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}); \\
\langle \bar{E}_y \rangle &= (c_2 a_{42} - c_4 a_{22}) / (a_{21} a_{42} - a_{22} a_{41}); \quad (13) \\
\langle \mu_x \rangle &= (c_1 / \langle \bar{E}_x \rangle - a_{11}) / a_{12}; \\
\langle \mu_y \rangle &= (c_2 / \langle \bar{E}_y \rangle - a_{21}) / a_{22};
\end{aligned}$$

Эффективные модули Юнга СН определяются из соотношений:

$$\langle E_x \rangle = \langle \bar{E}_x \rangle (1 - \langle \mu_x \rangle \langle \mu_y \rangle), \quad (x \leftrightarrow y). \quad (14)$$

Искомые величины, определенные выражениями (13), не должны зависеть от характеристик материала обшивок E_x , E_y , μ_x , μ_y , α_x , α_y , толщин h и H , КЛТР материала СН α_c . Следовательно, соотношения (13) могут быть упрощены, однако непосредственные их преобразования требуют громоздких вычислений. Для упрощения соотношений (13) проанализируем структуру коэффициентов A_{11} , A_{22} , B_1 , B_2 (7). Коэффициент A_{11} есть сумма двух слагаемых: a_{11} и c_{11} , причем коэффициент a_{11} характеризует вклад от обшивок, коэффициент c_{11} - от СН. Примем во внимание, что вид определяющих соотношений для СН (10) совпадает с видом определяющих соотношений для обшивок (2). В этом случае коэффициент c_{11} для СН есть аналог коэффициента a_{11} для обшивок. Рассуждая аналогично, можно заключить, что в выражении для коэффициента B_1 второе слагаемое есть аналог первого. С учетом изотропии КЛТР материала СН эти аналогии позволяют записать:

$$c_{11} (1 + \langle \mu_x \rangle) \alpha_c = 20 c_{11} \alpha_c / 17,$$

откуда находим, что $\langle \mu_x \rangle = 3/17$. Преобразовав выражение для коэффициента a_{11} , получим :

$$\bar{E}_x = a_{11} / (2 h 4 (3 \sqrt{3} a + 2 d)).$$

Использование отмеченной аналогии между коэффициентами c_{11} и a_{11} позволяет записать :

$$\begin{aligned} \langle \bar{E}_x \rangle &= c_{11} / (H 4 (3 \sqrt{3} a + 2 d)) = \\ &= 17 E_c d / (4 (3 \sqrt{3} a + 2 d)). \end{aligned}$$

Рассуждая аналогично, из анализа коэффициентов A_{22} , B_2 находим, что $\langle \mu_y \rangle = 1/3$, $\langle E_x \rangle = 9 E_c d / (4 (3 \sqrt{3} a + 2 d))$. С учетом соотношений (14) окончательные выражения для эффективных упругих свойств СН имеют вид :

$$\begin{aligned} \langle E_x \rangle &= 4 E_c d / (3 \sqrt{3} a + 2 d); \\ \langle E_y \rangle &= 36 E_c d / (17 (3 \sqrt{3} a + 2 d)); \\ \langle \mu_x \rangle &= 3/17, \quad \langle \mu_y \rangle = 1/3. \end{aligned} \quad (15)$$

Чтобы убедиться, что (15) действительно есть решение системы (12), достаточно подставить (15) в (12), что приводит к тождествам.

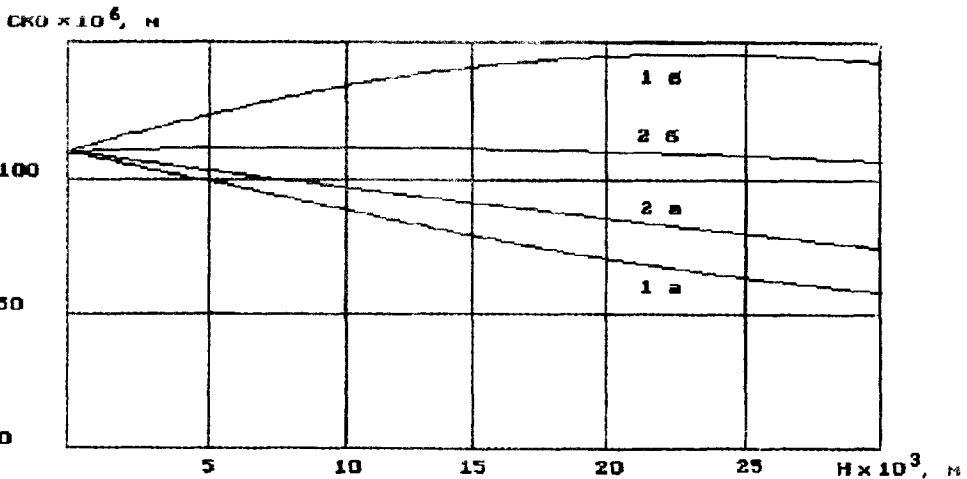


Рис. 4. Влияние термического расширения сотового наполнителя на размерную стабильность рефлектора.

а - без учета, б - с учетом расширения наполнителя.

Алюминиевые соты $d=5 \times 10^{-5}$ м, 1 - $a=3 \times 10^{-9}$ м, 2 - $a=1,2 \times 10^{-2}$ м.

Для рассмотренного ранее примера эффективные модули Юнга СН составляют $\langle E_x \rangle = 1,4$ ГПа, $\langle E_y \rangle = 0,7$ ГПа, что на два порядка меньше модуля упругости обшивок. Существенное влияние на поведение конструкции наполнитель со столь низкими жесткостными характеристиками обеспечивает, во-первых, за счет больших, чем у обшивок, КЛТР, и, во-вторых, за счет значительно большей толщины по отношению к толщине обшивок. В реальных СН толщина ленты d много меньше размера ячейки a . Анализ соотношений (15) с учетом приведенного замечания позволяет заключить, что эффективные модули Юнга СН $\langle E_x \rangle$, $\langle E_y \rangle$ практически линейно возрастают с увеличением толщины ленты d и быстро убывают с увеличением размера ячейки a .

Эффективные механические характеристики наполнителя позволяют при расчетах реальных конструкций рассматривать его как однородный ортотропный материал с КЛТР, равным КЛТР материала СН.

Такой подход был использован при оценке размерной стабильности параболических рефлекторов. На рис. 4 приведены результаты расчетов для рефлектора диаметром 0,9 м с характеристиками, указанными ранее в примерах. Рассмотрен случай наиболее неблагоприятного, дающего наибольшее СКО, нагрева рефлектора солнцем под углом 75° к оси рефлектора. Как следует из приведенных графиков, расчеты без учета влияния наполнителя приводят к существенным погрешностям. Эти погрешности возрастают с увеличением толщины сот и их "массивности" (увеличением d , уменьшением a).

Выводы

Уточненные расчеты формоизменения трехслойных размеростабильных оболочечных конструкций при температурном нагружении требуют учета температурного расширения сотового наполнителя. Необходимые для этого эффективные характеристики наполнителя могут быть найдены по предложенной в данной работе методике и расчетным формулам.

Литература

1. Печенов В.С., Чернопазов С.А., Шульгин П.В. Оценка размерной стабильности осесимметричных оболочек из композитных материалов при температурных воздействиях // Краевые задачи: Межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 1990. С. 172-175.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
3. Дюво Ж., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1986. 383 с.

Пермский политехнический институт