

УДК 539.3

А.Б. Ефимов, О.В. Аксененко, А.В. Цвелюх

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
 ДЛЯ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПОМОЩЬЮ
 ГИБРИДНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

ABSTRACT

Quadrilateral element by T.N.H.Pian and Hellinger-Reissner variational principle are used to design algorithm and software for solving axisymmetric problems of incompressible solid states. All the necessary matrices were derived and a computer program is described. The problem of stresses and rigidity analysis of the spherical damper is solved. It is shown that numerical solution is close to the exact one. The error of numerical result is about 8 %.

Широко распространенный метод конечных элементов в форме метода перемещений [1] неприменим для прочностного анализа деталей из несжимаемых материалов (коэффициент Пуассона равен 0.5). Причина заключается в том, что невозможно использовать закон Гука в виде:

$$\sigma = [D]\varepsilon \quad (1)$$

из-за неограниченного роста элементов матрицы [D] при стремлении коэффициента Пуассона к 0.5. Альтернативным подходом является использование гибридного метода конечных элементов (ГМКЭ) [3], позволяющего избежать указанной неприятности. В данной работе предлагается версия ГМКЭ, дающая возможность решать осесимметричную задачу теории упругости без ограничения на величину коэффициента Пуассона. Подход основан на применении четырехугольного изопараметрического элемента, в пределах которого поля напряжений и перемещений аппроксимируются независимо друг от друга. Преимуществом данного подхода является также и возможность задания узлов конечно элементной модели непосредственно на оси симметрии, что невозможно для обычного метода конечных элементов в форме перемещений из-за возникновения неинтегрируемой особенности при вычислении матрицы жесткости [1].

Применим для решения указанной задачи функционал Рейсснера. Для одного конечного элемента (при условии согласованности поля перемещений u_q на границах с соседними элементами) функционал имеет вид:

$$\Pi_R = \int_{V_0} \left(-\frac{1}{2} \sigma^T [S] \sigma + \sigma^T [L] u_q \right) dV_0, \quad (2)$$

где $[L]$ - дифференциально-алгебраическая матрица, задающая геометрические соотношения: $\varepsilon = [L] u_q$,

$[S]$ - матрица в законе Гука $\varepsilon = [S] \sigma$.

Для осесимметричной задачи интегрирование по объему можно заменить интегрированием по площади:

$$\Pi_R = 2\pi \int_{A_0} \left(-\frac{1}{2} \sigma^T [S] \sigma + \sigma^T [L] u_q \right) dA_0. \quad (3)$$

(используем обычную цилиндрическую систему координат). Тогда векторы и матрицы в Π_R имеют следующий вид:

$$\sigma = [\sigma_R \ \sigma_Z \ \tau_{RZ} \ \sigma_\theta]^T; \quad \varepsilon = [\varepsilon_R \ \varepsilon_Z \ \gamma_{RZ} \ \varepsilon_\theta]^T; \quad u_q = [u_q \ w_q]^T;$$

$$[S] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad [L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

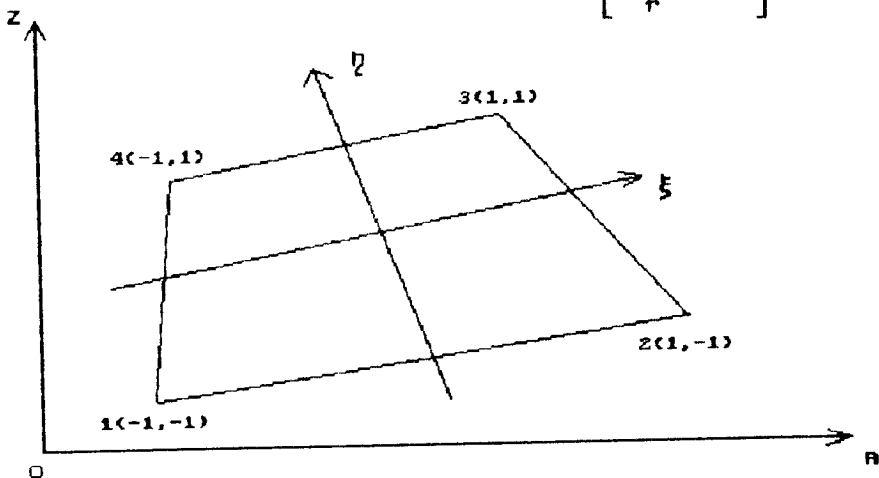


Рис. 1. Конечный элемент.

Для четырехугольных изопараметрических элементов рис.1 согласованное поле перемещений u_q будем аппроксимировать билинейными базисными функциями:

$$\begin{bmatrix} u_q \\ w_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{q1} \\ W_{q1} \\ U_{q2} \\ W_{q2} \\ U_{q3} \\ W_{q3} \\ U_{q4} \\ W_{q4} \end{bmatrix} = [N_q] U_q \quad (5)$$

где u_q - вектор узловых перемещений; $[N_q]$ - матрица согласованных базисных функций, ее компоненты имеют вид:

$$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (6)$$

где i - номер узла. Выберем (согласно [3]) для напряжений аппроксимацию, независимую от u_q :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_R \\ \sigma_Z \\ \tau_{RZ} \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \eta & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_{12} \end{bmatrix} = \beta_c + [\Phi] \beta_h \quad (7)$$

где $\beta_c = [\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4]^T$, $\beta_h = [\beta_5 \beta_6 \beta_7 \dots \beta_{12}]^T$.

В этом выражении β_c - вектор внутренних параметров напряжений, задающих постоянную аппроксимацию на элементе, β_h - вектор параметров, задающих линейную аппроксимацию. Таким образом, поле напряжений внутри одного элемента является полным полиномом первого порядка, следовательно, поле перемещений должно быть полным полиномом второго порядка. Для этого введем дополнительное несогласованное поле перемещений u_λ в виде:

$$\begin{bmatrix} u_\lambda \\ w_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \xi^2 & \frac{1}{3} - \eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - \xi^2 & \frac{1}{3} - \eta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} = [N_\lambda] \lambda, \quad (8)$$

где λ - вектор внутренних параметров перемещений; $[N_\lambda]$ - матрица несогласованных базисных функций.

Очевидно, что на границе элемента полное перемещений $u = u_q + u_\lambda$ совпадает с согласованным полем лишь в нескольких точках. Поэтому в общем случае поле перемещений на границе двух соседних элементов оказывается разрывным, и функционал Рейсснера для одного элемента следует дополнить еще одним слагаемым:

$$\Pi_R = 2\pi \int_{A_0} r \left(-\frac{1}{2} \sigma^T [S] \sigma + \sigma^T [L] (u_q + u_\lambda) \right) dA_0 - 2\pi \int_{\Gamma_0} r T^T u_\lambda d\Gamma_0, \quad (9)$$

где Γ_0 - граница элемента; T - усилия, действующие на границе со стороны соседних элементов.

Вновь введенное слагаемое имеет простой физический смысл, поскольку u_λ - не что иное, как невязка в перемещениях, а поле перемещений должно удовлетворять условию непрерывности на границе между смежными элементами, то для выполнения этого условия невязку в перемещениях необходимо ввести в функционал с множителями Лагранжа, роль которых выполняют T . Выразим T через вектор напряжений:

$$T^T = \sigma^T [n]^T, \quad (10)$$

где $[n]$ - матрица направляющих косинусов нормали участка границы $d\Gamma_0$ к осям OR и OZ . Матрица $[n]^T$ имеет вид:

$$[n]^T = \begin{bmatrix} n_r & 0 \\ 0 & n_z \\ n_z & n_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Представим вектор σ в виде суммы постоянной и линейной компонент:

$$\sigma = \sigma_c + \sigma_h \quad (12)$$

где $\sigma_c = \beta_c$, $\sigma_h = [\Phi] \beta_h$. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_R = 2\pi \int r \left(-\frac{1}{2} \sigma^T [S] \sigma + \sigma^T [L] u_q + \sigma^T [L] u_\lambda \right) d\Delta_0 - \\ - 2\pi \int_{\Gamma_0} r \sigma_c^T [n]^T u_\lambda d\Gamma_0 - 2\pi \int_{\Gamma_0} r \sigma_h^T [n]^T u_\lambda d\Gamma_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Последнее слагаемое в (13) преобразуем по формуле Грина:

$$2\pi \int_{\Gamma_0} r \sigma_c^T [n]^T u_\lambda d\Gamma_0 = \int_{\Delta_0} r ([\tilde{L}] \sigma_c)^T u_\lambda d\Delta_0 + \int_{\Delta_0} r \sigma_c^T [\tilde{L}] u_\lambda d\Delta_0. \quad (14)$$

где

$$[\tilde{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным интегрированием нетрудно убедиться, что

$$\int_{\Delta_0} r ([\tilde{L}] \sigma_c)^T u_\lambda d\Delta_0 = 0. \quad (15)$$

Следовательно, интеграл по границе преобразуется в один интеграл по площади, а если заметить, что в (13) третье слагаемое может быть разложено в сумму:

$$\sigma_c^T [L] u_\lambda = \sigma_c^T [L] u_\lambda + \sigma_h^T [L] u_\lambda. \quad (16)$$

то два одинаковых интеграла с разными знаками уничтожатся и мы получим:

$$\begin{aligned}
 \Pi_h = & 2\pi \int_{A_0} \left[r \left(-\frac{1}{2} \sigma^T [S] \sigma + \sigma^T [L] u_\lambda + \sigma_h^T [L] u_\lambda \right) dA_0 - \right. \\
 & \left. - 2\pi \int_{\Gamma_0} r \sigma_h^T [n] u_\lambda d\Gamma_0 \right].
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Необходимым условием стационарности функционала является следующее условие:

$$\int_{\Gamma_0} r \sigma_h^T [n] u_\lambda d\Gamma_0 = \int_{\Gamma_0} r u_\lambda^T [n] \sigma_h d\Gamma_0.
 \tag{18}$$

Данному условию будем удовлетворять априори за счет соответствующего выбора аппроксимации для σ_h . Подставляя в полученное выражение аппроксимации для u_λ и σ_h , получим:

$$\lambda^T \int_{\Gamma_0} r [N_\lambda]^T [n] [\Phi_I; \Phi_{II}] d\Gamma_0 \beta_h = 0$$

или
$$\lambda^T [K] \beta_h = 0,
 \tag{19}$$

где

$$[K] = [M_I; M_{II}] = \int_{\Gamma_0} r [N_\lambda]^T [n] [\Phi_I; \Phi_{II}] d\Gamma_0.$$

Поскольку в общем случае $\lambda \neq 0$, то $[M] \beta_h = 0$. Тогда

$$[M_I; M_{II}] \begin{bmatrix} \beta_I \\ \beta_{II} \end{bmatrix} = 0,
 \tag{20}$$

где $\beta_I = [\beta_5 \beta_6 \beta_7 \beta_8]^T$, $\beta_{II} = [\beta_9 \beta_{10} \beta_{11} \beta_{12}]^T$.

Преобразуя последнее выражение, получим:

$$\beta_{II} = -[M_{II}]^{-1} [M_I] \beta_I,
 \tag{21}$$

если только $\det[M_{II}] \neq 0$. Тогда, обозначив σ^* вектор напряжений в случае, если он аппроксимируется не двенадцатью, а восемью параметрами напряжений β^* , получим:

$$\sigma^* = \sigma_c^* + \sigma_h^* = \beta_c + [\Phi_h^*] \beta_I = [I; \Phi_h^*] \begin{bmatrix} \beta_c \\ \beta_I \end{bmatrix} = [\Phi^*] \beta^* . \quad (22)$$

где $[I]$ - единичная матрица; $[\Phi_h^*] = [\Phi_I] - [\Phi_{II}] [M_{II}]^{-1} [M_I]$.

С учетом замены σ на σ^* функционал Рейсснера примет вид:

$$\Pi_R = 2\pi \int_{A_0} r \left(-\frac{1}{2} \sigma^{*T} [S] \sigma^* + \sigma^{*T} [L] u_q + \sigma_h^{*T} [L] u_\lambda \right) dA_0 . \quad (23)$$

Настоящую формулировку можно интерпретировать следующим образом: если введение несогласованных перемещений u_λ рассматривать как способ получения наилучшей аппроксимации для напряжений σ^* на элементе, то тогда можно сказать, что может быть использовано вместе с только лишь согласованными перемещениями u_q . В таком случае имеем следующий функционал:

$$\Pi_R^* = 2\pi \int_{A_0} r \left(-\frac{1}{2} \sigma^{*T} [S] \sigma^* + \sigma^{*T} [L] u_q \right) dA_0 . \quad (24)$$

(Заметим, что удаленное слагаемое должно иметь более высокий порядок малости по сравнению с другими слагаемыми и тождественно равняться нулю без принятия каких-либо допущений в случае, если конечный элемент представляет собой параллелограм, пара сторон которого параллельна оси OZ . Для элемента, произвольно ориентированного по отношению к глобальным осям координат, этот факт равенства указанного слагаемого нулю подтвердить или опровергнуть не удалось ввиду исключительной сложности аналитических выкладок).

Условия устойчивости Бабушки-Бреззи для элемента, основанного на σ^* и u_q , будут следующими:

$$\dim(\sigma^*) \geq \dim(u_q) - r , \quad (25)$$

где r - число степеней свободы элемента как твердого целого, а $\dim()$ - размерность величины $()$, т.е. число параметров этой величины. В случае осевой симметрии $r=1$, $\dim(\sigma^*) = 8$ и $\dim(u_q) = 8$, т.е. введенный элемент удовлетворяет условию устойчивости.

Для задачи определения осесимметричного напряженно-

деформированного состояния некоторого тела функционал энергии запишется так:

$$\Pi = \sum_i \Pi_{Ri}^* - V, \quad (26)$$

где суммирование производится по всем конечным элементам, а V обозначает потенциал внешней нагрузки:

$$V = 2\pi \int_{\Gamma_P} r p^T u_q d\Gamma_P. \quad (27)$$

Здесь Γ_P часть границы, на которой заданы силовые граничные условия (кинематические граничные условия будут добавлены в качестве дополнительных). Вектор $p^T = [p_r p_z]$ - это распределенная (на единицу боковой поверхности) осесимметричная нагрузка.

Условие стационарности функционала Π имеет вид:

$$\delta\Pi = 0, \quad (28)$$

где варьирование следует провести отдельно по β^* и u_q .

Преобразуем выражение (24), подставив в него аппроксимации для σ^* и u_q . Тогда:

$$\Pi_R^* = \frac{1}{2} \beta^{*T} [h] \beta^* + \beta^{*T} [c] \beta^*, \quad (29)$$

$$\text{где } [h] = 2\pi \int_{A_0} r [\Phi^*]^T [S] [\Phi^*] dA_0;$$

$$[c] = 2\pi \int_{A_0} r [\Phi^*]^T [L] [N_q] dA_0.$$

В локальных координатах (ξ, η) матрицы $[h]$ и $[c]$ примут вид:

$$[h] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r[\Phi^*]^T [S][\Phi^*] |\det J| d\xi d\eta ; \quad (30)$$

$$[c] = 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 r[\Phi^*]^T [L][N_q] |\det J| d\xi d\eta .$$

Здесь: $r = a_4 + a_1 \xi + a_3 \eta + a_2 \xi \eta ; \quad |\det J| = d_2 + d_3 \xi + d_1 \eta . \quad (31)$

где

$$d_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 ; \quad d_2 = a_1 b_3 - a_3 b_1 ; \quad d_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 ;$$

$$\begin{bmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \\ a_4 b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 z_1 \\ r_2 z_2 \\ r_3 z_3 \\ r_4 z_4 \end{bmatrix} .$$

Каждая пара (r_i, z_i) дает координаты соответствующей вершины элемента в глобальной системе координат. Матрица $[\Phi^*] = [I; \Phi_h^*]$ состоит из двух подматриц, каждая размером 4×4 . $[I]$ - единичная подматрица, а $[\Phi_h^*]$ имеет вид:

$$[\Phi_h^*] = \begin{bmatrix} \eta - \tilde{m}_{11} \xi & \eta - \tilde{m}_{11} \xi & \eta - \tilde{m}_{11} \xi & \eta - \tilde{m}_{11} \xi \\ -\tilde{m}_{21} \eta & -\tilde{m}_{21} \eta & -\tilde{m}_{21} \eta & -\tilde{m}_{21} \eta \\ -\tilde{m}_{31} \xi - \tilde{m}_{41} \eta & -\tilde{m}_{31} \xi - \tilde{m}_{41} \eta & -\tilde{m}_{31} \xi - \tilde{m}_{41} \eta & -\tilde{m}_{31} \xi - \tilde{m}_{41} \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \quad (32)$$

Здесь \tilde{m}_{ij} - это элемент матрицы $[M_{II}]^{-1} [M_I]$, где матрица $[M_{II}]$

представлена в таблице 1, а элементы $[M_1]$ таковы:

Таблица 1

$-\frac{8}{3} b_3 a_4 - \frac{16}{45} d_3$ $-\frac{88}{45} b_2 a_1$	0	$\frac{8}{3} a_3 a_4 +$ $+\frac{88}{45} a_1 a_2$	$\frac{16}{9} a_2 a_3$
$\frac{8}{9} b_1 a_2 + \frac{8}{9} b_2 a_1$	0	$-\frac{16}{9} a_1 a_2$	$-\frac{8}{3} a_1 a_4 -$ $-\frac{88}{45} a_2 a_3$
0	$\frac{16}{9} a_2 a_3$	$-\frac{8}{3} b_3 a_4 - \frac{16}{45} d_3$ $-\frac{88}{45} b_2 a_1$	$-\frac{8}{9} b_3 a_2 -$ $-\frac{8}{9} b_2 a_3$
0	$-\frac{8}{3} a_1 a_4 -$ $-\frac{88}{45} a_2 a_3$	$\frac{8}{9} b_1 a_2 + \frac{8}{9} b_2 a_1$	$\frac{8}{3} b_1 a_4 - \frac{16}{45} d_1$ $-\frac{88}{45} b_2 a_3$

$$\begin{aligned}
 m_{11}^I &= -\frac{8}{9} b_3 a_2 - \frac{8}{9} b_2 a_3; & m_{21}^I &= \frac{8}{3} b_1 a_4 - \frac{88}{45} b_2 a_3 - \frac{16}{45} d_1; \\
 m_{32}^I &= \frac{8}{3} a_3 a_4 + \frac{88}{45} a_1 a_2; & m_{42}^I &= -\frac{16}{9} a_1 a_2.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

(Остальные равны нулю). Введем обозначение $[B] = r [L] [N_q]$.
Матрица $[B]$ имеет размерность 4×8 , при этом

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= b_{32} = \frac{r}{4 \det J} [(b_1 - b_3) + (b_3 + b_2) \eta - (b_1 + b_2) \xi]; \\
 b_{13} &= b_{34} = \frac{r}{4 \det J} [(b_1 + b_3) + (b_2 - b_3) \eta + (b_1 + b_2) \xi]; \\
 b_{15} &= b_{36} = \frac{r}{4 \det J} [(b_3 - b_1) + (b_3 - b_2) \eta + (b_2 - b_1) \xi]; \\
 b_{17} &= b_{38} = \frac{r}{4 \det J} [-(b_1 + b_3) - (b_3 + b_2) \eta + (b_1 - b_2) \xi]; \\
 b_{31} &= b_{22} = \frac{r}{4 \det J} [(a_3 - a_1) - (a_2 + a_3) \eta + (a_1 + a_2) \xi]; \\
 b_{33} &= b_{24} = \frac{r}{4 \det J} [-(a_1 + a_3) + (a_3 - a_2) \eta - (a_1 + a_2) \xi]; \\
 b_{35} &= b_{26} = \frac{r}{4 \det J} [(a_1 - a_3) + (a_2 - a_3) \eta + (a_1 - a_2) \xi]; \\
 b_{37} &= b_{28} = \frac{r}{4 \det J} [(a_1 + a_3) + (a_2 + a_3) \eta + (a_2 - a_1) \xi];
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

$$b_{34} = \frac{1}{4} (1-\xi)(1-\eta); \quad b_{65} = \frac{1}{4} (1+\xi)(1-\eta);$$

$$b_{68} = \frac{1}{4} (1+\xi)(1+\eta); \quad b_{47} = \frac{1}{4} (1-\xi)(1+\eta),$$

а остальные элементы матрицы $[B]$ равны нулю. Интегрирование при вычислении матрицы $[c]$ и $[h]$ целесообразно провести по квадратурной формуле Гаусса [1]:

$$\int_{-1}^{-1} \int_{-1}^{-1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_i k_j f(\xi_i, \eta_j), \quad (35)$$

где $\xi_1 = \eta_1 = -\sqrt{3/5}; \quad \xi_2 = \eta_2 = 0; \quad \xi_3 = \eta_3 = \sqrt{3/5};$
 $k_1 = k_3 = 5/9; \quad k_2 = 8/9.$

После варьирования функционала Π отдельно по u_3 и β^* получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) следующего вида:

$$\begin{bmatrix} [H] & [C] \\ [C]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Рассмотрим каждую компоненту СЛАУ в отдельности. $[H]$ представляет собой блочно-диагональную матрицу размерностью $(8*NS)*(8*NS)$ элементов, где NS - общее число конечных элементов. Она имеет вид:

$$[H] = \begin{bmatrix} h_1 & & & 0 \\ & h_2 & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & h_{NS} \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Матрица $[c]^T$ может быть представлена в виде:

$$[c]^T = [c_1^T; c_2^T; \dots; c_{NS}^T], \quad (38)$$

где $[c_i]^T$ получается из $[c_i]$ следующим образом. Если в глобальной нумерации узлов конечно-элементной модели локальные

номера узлов 1,2,3,4 (для конечного элемента с номером i) равны соответственно k,l,m,n , то первая и вторая строки $[c_i]^T$ переносятся в строки $2k-1$ и $2k$ матрицы $[C_i]^T$, третья и четвертая - в строки $2l-1$ и $2l$ и т.д. Таким образом, в $[C_i]^T$ из $2 * NR$ (где NR - общее число узлов в модели) лишь восемь отличны от нулевых; остальные строки - нулевые. Вектор b имеет вид:

$$b^T = [\beta_1^{*T}, \beta_2^{*T}, \dots, \beta_{NS}^{*T}] \quad (39)$$

где $\beta_i^{*T} = [\beta_{1i}^*, \beta_{2i}^*, \dots, \beta_{8i}^*]$, $i=1, \dots, NS$.

Вектор U выглядит так:

$$U = [U_{q1}, W_{q1}, U_{q2}, W_{q2}, \dots, U_{qNR}, W_{qNR}]^T \quad (40)$$

Вычисление вектора F идентично обычному методу конечных элементов в форме метода перемещений [1]. Отметим, что СЛАУ (37) может быть очень плохо обусловлена из-за того, что элементы матриц $[H]$ и $[C]$ имеют разный порядок. Поэтому перед решением системы (37) следует применить масштабирование.

Представленная версия ГМКЭ реализована в виде прикладной программы для ЭВМ IBM PC/AT (транслятор Турбо-Си 2.0). В качестве тестового примера рассмотрим задачу анализа НДС шарового подпятника (рис.2) (решение этой задачи, представленное в [2], является ошибочным). В сферической системе координат уравнения в перемещениях и условие несжимаемости выглядит так [2]:

$$\frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\sin \varphi \frac{\partial (\tilde{w} \tilde{r})}{\partial \tilde{r}} \right] + \frac{\partial S}{\partial \tilde{r}} = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r} \partial \varphi} + \frac{\partial^2 (\tilde{r} \tilde{w})}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0 ; \quad (41)$$

$$\frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial (\tilde{r}^2 \tilde{u})}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r} \sin \varphi} \frac{\partial (\tilde{w} \sin \varphi)}{\partial \varphi} = 0 .$$

где \tilde{u} - переменная вдоль координаты \tilde{r} ; \tilde{w} - переменная вдоль угловой координаты φ ; v - гидростатическое давление.

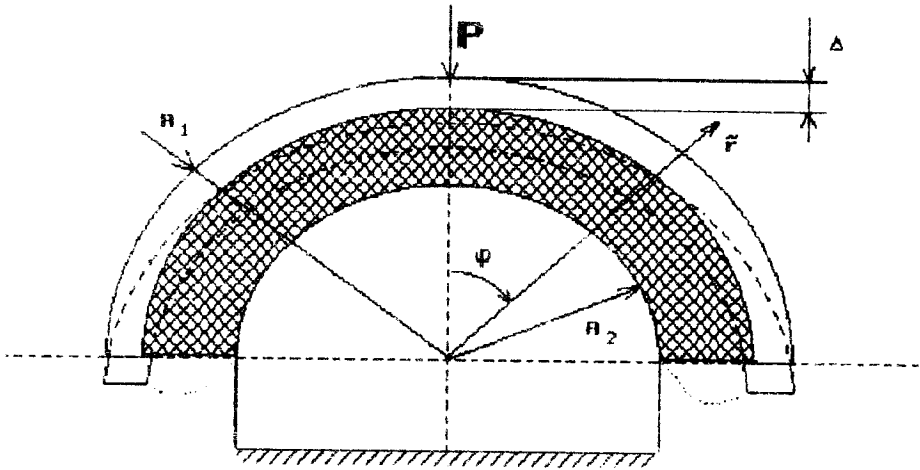


Рис. 2. Расчетная схема.

Кинематические граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(R_2) &= 0; & \tilde{u}(R_1) &= -\Delta \cos \varphi; \\ \tilde{w}(R_2) &= 0; & \tilde{w}(R_1) &= \Delta \sin \varphi. \end{aligned} \quad (42)$$

Аналитическое решение задачи таково:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -\Delta f(\tilde{r}) \cos \varphi; & \tilde{w} &= \frac{\Delta}{2\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r} f(\tilde{r}))}{\partial \tilde{r}} \sin \varphi; \\ \sigma_r &= G\Delta(6C_2 \tilde{r} + 3C_3 \tilde{r}^{-2} + 6C_4 \tilde{r}^{-4}) \cos \varphi; \\ \sigma_\varphi = \sigma_\theta &= G\Delta(12C_2 \tilde{r} - 3C_4 \tilde{r}^{-4}) \cos \varphi; \\ \tau_{r\varphi} &= G\Delta(3C_2 \tilde{r} + 3C_4 \tilde{r}^{-4}) \sin \varphi; \\ S &= \Delta(10C_2 \tilde{r} + C_3 \tilde{r}^{-2}) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (43)$$

где G - модуль сдвига материала;

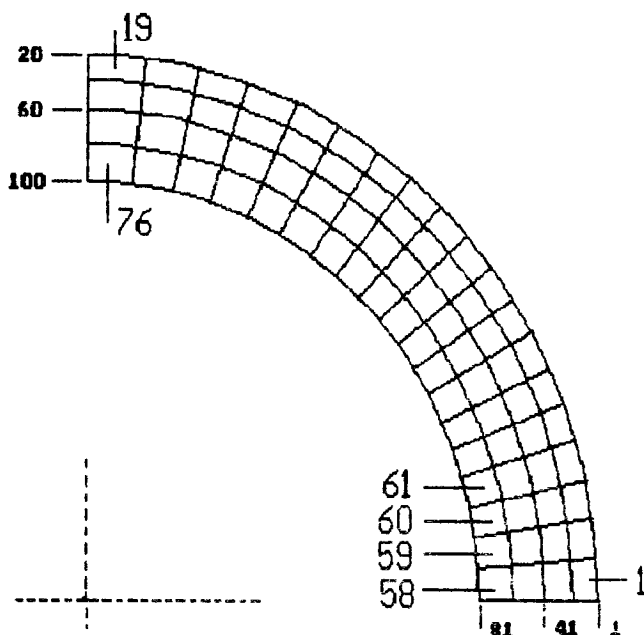


Рис. 3. Конечно-элементная аппроксимация.

$$\begin{aligned}
 C_1 &= (5 - 9\alpha^2 + 4\alpha^{-3})D^{-1} ; & C_2 &= 3(\alpha^2 - 1)R_2^{-2}D^{-1} ; \\
 C_3 &= 6R_1(\alpha^3 - \alpha^{-2})D^{-1} ; & C_4 &= 2R_2^3(\alpha^{-3} - 1)D^{-1} ; \\
 \alpha &= R_2/R_1 ; & D &= 10 - 9(\alpha^{-2} + \alpha^3) + 4(\alpha^3 - \alpha^{-3}) ; \\
 f(\tilde{r}) &= C_1 + C_2 \tilde{r}^2 + C_3 \tilde{r}^{-1} + C_4 \tilde{r}^{-3} .
 \end{aligned} \tag{44}$$

В качестве примера рассмотрим задачу со следующими исходными данными: $G=1$ МПа, $\nu=0.5$, $\Delta=1$ мм, $R_1=100$ мм, $R_2=80$ мм. Конечно-элементная модель (рис.3) содержит 100 узлов и 76 элементов. Результаты таковы: максимальное вертикальное перемещение имеет узел 41; при этом аналитические формулы дают $\tilde{w}=3.89$ мм, а численное решение $\tilde{w}=3.92$ мм. Напряжения вычислялись в центрах конечных элементов, при этом интенсивность напряжений достигает максимума в элементах 58, 59, 60, 61 (табл.2). Как можно видеть, погрешность численного решения не превышает 8% .

Таблица 2

Элемент	σ_i аналитическое, МПа	σ_i численное, МПа
58	0.988	0.999
59	0.981	1.06
60	0.968	1.02
61	0.948	1.01

Литература

1.Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М: Мир, 1975. 544 с.

2.Лавендел Э.Э. Расчет резино-технических изделий. М:Машиностроение, 1976. 232 с.

3.Pian T.H.H.,Wu Chun. *A rational approach for choosing stress terms for hybrid finite element formulations. Int. J. for Num. Meth. in Eng. Vol 26, 1988. P. 2331-2343.*

Московский институт электронного машиностроения