УДК 517.929

А.Ю. КУЛИКОВ
Пермский государственный технический университет

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ И ОЦЕНКИ ЕГО ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

При наличии естественного ограничения на параметры линейного неавтономного уравнения с несколькими запаздываниями установлена связь устойчивости этого уравнения по правой части и по начальной функции с оценками его фундаментального решения.

Пусть
$\mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $\Delta_N = \{(n,m) \in \mathbb{N}_0^2 : n \geq m\}$, $\Delta_R = \{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}$.
Через l_p, $1 \leq p < \infty$, обозначим пространство функций $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^p < \infty$ с нормой $\| f \|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^p \right)^{1/p}$, через l_∞ – пространство ограниченных функций $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ с нормой $\| f \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} |f_n|$. Аналогично, через L_p, $1 \leq p < \infty$, обозначим пространство функций $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, суммируемых со степенью *p*, с нормой $\| g \|_p = \left(\int_0^{\infty} |g(t)|^p \right)^{1/p}$; через L_∞ – пространство ограниченных функций $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ с нормой $\| g \|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |g(t)|$.

Объект исследования и постановка задачи

Рассмотрим разностное уравнение

$$x(n+1) - x(n) + \sum_{k=0}^{N} a_k(n) x(n - h_k(n)) = f(n), \quad n \geq m, \tag{1}$$

где $n, m \in \mathbb{N}_0$, $a_k, f : \mathbb{N}_0 \to R$; $h_k : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$. Функцию x считаем доопределенной при значениях аргумента, меньших m, некоторой вещественной *начальной функцией*.

Решением уравнения (1) будем называть функцию $x_m = x_m(n)$ целочисленного аргумента $n \geq m$, удовлетворяющую равенству (1). Очевидно, что уравнение (1) с заданными начальной функцией и *начальным условием* $x_m(m) = \xi_m(m)$ однозначно разрешимо.

Если при каждом $m \in \mathbb{N}_0$ задать начальную функцию ξ_m, то таким образом будет определено однопараметрическое семейство $\{x_m\}$ решений уравнения (1).

Положим в уравнении (1) $f(n) \equiv 0$ и зададим для каждого значения m начальные функции следующим образом: $\xi_m(i) = 0$, $i < m$; $\xi_m(m) = 1$. Семейство решений уравнения (1) с такими начальными условиями можно рассматривать и как функцию двух переменных n и m, заданную в области Δ_N. Обозначим ее $X(n,m)$ и назовем *фундаментальным решением* уравнения (1).

С помощью фундаментального решения любое решение уравнения (1) можно представить в виде [1]

$$x_m(n) = X(n,m)\xi_m(m) + \sum_{i=m}^{n-1} X(n,i+1)\left(f(i) - \sum_{k=0}^{N} a_k(i)\xi_m^*(i-h_k(i)) \right), \qquad (2)$$

где $\xi_m^*(j) = \xi_m(j)$ при $j < m$ и $\xi_m^*(j) = 0$ при $j \ge m$.

При изучении уравнения (1) на неограниченном множестве важную роль играют понятия *устойчивости* решений. Эти понятия в большинстве работ, посвященных разностным уравнениям, вводятся по образцам аналогичных определений для обыкновенных дифференциальных уравнений (см. определения 2–6 данной статьи).

С другой стороны, формула (2) выявляет особую роль фундаментального решения, которое удобно сделать основным объектом изучения: оно не зависит ни от начальных условий, ни от правой части, но при этом определяет свойства любого решения. Поэтому и для понятий устойчивости желательно найти переформулировки в терминах свойств фундаментального решения.

Решению этих вопросов и посвящена данная работа.

Обозначим $a(n) = \sum_{k=0}^{N} |a_k(n)|$, $h(n) = \max_{0 \le k \le N} h_k(n)$ и определим следующее важное свойство исследуемого уравнения.

Определение 1. Будем говорить, что для уравнения (1) *выполнено Ї-условие*, если

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \infty .$$

Заметим, что аналоги этого определения в разных вариантах возникали и раньше. Для обыкновенных дифференциальных уравнений – условие интегральной ограниченности коэффициента [2], для функционально-дифференциальных уравнений – так называемое «δ-условие» и ограниченность вариации [3]. В работе [4], посвященной устойчивости разностных уравнений, предполагается ограниченность коэффициентов и запаздываний. Очевидно, что Ї-условие является менее ограничительным, так как включает, например, классы уравнений с неограниченным запаздыванием.

Пусть $V = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i)$, $\mu(m) = \sup_{i-h(i) \le m} i$. Заметим, что $\sum_{i=m}^{\mu(m)} a(i) \le V$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$, а $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} h(n) = \sup_{m \in \mathbb{N}_0} (\mu(m) - m)$.

Лемма 1. *Пусть выполнено Ї-условие и одно из следующих двух условий: 1)* $\lim_{n\to\infty} X(n,m) = 0$ *при любом* $m \in \mathbb{N}_0$*; 2)* $\sup_{(n,m)\in\Delta_N} |X(n,m)| = \infty$. *Тогда* $\mu(m) < \infty$ *для любого* $m \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Допустим, что лемма неверна, тогда существует $m_* \in \mathbb{N}_0$, такое, что $\mu(m_*) = \sup\limits_{i-h_k(i)\le m_*} i = \infty$. Отсюда с учетом ŕ-условия имеем

$$\sum_{i=m_*}^{\infty} a(i) = \sum_{i=m_*}^{\mu(m_*)} a(i) \le \sup_n \sum_{i=n-h(n)}^{n} a(i) < \infty ,$$

то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a(n)$ сходится. По теореме 4 из работы [5] сходимость этого ряда обеспечивает следующее свойство фундаментального решения: для любого $\varepsilon > 0$ существует $l > 0$ такое, что при всех m и n, удовлетворяющих неравенству $n \ge m \ge l$, справедлива оценка $|X(n,m) - 1| < \varepsilon$. Эта оценка не совместима ни с условием 1), ни с условием 2). ▲

Лемма 2. *Пусть выполнено ŕ-условие и найдутся такие* $M, \gamma > 0$, *что при всех* $(n,m) \in \Delta_N$ *фундаментальное решение уравнения (1) будет подчинено оценке*

$$|X(n,m)| \le M \exp(-\gamma(n-m)) . \tag{3}$$

Тогда функции a *и* h *ограничены на множестве* $\mathbb{N}_0$.

Доказательство. Ограниченность функции a следует из ŕ-условия. Докажем ограниченность функции h.

Выберем $l \in \mathbb{N}$ такое, что $l > \dfrac{\ln 2M}{\gamma}$. В силу неравенства (3) при любом $m \in \mathbb{N}_0$ имеем $|X(m+l,m)| \le \dfrac{1}{2}$, следовательно, $|X(m,m) - X(m+l,m)| > \dfrac{1}{2}$.

С другой стороны, из определения фундаментального решения имеем

$$|X(m,m) - X(m+l,m)| \le \sum_{i=m}^{m+l} \sum_{k=1}^{N} |a_k(i)|\,|X(i-h_k(i),m)| \le M \sum_{i=m}^{m+l} a(i) ,$$

следовательно, $\sum\limits_{i=m}^{m+l} a(i) > \dfrac{1}{2M}$. Таким образом, $\sum\limits_{i=m}^{m+[2MlV]+1} a(i) > V$, а значит, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} h(n) = \sup\limits_m (\mu(m) - m) < \infty$. ▲

Устойчивость по начальной функции

В этом разделе мы приведем некоторые известные определения устойчивости уравнения (1) по начальной функции и докажем теоремы о связи устойчивости по начальной функции с оценками фундаментального решения. Во всех этих теоремах ŕ-условие оказывается существенным.

В силу линейности уравнения (1) во всех определениях этого раздела, не нарушая общности, можно считать, что $f(n) \equiv 0$. При $f(n) \equiv 0$ из представления (2) имеем

$$|x_m(n)| \le |X(n,m)|\,|\xi_m(m)| + \sum_{i=m}^{\mu(m)} |X(n,i+1)| \sum_{k=0}^{N} |a_k(i)|\,|\xi_m^*(i-h_k(i))| \le$$

$$\le \sup_{i \le m} |\xi_m(i)| \left(|X(n,m)| + \sum_{i=m}^{\mu(m)} a(i)\,|X(n,i+1)| \right),$$

следовательно,

$$|x_m(n)| \le \sup_{i \le m} |\xi_m(i)| \left(|X(n,m)| + V \sup_{m \le i \le \mu(m)} |X(n,i+1)| \right). \tag{4}$$

Определение 2. Уравнение (1) называется *устойчивым по Ляпунову*, если при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}_0$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_m > 0$ такое, что из неравенства $\sup\limits_{i \le m} |\xi_m(i)| \le \delta_m$ следует неравенство $\sup\limits_{n \ge m} |x_m(n)| \le \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть выполнено ї-условие. Тогда уравнение* (1) *устойчиво по Ляпунову, если и только если* $\sup\limits_{n \ge m} |X(n,m)| < \infty$ *при всех* $m \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Итак, при каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}_0$ имеем $\sup\limits_{n \ge m} |X(n,m)| = M_m < \infty$. Рассмотрим две возможности.

Пусть $\sup\limits_{(n,m) \in \Delta_N} |X(n,m)| = \infty$. В этом случае в силу леммы 1 имеем $\mu(m) < \infty$ для всех $m \in \mathbb{N}_0$. Возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M_m + V \max\limits_{m \le i \le \mu(m)} M_{i+1}}$. С учетом оценки (4) при $\sup\limits_{i \le m} |\xi_m(i)| \le \delta$ получаем

$$\sup_{n \ge m} |x_m(n)| \le \sup_{i \le m} |\xi_m(i)| \left(|X(n,m)| + V \max_{m \le i \le \mu(m)} |X(n,i+1)| \right) \le \delta \left(M_m + V \max_{m \le i \le \mu(m)} M_{i+1} \right) = \varepsilon .$$

Пусть теперь $\sup\limits_{(n,m) \in \Delta_N} |X(n,m)| = M < \infty$. Возьмем $\delta = \dfrac{\varepsilon}{M(1+V)}$ и потребуем, чтобы $\sup\limits_{i \le m} |\xi_m(i)| \le \delta$. Из (4) получаем

$$\sup_{n \ge m} |x_m(n)| \le \sup_{i \le m} |\xi_m(i)| \left(|X(n,m)| + V \sup_{m \le i \le \mu(m)} |X(n,i+1)| \right) \le \delta M \left[1+V\right] = \varepsilon . \blacktriangle$$

Определение 3. Уравнение (1) называется *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для любого $m \in \mathbb{N}_0$ из неравенства $\sup\limits_{i \le m} |\xi_m(i)| \le \delta$ следует неравенство $\sup\limits_{n \ge m} |x_m(n)| \le \varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть выполнено ї-условие. Тогда уравнение* (1) *равномерно устойчиво, если и только если его фундаментальное решение подчинено оценке*

$$\sup_{(n,m)\in\Delta_N} |X(n,m)| < \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость очевидна, а достаточность сразу вытекает из того, что в силу оценки (4) имеем $\sup\limits_{n\ge m}|x_m(n)| \le \sup\limits_{i\le m}|\xi_m(i)|(V+1)\sup\limits_{(n,m)\in\Delta_N}|X(n,m)|$. ▲

Определение 4. Уравнение (1) называется *асимптотически устойчивым*, если при каждом фиксированном $m\in\mathbb{N}_0$ выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} x_m(n)=0$.

Теорема 3. *Пусть выполнено ї-условие. Тогда уравнение* (1) *асимптотически устойчиво, если и только если* $\lim\limits_{n\to\infty} X(n,m)=0$ *при всех* $m\in\mathbb{N}_0$.

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность.

Если при каждом фиксированном m имеем $\lim\limits_{n\to\infty} X(n,m)=0$, то в силу леммы 1 $\mu(m)<\infty$. Отсюда с учетом оценки (4) получаем

$$\lim_{n\to\infty}|x_m(n)| = \sup_{i\le m}|\xi_m(i)| \lim_{n\to\infty}\left(|X(n,m)| + V\max_{m\le i\le\mu(m)}|X(n,i+1)|\right) = 0. \text{▲}$$

Определение 5. Уравнение (1) называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $l\in\mathbb{N}$, такое, что для любых $(n,m)\in\Delta_N$ из неравенства $n-m\ge l$ следует неравенство $|x_m(n)|\le\varepsilon$.

Теорема 4. *Пусть выполнено ї-условие. Тогда уравнение* (1) *равномерно асимптотически устойчиво если и только если для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $l>0$, *такое, что при любых* $(n,m)\in\Delta_N$ *из неравенства* $n-m\ge l$ *следует неравенство* $|X(n,m)|<\varepsilon$.

Определение 6. Уравнение (1) называется *равномерно экспоненциально устойчивым*, если найдутся $M,\gamma>0$, такие, что при любых $(n,m)\in\Delta_N$ выполнено неравенство

$$|x_m(n)| \le M\sup_{i\le m}|\xi_m(i)|\exp(-\gamma(n-m)).$$

Теорема 5. *Пусть выполнено ї-условие. Тогда уравнение* (1) *равномерно экспоненциально устойчиво, если и только если существуют такие* $M,\gamma>0$, *что для фундаментального решения уравнения* (1) *выполнена оценка* (3).

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем достаточность.

В силу леммы 2 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} h(n)=\sup\limits_{m}(\mu(m)-m)<\infty$. С учетом оценки (4) получаем

$$|x_m(n)| \le \sup_{i\le m} |\xi_m(i)| VM \left(\exp(-\gamma(n-m)) + \max_{m\le i\le \mu(m)} \exp(-\gamma(n-i-1)) \right) \le$$
$$\le \sup_{i\le m} |\xi_m(i)|\, M \left(\exp(-\gamma(n-m)) + V \max_{m\le i\le m+L} \exp(-\gamma(n-i-1)) \right) \le$$
$$\le \sup_{i\le m} |\xi_m(i)|\, M(V+1)\exp(L+1)\exp(-\gamma(n-m)) . \ \blacktriangle$$

Вспомогательное функционально-дифференциальное уравнение

На основе функций a_k, r_k и f введем функции непрерывного аргумента $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ по правилам:

$$q_k(t) = a_k([t]),\ r_k(t) = h_k([t]) + t - [t], \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

и поставим в соответствие уравнению (1) функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{y}(t) + \sum_{k=0}^{N} q_k(t) y(t - r_k(t)) = g(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

где $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ – любая локально суммируемая функция. При отрицательных значениях аргумента доопределим функцию y любой локально суммируемой функцией.

В силу определения функций q_k и r_k уравнение (6) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо [6] и его решение представимо в виде

$$y(t) = Y(t,0)y(0) + \int_0^t Y(t,s) g(s) ds , \tag{7}$$

где $Y(t,s)$ – функция Коши [6] уравнения (6).

Следующая лемма устанавливает соответствие между фундаментальным решением уравнения (1) и функцией Коши уравнения (6).

Лемма 3. *Для любых* $(n,m) \in \Delta_N$, $\alpha \in [0,1]$ *и* $\beta \in (0,1]$ *справедливы равенства:*

$$\begin{aligned} Y(n+\alpha, 0) &= \alpha X(n+1, 0) + (1-\alpha) X(n, 0), \\ Y(n+\alpha, m+\beta) &= \alpha X(n+1, m+1) + (1-\alpha) X(n, m+1). \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство. Вначале докажем индукцией по n, что для любых $(n,m) \in \Delta_N$ и $\beta \in (0,1]$ справедливо равенство

$$Y(n, m+\beta) = Y(n, m+1) = X(n, m+1) . \tag{9}$$

При $n = m+1$ имеем

$$Y(m+1, m+\beta) = Y(m+\beta, m+\beta) - \int_{m+\beta}^{m+1} \sum_{k=0}^{N} q_k(s) Y(s - r_k(s), m+\beta) ds =$$

$$= Y(m+1, m+1) - \int\limits_{m+\beta}^{m+1} \sum_{k=0}^{N} a_k([s]) Y(s - h_k([s]) - s + [s], m+\beta) ds =$$

$$= Y(m+1, m+1) - \int\limits_{m+\beta}^{m+1} \sum_{k=0}^{N} a_k(m) Y(m - h_k(m), m+\beta) ds = Y(m+1, m+1) = X(m+1, m+1).$$

Допустим, что $Y(i, m+\beta) = Y(i, m+1) = X(i, m+1)$ для всех $m+1 \le i \le n$. Тогда

$$Y(n+1, m+\beta) = Y(n, m+\beta) - \int\limits_{n}^{n+1} \sum_{k=0}^{N} q_k(s) Y(s - r_k(s), m+\beta) ds =$$

$$= Y(n, m+1) - \int\limits_{n}^{n+1} \sum_{k=0}^{N} a_k([s]) Y(s - h_k([s]) - s + [s], m+\beta) ds =$$

$$= Y(n, m+1) - \int\limits_{n}^{n+1} \sum_{k=0}^{N} a_k(n) Y(n - h_k(n), m+\beta) ds =$$

$$= Y(n, m+1) - \sum_{k=0}^{N} a_k(n) Y(n - h_k(n), m+1) \int\limits_{n}^{n+1} ds.$$

Теперь, с одной стороны, имеем

$$Y(n+1, m+\beta) = Y(n, m+1) - \int\limits_{n}^{n+1} \sum_{k=0}^{N} q_k(s) Y(s - r_k(s), m+1) ds = Y(n+1, m+1);$$

с другой стороны, учитывая представление (2), получаем

$$Y(n+1, m+\beta) = X(n, m+1) - \sum_{k=0}^{N} a_k(n) X(n - h_k(n), m+1) = X(n+1, m+1).$$

Равенство (9) доказано. Далее,

$$Y(n+\alpha, m+\beta) = Y(n, m+\beta) - \int\limits_{n}^{n+\alpha} \sum_{k=0}^{N} q_k(s) Y(s - r_k(s), m+\beta) ds =$$

$$= Y(n, m+\beta) - \int\limits_{n}^{n+\alpha} \sum_{k=0}^{N} a_k(n) Y(n - h_k(n), m+\beta) ds =$$

$$= Y(n, m+\beta) - \alpha \int\limits_{n}^{n+1} \sum_{k=0}^{N} a_k(n) Y(n - h_k(n), m+\beta) ds =$$

$$= Y(n, m+\beta) - \alpha \int\limits_{n}^{n+1} \sum_{k=0}^{N} q_k(s) Y(s - h_k(s), m+\beta) ds =$$

$$= Y(n, m+\beta) + \alpha(Y(n+1, m+\beta) - Y(n, m+\beta)).$$

Отсюда при $m = 0$ и $\beta = 0$ получаем первое из равенств (8). При $m > 0$ и $0 < \beta \le 1$, используя (9), получаем второе из равенств (8). ▲

Приведем несколько простых следствий леммы 3.

Следствие 1. *Фундаментальное решение уравнения* (1) *подчинено оценке* (5) *тогда и только тогда, когда функция Коши уравнения* (6) *подчинена оценке*

$$\sup_{(t,s)\in\Delta_R} |Y(t,s)| < \infty \ . \tag{10}$$

Следствие 2. *Пусть уравнение (1) равномерно асимптотически устойчиво. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $l > 0$, *такое, что из неравенства* $t - s \geq l$ *следует неравенство* $|Y(t,s)| < \varepsilon$.

Следствие 3. *Фундаментальное решение уравнения* (1) *для некоторых* $M, \gamma > 0$ *подчинено оценке* (3) *тогда и только тогда, когда найдутся такие* $N, \alpha > 0$, *что при любых* $(t,s) \in \Delta_R$ *функция Коши уравнения* (6) *подчинена оценке*

$$|Y(t,s)| \leq N \exp(-\alpha(t-s)). \tag{11}$$

Устойчивость по правой части

Устойчивости по правой части отводится особое место в нашей статье. Такое ее обособление не случайно. Уже при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений была обнаружена связь между устойчивостью по правой части (которая понимается как непрерывная зависимость от внешних возмущений), задачей о накоплении возмущений и свойством экспоненциальной устойчивости уравнения [2, 7, 8]. Эти идеи получили мощное развитие в работах, посвященных устойчивости функционально-дифференциальных уравнений (см. монографию [3] и библиографию к ней).

Такая связь обусловлена прежде всего наличием интегрального представления (7), в котором определяющим является второе слагаемое – линейный интегральный оператор Вольтерра, действующий в пространствах суммируемых функций. Этот оператор обладает замечательным свойством: если он действует в указанных пространствах, то он ограничен и, следовательно, непрерывен. Далее, поскольку ядро интегрального оператора также объект с рядом особых свойств, то действие оператора оказывается эквивалентным наличию экспоненциальной (или равномерной) оценки на ядро, то есть, в классических терминах, равномерной экспоненциальной (соответственно, равномерной) устойчивости исходного уравнения. Эти утверждения часто называют теоремами Боля–Перрона [3].

Приведенная цепочка эквивалентностей, безусловно, является очень ценной: углубляя наши представления о природе устойчивости, она также увеличивает арсенал методов, с помощью которых можно получать конкретные признаки устойчивости.

В этом разделе, пользуясь уже установленной связью между уравнениями (1) и (6), мы получим для разностного уравнения аналоги теорем Боля–Перрона.

Устойчивость по правой части означает, что малому изменению правой части соответствует малое изменение решения. В силу представления решения (2) очевидно, что, не нарушая общности, можно рассматривать устойчивость по правой части при нулевой начальной функции (включая и начальные условия). Нет необходимости также в подвижной начальной точке: понятно, что достаточно изучить ситуацию с фиксированной начальной точкой $m = 0$. В результате этих упрощений уравнение (1) перейдет в уравнение

$$x(n+1)-x(n)+\sum_{k=0}^{N} a_k(n)x(n-h_k(n)) = f(n), \quad n\in \mathbb{N}_0, \tag{12}$$

где функция x доопределяется нулем при отрицательных значениях аргумента и $x(0)=0$. Решение этого уравнения будем обозначать $x(n)$.

Пусть S – линейное нормированное пространство функций целочисленного аргумента, определенных на $\mathbb{N}_0$.

Определение 7. Будем говорить, что уравнение (12) *устойчиво по правой части* из S, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что из неравенства $\| f\|_S \le \delta$ следует неравенство $\sup\limits_{n\in \mathbb{N}_0} |x(n)|<\varepsilon$.

Введем оператор K по следующему закону: $(Kf)(n)=\sum\limits_{i=0}^{n-1} X(n,i+1)f(i)$.

С учетом этого обозначения решение уравнения (12) можно записать в виде $x=Kf$. Устойчивость по правой части, очевидно, означает непрерывность оператора K, действующего из пространства S в пространство l_∞, а с учетом линейности K – его ограниченность. Если же ограничить выбор правых частей уравнения (12) пространствами l_p, то удается доказать более сильное утверждение.

Лемма 4. *Уравнение* (12) *устойчиво по правой части из* l_p $(1\le p\le\infty)$ *тогда и только тогда, когда* $K(l_p)\subseteq l_\infty$.

Доказательство. С учетом сделанных выше замечаний лемма будет доказана, если из включения $K(l_p)\subseteq l_\infty$ будет следовать ограниченность оператора K. Рассмотрим семейство функционалов $K_n : l_p \to \mathbb{R}$, задаваемое формулой

$$K_n f = \sum_{n=0}^{n-1} X(n,i+1)f(i), \; n\in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что при любом $n\in\mathbb{N}$ функционал K_n определен на банаховом пространстве l_p и ограничен. Из условий леммы следует, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |K_n f|<\infty$ при любом $f\in l_p$. Таким образом, выполнены условия теоремы Банаха–Штейнхгауза, из которой следует, что $L=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|K_n\|<\infty$. Значит,

$$\|Kf\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(Kf)(n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |K_n f| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|K_n\| \|f\|_p = L\|f\|_p,$$

что и требовалось доказать. ▲

Чтобы установить эквивалентность устойчивости по правой части и экспоненциальной устойчивости, снова воспользуемся переходом к уравнению (6).

Следуя [6], введем оператор $(Cg)(t)=\int\limits_0^t Y(t,s)g(s)ds$, который в теории функционально-дифференциальных уравнений принято называть *оператором Коши* уравнения (6).

Лемма 5. *Пусть* $1\le p\le\infty$. *Оператор* K *действует из* l_p *в* l_∞ *тогда и только тогда, когда оператор* C *действует из* L_p *в* L_∞.

Доказательство. Если имеет место равенство $f(n)=\int\limits_n^{n+1} g(s)ds$, то для любых $n\in N_0, \alpha\le 0\le 1$ имеем

$$(Cg)(n+\alpha)=\alpha(Kf)(n+1)+(1-\alpha)(Kf)(n)+\alpha^2 f(n). \qquad (13)$$

Действительно, используя (8), получаем цепочку равенств:

$$(Cg)(n+\alpha)=\int\limits_0^{n+\alpha} Y(n+\alpha,s)g(s)ds=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_i^{i+1}\left(\alpha X(n+1,n+1)+(1-\alpha)X(n,n+1)\right)g(s)ds+$$

$$+\int\limits_n^{n+\alpha}\left(\alpha X(n+1,n+1)+(1-\alpha)X(n,n+1)\right)g(s)ds=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha X(n+1,i+1)+(1-\alpha)X(n,i+1)\right)\int\limits_i^{i+1} g(s)ds+$$

$$+\left(\alpha X(n+1,n+1)+(1-\alpha)X(n,n+1)\right)\int\limits_n^{n+\alpha} g(s)ds=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha X(n+1,i+1)+(1-\alpha)X(n,i+1)\right)f(i)+\alpha^2 f(n),$$

доказывающих равенство (13).

Пусть оператор K действует из l_p в l_∞. Возьмем произвольную функцию $g\in L_p$ и положим $f(n)=\int\limits_n^{n+1} g(s)ds$. Имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty}|f(i)|^p=\sum_{i=0}^{\infty}\left|\int\limits_i^{i+1}u(s)ds\right|^p\le\sum_{i=0}^{\infty}\left(\int\limits_i^{i+1}|g(s)|\,ds\right)^p\le\sum_{i=0}^{\infty}\int\limits_i^{i+1}|g(s)|^p\,ds\le\int\limits_0^{\infty}|g(s)|^p\,ds<\infty,$$

следовательно, $f\in l_p\subseteq l_\infty$ и, таким образом, $Kf\in l_\infty$.Отсюда в силу равенства (13) получаем $Cg\in L_\infty$.

Пусть теперь оператор C действует из L_p в L_∞. Возьмем произвольную функцию $f \in l_p$ и положим $g(t) = f([t])$. Очевидно, что $\int_n^{n+1} g(s)ds = f(n)$. Далее, имеем $\int_0^\infty |g(s)|^p\, ds = \int_0^\infty |f([s])|^p\, ds = \sum_{i=0}^\infty |f(i)|^p < \infty$, то есть $g \in L_p$, следовательно, $Cg \in L_\infty$. Теперь, положив в равенстве (13) $\alpha = 0$, получаем $Kf \in l_\infty$.▲

Для удобства чтения приведем здесь без доказательства ряд утверждений из теории устойчивости функционально-дифференциальных уравнений.

Теорема 6 [3]. *Оператор C действует из пространства L_1 в пространство L_∞ тогда и только тогда, когда для функции Коши уравнения* (6) *выполнено условие* (10).

Теорема 7 [3]. *Пусть при любом $k = 0,1,\ldots,N$ функции q_k и r_k ограничены. Тогда эквивалентны следующие утверждения.*

1. *При некотором фиксированном $p \in (1,\infty]$ оператор C действует из пространства L_p в пространство L_∞.*
2. *При любом $p \in (1,\infty]$ оператор C действует из пространства L_p в пространство L_∞.*
3. *Для функции Коши уравнения* (6) *справедлива оценка* (11).
4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $l > 0$, такое, что при любых $(t,s) \in \Delta_{R_+}$ из неравенства $t - s \ge l$ следует неравенство $|Y(t,s)| < \varepsilon$.*

На основе этих теорем с учетом лемм 4 и 5 легко получить аналогичные результаты для разностных уравнений.

Теорема 8. *Оператор K действует из пространства l_1 в пространство l_∞ тогда и только тогда, когда для фундаментального решения выполнено условие* (5).

Доказательство. Последовательно применив лемму 5, теорему 6 и следствие 1, получаем требуемое утверждение. ▲

Теорема 9. *Пусть при любом $k = 0,1,\ldots,N$ функции a_k и h_k ограничены. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *При некотором фиксированном $p \in (1,\infty]$ оператор K действует из пространства l_p в пространство l_∞.*
2. *При любом $p \in (1,\infty]$ оператор K действует из пространства l_p в пространство l_∞.*
3. *Для фундаментального решения уравнения* (1) *справедлива оценка* (3).
4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $l > 0$, такое, что при любых $(n,m) \in \Delta_{N_0}$ из неравенства $n - m \ge l$ следует неравенство $|X(n,m)| < \varepsilon$.*

Доказательство. По условию теоремы функции a_k и h_k ограничены, следовательно, ограничены функции q_k и r_k. Последовательно применив лемму 5, теорему 7 и вновь лемму 5, получим $1 \Leftrightarrow 2$. Далее, последовательно применив лемму 5, теорему 7 и следствие 3, получим $1 \Leftrightarrow 3$. Наконец, последовательно применив теорему 4, следствие 2, теорему 7 и следствие 3, получим $4 \Rightarrow 3$. Импликация $3 \Rightarrow 4$ очевидна. ▲

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Berezansky L., Braverman E. On Existence of positive solutions for linear difference equations wits several delays // Advances in Dynamical Systems and Applications. – 2006. – Vol. 1. – No 1. – P. 29–47.
2. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
3. Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. – Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001. – 229 с.
4. Berezansky L., Braverman E. On Bohl-Perron type theorems for difference equations // Func. Different. Equat. – 2004. – No 11. – P.19–29.
5. Куликов А.Ю., Малыгина В.В. Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Изв. вузов. Математика. – 2008. – № 3. – С. 18–26.
6. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 277 с.
7. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224 с.
8. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.

Получено 01.05.2009