УДК 627.7.01

А.И. Овчинников

ОАО «Авиадвигатель», г. Пермь

ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ ИЗОЭНТРОПНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В УЗЛАХ ГАЗОТУРБИННЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Рассматриваются различные вероятностные модели изоэнтропного течения газа. В результате исследования установлено, что единственной моделью, которая не содержит внутренних противоречий, является та, в которой принято, что вариации безразмерной скорости равны нулю. Данная методика может быть применима в процессе проектирования различных узлов газотурбинных двигателей.

Ключевые слова: вероятностная модель, газотурбинный двигатель, изоэнтропный поток, метод вариаций, инженерный анализ.

A.I. Ovchinnikov

Aviadvigatel OJSC, Perm

THE PROBABILISTIC MODEL OF ISENTROPIC GAS FLOW IN GAS-TURBINE ENGINE UNITS

Different probabilistic models of isentropic gas flow are considered. As a result of studies it is established, that the only model that does not contain internal contradictions, is the one in which the dimensionless velocity variations equal to zero. The method can be applied to design the different units of gas-turbine engine.

Keywords: probabilistic model, gas-turbine engine, isentropic flow, method of variations, engineering analysis.

В настоящее время для исследования газодинамических процессов, происходящих в узлах газотурбинных двигателей, наибольшее распространение получили детерминированные модели. Совместное использование данных моделей с технологиями CFD позволяет получить результат, близкий к математическому ожиданию. Однако при разработке турбомашин требуется знание и величин случайных отклонений параметров газа от номинальных значений. Это дает конструктору более полную информацию о протекающих процессах, что позволяет улучшить принимаемые им решения. Также значения случайных отклонений характеристик узлов ГТД необходимо учитывать для повышения качества проектирования.

При разработке методики использовался метод вариаций, т.е. малых отклонений от какого-либо стационарного значения функции [1, 2]. Этот метод широко используется при разработке ракетных двигателей. В настоящее время он начинает применяться и для ГТД [3, 4]. Метод заключается в следующем: если существует исходная функция в виде детерминированной зависимости $y=f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$, то уравнение в виде вариаций будет иметь вид

$$\delta y=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_i=x_{i\text{ст}}}\delta x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_i=x_{i\text{ст}}}\delta x_2+...,$$

где $\delta y=y-y_{\text{ст}}$, $\delta x_n=x_n-x_{n\text{ст}}$ – вариации переменных, т.е. отклонения параметров от некоторого стационарного значения параметра процесса. Дисперсия параметра будет определяться как

$$D\left(y\right)=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_{x_i=x_{i\text{ст}}}\right]^2 D\left(x_1\right)+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_{x_i=x_{i\text{ст}}}\right]^2 D\left(x_2\right)+....$$

В качестве детерминированной модели приняты зависимости, приведенные в работах [2, 5, 6, 7]. Принятая модель течения в цилиндрическом канале постоянного сечения: предполагается, что на вход канала подается газ, имеющий отклонения от номинальных значений расхода и параметров торможения величин давления, температуры и плотности. В канале происходит изоэнтропическое течение газа в стационарном режиме. Изменения заторможенных параметров на входе в канал происходят медленно, т.е. время изменения газодинамических параметров значительно больше времени релаксации газового объема канала. Это означает, что, несмотря на изменение заторможенных параметров на входе в канал, течение в канале можно считать в каждый момент времени изоэнтропным. Величины газовой постоянной и показателя адиабаты приняты постоянными. При движении газа по каналу все его параметры должны подчиняться уравнениям сохранения и уравнению состояния. Кроме того, должно выполняться условие изоэнтропности течения. Все эти закономерности должны также соблюдаться и для вариаций параметров. Определяем уравнения сохранения и вспомогательные соотношения в виде вариаций:

1. Уравнение неразрывности $\rho VF=G$, $F=\text{const}$.

Выражение в виде вариаций $\frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{\delta V}{V}=\frac{\delta G}{G}$.

Правую часть можно выразить через заторможенные параметры потока:

$$G=m\frac{P^*q(\lambda)F}{\sqrt{T^*}},\ \text{тогда}\ \frac{\delta G}{G}=\frac{\delta P^*}{P^*}+\frac{\delta q(\lambda)}{q(\lambda)}-\frac{1}{2}\frac{\delta T^*}{T^*}.$$

Используя соотношения $\frac{\delta q(\lambda)}{q(\lambda)}=\frac{1-\lambda^2}{\tau(\lambda)}\frac{\delta\lambda}{\lambda}$; $\frac{\delta\lambda}{\lambda}=\frac{\delta v}{v}-\frac{1}{2}\frac{\delta T^*}{T^*}$,

получим $\frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{\tau(\lambda_{\text{кр}})}{\tau(\lambda)}\frac{\delta v}{v}=\frac{\delta P^*}{P^*}-\frac{1}{\tau(\lambda)}\left[1-\frac{k}{k+1}\lambda^2\right]\frac{\delta T^*}{T^*}$.

Расход можно выразить через статическое давление. Тогда в вариациях

$$\frac{\delta G}{G}=\frac{\delta P}{P}+\frac{\delta y(\lambda)}{y(\lambda)}-\frac{1}{2}\frac{\delta T^*}{T^*}.$$

Учитывая, что $\frac{\delta y(\lambda)}{y(\lambda)}=\frac{2-\tau(\lambda)}{\tau(\lambda)}\frac{\delta\lambda}{\lambda}$ и соотношения для $\frac{\delta\lambda}{\lambda}$, получим

$$\tau(\lambda)\frac{\delta P}{P}-\tau(\lambda)\frac{\delta\rho}{\rho}+2\left[1-\tau(\lambda)\right]\frac{\delta v}{v}=\frac{\delta T^*}{T^*},$$

где G – расход газа; ρ, P, T – плотность, давление и температура газа; F – площадь проходного сечения канала; v – скорость потока; λ – безразмерная скорость потока; $q(\lambda)$, $\tau(\lambda)$, $y(\lambda)$ – газодинамические функции. Индекс * означает параметры торможения газа.

2. Уравнение энергии $\frac{v^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho}=H^*$,

где $H^*=C_pT^*$.

Находим вариации данного уравнения:

$$\frac{v^2}{H^*}\frac{\delta v}{v}+\frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho}\frac{1}{H^*}\frac{\delta P}{P}-\frac{k}{k-1}\frac{P}{\rho}\frac{1}{H^*}\frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{\delta H^*}{H^*}.$$

Применяя преобразования

$$\frac{v^2}{H^*}=\frac{v^2}{\frac{k+1}{k-1}\frac{a_{\text{кр}}^2}{2}}=2\cdot\frac{k-1}{k+1}\lambda^2=2\cdot[1-\tau(\lambda)];$$

$$\frac{P}{\rho}\frac{1}{H^*}=\frac{RT}{C_pT^*}=\frac{C_p-C_V}{C_p}=\frac{k-1}{k}\tau(\lambda)\,;\ \frac{\delta H^*}{H^*}=\frac{\delta T^*}{T^*},$$

получим уравнение энергии в виде

$$\tau(\lambda)\frac{\delta P}{P}-\tau(\lambda)\frac{\delta\rho}{\rho}+2[1-\tau(\lambda)]\frac{\delta v}{v}=\frac{\delta T^*}{T^*},$$

где H – теплосодержание газа; R – газовая постоянная; k – показатель адиабаты; C_p, C_V – изобарная и изохорная теплоемкости газа.

3. Уравнение количества движения $Gv+PF=K$.

В вариациях $\frac{\rho v^2F}{K}\frac{\delta\rho}{\rho}+2\frac{\rho v^2F}{K}\frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{PF}{K}\frac{\delta P}{P}=\frac{\delta K}{K}.$

Применяя преобразования $\frac{PF}{K}=r(\lambda)$, $\frac{\rho V^2F}{K}=[1-r(\lambda)]$ и выражая через параметры торможения $K=P^*Ff(\lambda)$ с учетом $[1-r(\lambda)]=\frac{2k}{k+1}\cdot\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$, имеем

$$\frac{\delta\rho}{\rho}+\left[2+\frac{1-\lambda^2}{\tau(\lambda)}\right]\frac{\delta v}{v}+\frac{r(\lambda)}{1-r(\lambda)}\frac{\delta P}{P}=\frac{1}{1-r(\lambda)}\frac{\delta P^*}{P^*}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\lambda^2}{\tau(\lambda)}\frac{\delta T^*}{T^*}.$$

4. Уравнение состояния $\frac{P}{\rho}=RT$. В вариациях $\frac{\delta P}{P}-\frac{\delta\rho}{\rho}-\frac{\delta T}{T}=0.$

5. Уравнение адиабаты $\frac{P}{\rho^k}=\text{const}$. В вариациях $\frac{\delta P}{P}-k\frac{\delta\rho}{\rho}=0.$

Составим систему уравнений. Уравнение неразрывности, выраженное через статическое давление, полностью совпадает с уравнением энергии, поэтому берем его совместно с уравнением сохранения количества движения, уравнением адиабаты и уравнением состояния. Для упрощения выражений в правую часть уравнений сохранения подставляем параметры в критическом сечении канала.

Далее рассмотрим несколько возможных моделей описания процесса. Основное требование к ним – внутренняя непротиворечивость. Они должны отвечать всем закономерностям течения газа. Для изоэнтропного потока уравнения энергии и количества движения совпадают, поэтому можно брать любое из них.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta\rho}{\rho}+\dfrac{\delta v}{v}=\dfrac{\delta P^*}{P^*}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\delta T^*}{T^*}, \\ \tau(\lambda)\dfrac{\delta T}{T}+2\left[1-\tau(\lambda)\right]\dfrac{\delta v}{v}=\dfrac{\delta T^*}{T^*}, \\ \dfrac{\delta P}{P}-k\dfrac{\delta\rho}{\rho}=0, \\ \dfrac{\delta P}{P}-\dfrac{\delta\rho}{\rho}-\dfrac{\delta T}{T}=0. \end{cases}$$

Решениями данной системы будут

$$\frac{\delta P}{P}=\frac{2k}{k+1}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\frac{\delta P^*}{P^*}-\frac{k}{k-1}\frac{1+\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}{\lambda^2-1}\frac{\delta T^*}{T^*},$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho}=\frac{2}{k+1}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\frac{\delta P^*}{P^*}-\frac{1}{k-1}\frac{1+\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}{\lambda^2-1}\frac{\delta T^*}{T^*},$$

$$\frac{\delta T}{T}=2\cdot\frac{k-1}{k+1}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\frac{\delta P^*}{P^*}-\frac{1+\dfrac{k-1}{k+1}\lambda^2}{\lambda^2-1}\frac{\delta T^*}{T^*},$$

$$\frac{\delta v}{v}=-\frac{\tau(\lambda)}{\lambda^2-1}\frac{\delta P^*}{P^*}+\frac{1}{2}\frac{\tau(\lambda_{\text{кр}})+\tau(\lambda)}{\lambda^2-1}\frac{\delta T^*}{T^*}.$$

Определитель данной системы $\Delta=(k-1)(\lambda^2-1)$, $\Delta\big|_{\lambda=0}=-(k-1)$, $\Delta\big|_{\lambda=1}=0$. Таким образом, система не имеет решения при $\lambda=1$, т.е. при критическом режиме течения.

При определении отклонений в критическом сечении сопла происходит разрыв и отклонения стремятся к бесконечности, что видно из графиков зависимостей коэффициентов вариации давления и температуры газового потока, приведенных на рис. 1.

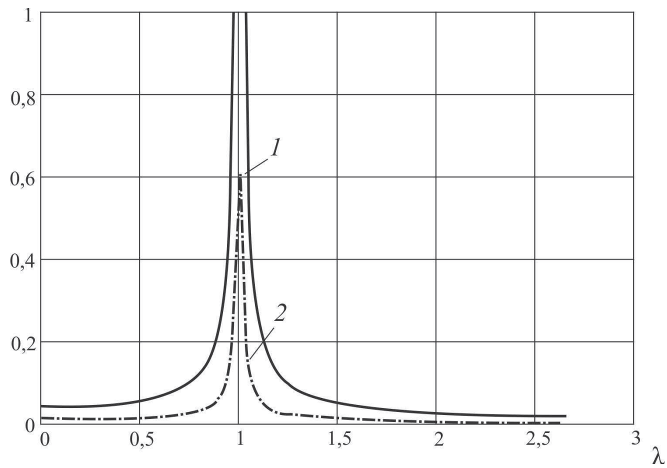

Рис. 1. Зависимость коэффициента вариации давления
и температуры от приведенной скорости потока:
1 – давление; *2* – температура

Наличие разрыва на приведенных зависимостях объясняется тем, что при $\lambda = 1$ некоторые газодинамические функции $\left(q(\lambda);\, y(\lambda);\, f(\lambda)\right)$ имеют производные, равные нулю, что приводит к росту отклонений всех параметров до таких величин, которые совершенно не соответствуют реальным. Это означает, что данная модель имеет применение при малых скоростях потока $(\lambda = 0\ldots0{,}6)$, а также при сверхзвуковых течениях $(\lambda = 1{,}2\ldots\lambda_{\max})$. Данный подход при определении вариаций был использован в работе [5].

Для получения зависимостей отклонений, пригодных для всего интервала изменения λ, можно использовать следующий подход (модель аппроксимации вариаций приведенной скорости газового потока): непосредственно определить вариации скорости потока в некоторых характерных точках. При $\lambda = 0$, т.е. при отсутствии течения, отклонения скорости будут равны нулю. В критическом сечении сопла, при $\lambda = 1$, вариации скорости будут

$$a_{\text{кр}} = \sqrt{2\frac{k-1}{k+1}C_p T^*},\;\; \delta a_{\text{кр}} = \frac{1}{2} a_{\text{кр}} \frac{\delta T^*}{T^*}.$$

При $\lambda = \lambda_{\max}$ отклонения скорости будут также равны нулю, так как у газа уже нет энергии для дальнейшего расширения. Далее проведем аппроксимацию зависимостей и отклонений скорости по этим точкам при изменении λ^2. Аппроксимация должна отвечать следующим условиям:

$$\left.\frac{\delta v}{v}\right|_{\lambda=0} = 0, \quad \left.\frac{\delta v}{v}\right|_{\lambda=1} = \frac{\delta a_{\text{кр}}}{a_{\text{кр}}}, \quad \left.\frac{\delta v}{v}\right|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0.$$

Экстремум функции должен быть в точке с координатами $\lambda = 1$; $\delta v = \delta a_{\text{кр}}$. Лучше всего подходит следующая функция (данное решение принято исключительно из математических соображений):

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{\delta a_{\text{кр}}}{a_{\text{кр}}} q(\lambda) = \frac{1}{2}\frac{\delta T^*}{T^*} q(\lambda).$$

Полученную зависимость подставляем в исходную систему уравнений и получаем следующие зависимости в виде разбросов:

$$\delta P = \sqrt{\left(\delta P^*\right)^2 \left(\pi(\lambda)\right)^2 \left[1 + \frac{1-\tau(\lambda)}{\tau(\lambda)}\left[1 - q(\lambda)\right]\right]^2},$$

$$\delta T = \sqrt{\left(\delta T^*\right)^2 \left(\tau(\lambda)\right)^2 \left[1 + \frac{1-\tau(\lambda)}{\tau(\lambda)}\left[1 - q(\lambda)\right]\right]^2},$$

$$\delta \rho = \sqrt{\left(\delta \rho^*\right)^2 \left(\varepsilon(\lambda)\right)^2 \left[1 + \frac{1-\tau(\lambda)}{\tau(\lambda)}\left[1 - q(\lambda)\right]\right]^2}.$$

Графики полученных зависимостей приведены на рис. 2.

Исследуя полученные результаты, приходим к выводу, что данная модель также является противоречивой. При увеличении скорости до $\lambda_{\max}$ коэффициенты вариации давления, температуры и плотности стремятся к бесконечности. Однако разбросы температуры потока становятся равными начальному значению. Кроме того, происходит одновременный рост коэффициентов вариации всех параметров потока, следовательно, одновременно растет кинетическая и потенциальная энергии газа, что невозможно в изоэнтропном процессе. Анализ полученных зависимостей заставляет принять допущение о том, что вариация безразмерной скорости газа во всех сечениях потока равна нулю (модель нулевой вариации приведенной скорости потока). Однако это не означает, что и величины отклонений скорости потока и статических параметров газа будут равны нулю. Если использовать газодинамические функции $T = T^*\tau(\lambda)$; $P = P^*\pi(\lambda)$; $\rho = \rho^*\varepsilon(\lambda)$, то вариации статических параметров будут иметь следующий вид:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\delta T^*}{T^*};\ \frac{\delta P}{P} = \frac{\delta P^*}{P^*};\ \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta\rho^*}{\rho^*};\ \frac{\delta v}{v} = \frac{\delta\lambda}{\lambda} + \frac{1}{2}\frac{\delta T^*}{T^*} = \frac{1}{2}\frac{\delta T^*}{T^*}.$$

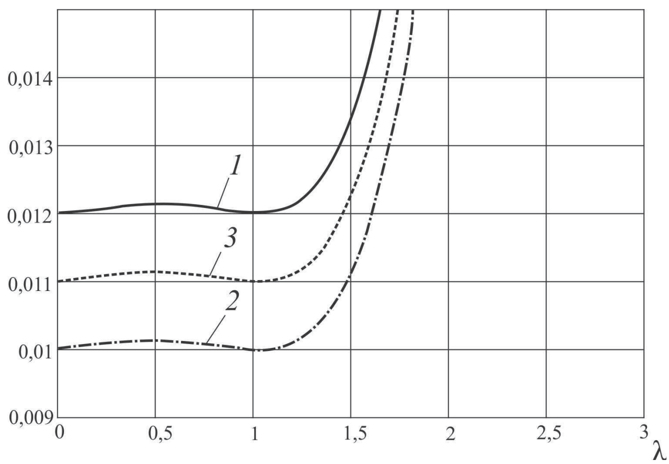

Рис. 2. Зависимость коэффициентов вариации давления, температуры и плотности от приведенной скорости потока: *1* – давление; *2* – температура; *3* – плотность

Переходя к разбросам, получим

$$\sigma_T = \tau(\lambda)\sigma_{T^*};\ \sigma_P = \pi(\lambda)\sigma_{P^*};\ \sigma_\rho = \varepsilon(\lambda)\sigma_{\rho^*};\ \sigma_v = \frac{1}{2}v\frac{\sigma_{T^*}}{T^*}.$$

Статические параметры (также как и заторможенные) должны подчиняться уравнению состояния, т.е. все разбросы можно выразить через разбросы только одного заторможенного параметра.

Из рис. 3 видно, что полученные зависимости не имеют разрывов и противоречий. Все коэффициенты вариации (давления, температуры, плотности и приведенной скорости газового потока) при достижении максимальной скорости обращаются в ноль, что полностью соответствует современным представлениям течения газа – параметры газа достигают предельных значений и никаких случайных отклонений здесь быть просто не может. При незначительном случайном отклонении теплосодержания или расхода газа на входе картина течения на выходе не изменится – все вариации останутся равными нулю, но изменится абсолютная скорость потока. Сами же разбросы теплосодержания и расхода, а также разбросы количества движения не изменяются при изменении приведенной скорости потока λ.

Также необходимо заметить, что в случае использования в первой модели преобразования $\frac{\delta P^*}{P^*} = \frac{k}{k-1}\frac{\delta T^*}{T^*}$ мы приходим к модели нулевой вариации приведенной скорости потока.

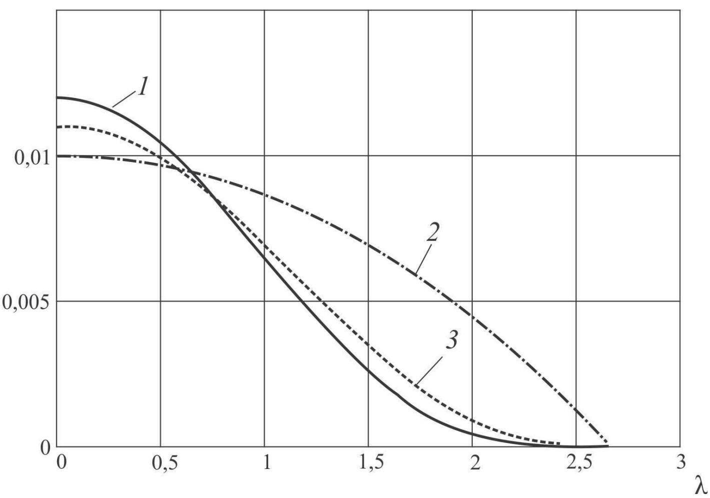

Рис. 3. Зависимость коэффициентов вариации давления, температуры и плотности от приведенной скорости потока при $\frac{\delta\lambda_{кр}}{\lambda_{кр}} = 0$:

1 – давление; *2* – температура; *3* – плотность

Таким образом, сравнивая три представленных выше модели, можно утверждать, что только третья модель не содержит в себе противоречий. Это позволяет использовать ее как основную модель при определении разбросов газодинамических параметров изоэнтропного потока, в зависимости от разбросов конструкторских допусков, вариации атмосферы и от других случайных параметров. Данная методика применима для определения дисперсий газодинамических параметров различных узлов газотурбинных двигателей.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высш. шк., 2000. – 480 с.

2. Черкез А.Я. Инженерные расчеты газотурбинных двигателей методом малых отклонений. – М.: Машиностроение, 1975. – 380 с.

3. Махнев Д.Б., Евграшин Ю.Б. Случайные отклонения газодинамических параметров дозвукового воздухозаборника с учетом корреляционных связей // Аэрокосмическая техника и высокие технологии – 2008: всерос. науч.-техн. конф. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008.

4. Пленкин С.В., Овчинников А.И., Евграшин Ю.Б. Вероятностная модель течения изоэнтропического потока газа // Аэрокосмическая техника и высокие технологии – 2009: всерос. науч.-техн. конф. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009.

5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736 с.

6. Кулагин В.В. Теория, расчет и проектирование авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2002. – 616 с.

7. Иноземцев А.А., Нихамкин М.А., Сандрацкий В.Л. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок. – М.: Машиностроение, 2008.

References

1. Venttsel E.S., Ovcharov L.A. *Teoriya veroyatnostey i ee inzhenernye prilozheniya* [Probability theory and its engineering applications]. Moscow, 2000, 480 p.

2. Cherkez A.Ya. *Inzhenernye raschety gazoturbinnykh dvigateley metodom malykh otkloneniy* [Engineering calculations of gas-turbine engines by the method of small deviations]. Moscow: Mashinostroenie, 1975, 380 p.

3. Makhnev D.B., Evgrashin Yu.B. *Sluchaynye otkloneniya gazodinamicheskikh parametrov dozvukovogo vozdukhozabornika s uchetom korrelyatsionnykh svyazey* [Random deviations of gas-dynamic parameters of sub-

sonic air intake with the account of correlations]. *Aerokosmicheskaya tekhnika i vysokie tekhnologii-2008: Vserossiyskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya*. Permskiy gosudarstvenniy tekhnicheskiy universitet, 2008.

4. Plenkin S.V., Ovchinnikov A.I., Evgrashin Yu.B. *Veroyatnostnaya model techeniya izoentropicheskogo potoka gaza* [Probabilistic model of isoentropic gas flow]. *Aerokosmicheskaya tekhnika i vysokie tekhnologii-2009: Vserossiyskaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya*. Permskiy gosudarstvenniy tekhnicheskiy universitet, 2009.

5. Loytsyanskiy L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [The fluid mechanics]. Moscow: Nauka, 1978, 736 p.

6. Kulagin V.V. *Teoriya, raschet i proektirovanie aviatsionnykh dvigateley i energeticheskikh ustanovok* [Theory, calculation and design of aircraft engines and power plants]. Moscow: Mashinostroenie, 2002, 616 p.

7. Inozemtsev A.A., Nikhamkin M.A., Sandratskiy V.L. *Osnovy konstruirovaniya aviatsionnykh dvigateley i energeticheskikh ustanovok* [The design principles of aircraft engines and power plants]. Moscow: Mashinostroenie, 2008.

Об авторах

Овчинников Андрей Иванович (Пермь, Россия) – инженер ОАО «Авиадвигатель» (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 93, e-mail: aovchinnikov@avid.ru).

About the authors

Ovchinnikov Andrey Ivanovich (Perm, Russian Federation) – Engineer, Aviadvigatel OJSC (93, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: aovchinnikov@avid.ru).

Получено 2.04.2012