

УДК 553 (075.8)

И.В. Храмцов, Е.В. Сорокин, Р.В. Бульбович

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

**ИНЖЕНЕРНАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ
КРИВОЛИНЕЙНОГО ПРОФИЛЯ ПЛОСКИМ
СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ**

На основе методики расчета течения Прандтля – Майера предложена инженерная методика расчета термодинамических параметров плоского сверхзвукового потока, обтекающего криволинейный профиль. Инженерная методика базируется на идентифицированной на основании численных исследований эмпирической формуле, связывающей угол поворота потока с начальной и конечной приведенными скоростями. Предложенная формула позволяет проводить газодинамические расчеты для газов, имеющих коэффициент адиабаты, отличный от $k = 1,4$.

Ключевые слова: течение Прандтля – Майера, обтекание плоской стенки, угол поворота потока, термодинамические параметры, коэффициент адиабаты, формула А.Я. Черкеза.

I.V. Khramtsov, E.V. Sorokin, R.V. Bulbovich

Perm National Research Politechnic University

**THE ENGINEERING METHOD TO CALCULATION
OF THE CURVILINEAR SHAPE FLAT-SUPERSONIC FLOW**

On the basis of Prandtl-Mayer flow procedure the engineer method of thermodynamic parameters calculation for curvilinear shape flow is proposed. The engineering method is based on the empirical formula linking the flow rotation angle with the start and end relative velocities. The proposed formula allows to carry out gasdynamic calculations for gases with ratio of specific heats not equal 1,4.

Keywords: Prandtl-Mayer flow, flow around a flat wall, flow rotation angle, thermodynamic parameters, ratio of specific heats, Cherkez formula.

Расчет параметров плоского сверхзвукового потока, обтекающего криволинейную стенку (например, стенку сверхзвуковой части сопла Лавалья), сводится к поэтапному решению задачи обтекания внешнего тупого угла. Течение, которое возникает в этом случае, получило название течения Прандтля – Майера [1–3].

В основу математической модели, описывающей течение Прандтля – Майера, положена модель безвихревого обтекания внешнего тупого угла сверхзвуковым потоком, постоянство термодинамических параметров потока вдоль характеристики, нормальная составляющая

скорости к которой равна скорости звука, а также уравнение энергий, записанное в кинематической форме.

Названная система уравнений в полярной системе координат (r, φ) имеет вид

$$\frac{dw_r}{d\varphi} - w_u = 0,$$

$$w_u = a, \quad (1)$$

$$\frac{w_u^2}{k-1} + \frac{w_r^2 + w_u^2}{2} = \frac{w_{\max}^2}{2},$$

где w_r, w_u – радиальная и тангенциальная составляющие вектора скорости; φ – угол поворота потока; a – скорость звука; k – коэффициент адиабаты.

Решение системы (1) сводится к рабочему выражению (2), описывающему зависимость приведенной скорости потока λ от угла поворота потока φ :

$$\lambda^2 = 1 + \frac{2}{k-1} \sin^2 \left(\sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \varphi \right). \quad (2)$$

Однако такой подход является справедливым, если на внешний тупой угол набегает звуковой поток $w_u = a$. В случае набегания сверхзвукового потока вводится некоторая фиктивная стенка, вдоль которой движется фиктивный звуковой поток, и начало системы отсчета угла φ сдвигается по направлению к набегающему потоку на угол φ_n , определяемый выражением (3):

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arcsin \sqrt{\frac{k-1}{2} (\lambda_n^2 - 1)}, \quad (3)$$

где λ_n – приведенная скорость набегающего потока.

С введением фиктивной системы методика расчета термодинамических параметров сверхзвукового потока усложняется и включает следующие этапы:

1. Определяется угол наклона первой характеристики, с которой начинается поворот потока:

$$\alpha_n = \arcsin \frac{1}{M_n},$$

где M_n – число Маха набегающего потока.

2. Определяется дополнительный фиктивный угол поворота потока

$$\delta_n = \varphi_n + \alpha_n - \frac{\pi}{2}.$$

3. Определяется полный фиктивный угол поворота потока δ_k

$$\delta_k = \delta_n + \delta_0,$$

где δ_0 – реальный угол поворота потока.

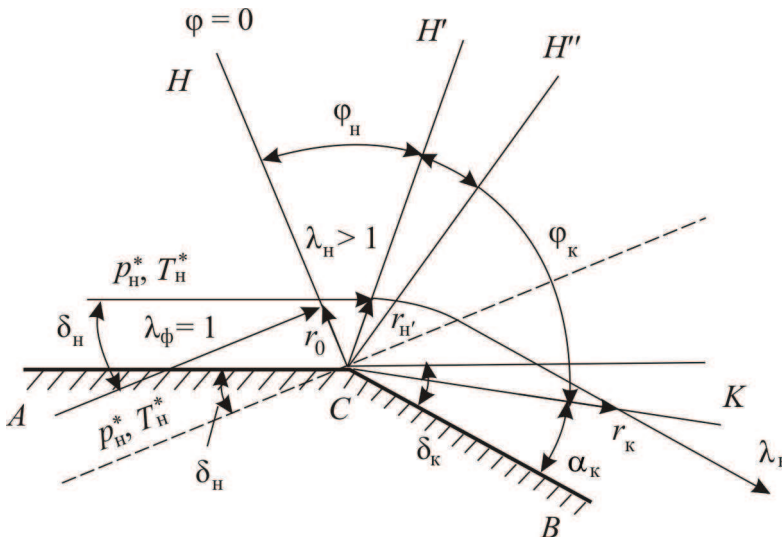


Рис. 1. Схема течения Прандтля – Майера при $\lambda_n > 1$

В соответствии с рис. 1 угол δ_k может быть также определен через углы φ_k и α_k , соответствующие потоку после его поворота:

$$\delta_k = \varphi_k + \alpha_k - \frac{\pi}{2}. \quad (4)$$

Выразив углы φ_k и α_k через приведенную скорость потока после поворота, получаем нелинейное уравнение (5) для определения λ_k :

$$\delta_k = \sqrt{\frac{k+1}{k-1}} \arcsin \sqrt{\frac{k-1}{2}(\lambda_k^2 - 1)} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\frac{k+1}{2}\lambda_k^2}{k-1}}} - \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Уравнение (5) не имеет аналитического решения, и для отыскания λ_k используются численные методы. Понимая громоздкость вычислений, А.Я. Черкез [1] предложил феноменологическую формулу (6), связывающую приведенные скорости потока, набегающего на внешний тупой угол λ_n , и развернувшегося потока λ_k с углом поворота потока δ_0 :

$$\delta_0 = K(\lambda_k^3 - \lambda_n^3), \quad (6)$$

где $K = 7,6$.

Формула А.Я. Черкеза справедлива лишь для воздушного потока, для которого $k = 1,4$. При расчете сверхзвуковых течений других газов (например, продуктов сгорания ракетных топлив), имеющих показатели адиабаты, отличные от $k = 1,4$, приходится многократно использовать численную процедуру решения уравнения (5).

Для сокращения временных затрат инженерных расчетов обтекания плоскими потоками криволинейных стенок газами, имеющими показатели адиабаты, отличные от $k = 1,4$, в данной работе получена эмпирическая зависимость, близкая по своей структуре формуле, предложенной А.Я. Черкезом.

Для получения эмпирической формулы была составлена программа в среде Mathcad и проведены численные расчеты, в которых показатель адиабаты изменялся в диапазоне от 1,2 до 1,55 с шагом 0,05, а реальный угол поворота потока δ_0 принимал значения 10, 20 и 30°. Следует отметить, что значения $\delta_0 \geq 35^\circ$ не представляют интереса в связи с возникновением при этих углах отрывных течений при расширении сверхзвукового потока [4].

В таблице приведены результаты расчета значений коэффициента K для выбранного диапазона изменения коэффициента адиабаты и угла $\delta_0 = 10^\circ$.

Анализ данных, приведенных в таблице, показывает, что значения коэффициента K зависят как от показателя адиабаты, так и от скорости (M_n) набегающего потока. Хотя результаты численного расчета

достаточно хорошо согласуются со значением $K = 7,6$, полученным А.Я. Черкезом, заметна зависимость этого коэффициента от числа M_n . Погрешность определения угла δ_0 по формуле А.Я. Черкеза действительно не превышает 1° .

Значения коэффициента K при $\delta_0 = 10^\circ$

k	Значение числа M_n								
	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9
1,20	7,7163	7,7471	7,5584	7,2764	6,9642	6,6535	6,3594	6,0886	5,8432
1,25	7,8564	7,9237	7,7745	7,5317	7,257	6,9815	6,7206	6,4809	6,2649
1,30	7,9952	8,0981	7,9875	7,7831	7,5454	7,3051	7,0774	6,8691	6,6829
1,35	8,1329	8,2704	8,1975	8,0309	7,8297	7,6244	7,4298	7,2532	7,0971
1,40	8,2693	8,4408	8,4047	8,2751	8,1101	7,9394	7,7780	7,6331	7,5075
1,45	8,4047	8,6092	8,6092	8,5161	8,3868	8,2504	8,1221	8,009	7,9140
1,50	8,5390	8,7759	8,8112	8,7540	8,6598	8,5575	8,4621	8,3808	8,3166
1,55	8,6724	8,9409	9,0108	8,9888	8,9293	8,8609	8,7982	8,7486	8,7154

В качестве регрессионной модели для описания коэффициента K предложена формула, учитывающая его двухфакторную зависимость от показателя адиабаты k и числа M_n при наличии смешанного эффекта $M_n k$ в виде

$$K = b_{12} M_n k - b_2 M_n - b_1 k + b_0.$$

В результате процедуры параметрической идентификации с использованием метода наименьших квадратов была получена формула, близкая по своей структуре к формуле А.Я. Черкеза:

$$\delta_0 = (6,76 M_n k - 10,33 M_n - 3,56 k + 14,211)(\lambda_k^3 - \lambda_n^3). \quad (7)$$

Погрешность определения угла δ_0 по формуле (7) не превышает 2° .

Инженерная методика определения термодинамических параметров плоского сверхзвукового потока, обтекающего криволинейный профиль, приведенный на рис. 2, включает следующие этапы:

1. Определение δ_1 для начальной точки профиля по известной зависимости $y = f(x)$.

2. Определение λ_{k1} для первой точки, для которой известны δ_1 , λ_{n1} и M_{n1} .

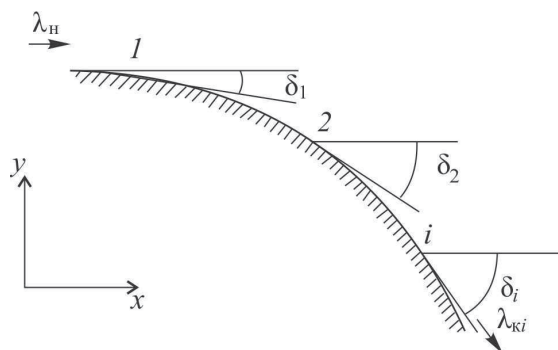


Рис. 2. К инженерной методике расчета плоского сверхзвукового течения

3. Определение термодинамических параметров потока в точке 1 по известным зависимостям:

$$p_1 = p^* \pi(\lambda_{к1}), \quad T_1 = T^* \tau(\lambda_{к1}), \quad \rho_1 = \rho^* \varepsilon(\lambda_{к1}), \quad w_1 = a_{кр} \lambda_{к1},$$

где p_1 , ρ_1 , T_1 – основные термодинамические параметры; p^* , ρ^* , T^* – параметры заторможенного потока.

4. Переход к следующей точке профиля с переопределением $\lambda_{н2} = \lambda_{к1}$.

5. Возврат к п. 1 и т.д.

Таким образом, предложена инженерная методика расчета термодинамических параметров плоского сверхзвукового потока, обтекающего криволинейный профиль. Инженерная методика базируется на идентифицированной на основании численных исследований эмпирической формуле, связывающей угол поворота потока с начальной и конечной приведенными скоростями. Предложенная формула позволяет проводить газодинамические расчеты для газов, имеющих коэффициент адиабаты, отличный от $k = 1,4$, с погрешностью определения угла δ_0 , не превышающей 2° .

Библиографический список

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика . – М.: Наука, 1991. – 600 с.
2. Зуев Ю.В. Одномерные течения жидкостей и газов. – М.: Изд-во МАИ, 2004. – 80 с.

3. Долгушев С.В., Фомин В.М. Течение Прандтля – Майера смеси газов с большим различием молекулярных масс // Прикладная механика и техническая физика. – 1997. – № 1. – С. 65–70.

4. Головачев Ю.П., Леонтьева Н.В. Численное исследование поперечного отрыва в пространственных сверхзвуковых течениях около круговых конусов // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, № 10. – С. 20–26.

References

1. Abramovich G.N. *Prikladnaya gazovaya dinamika* [Applied gas dynamics]. Moscow: Nauka, 1991, 600 p.

2. Zuev Yu.V. *Odnomernye techeniya zhidkostey i gazov* [One-dimensional flow of liquids and gases]. Moscow. Moskovskiy aviatsionnyi institut, 2004, 80 p.

3. Dolgushev S.V., Fomin V.M. *Techenie Prandtlya-Mayera smesi gazov s bolshim razlichiem molekulyarnykh mass* [Prandtl-Mayer flow of gas mixture with considerable difference between molecular masses]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 1997, no. 1, pp. 65–70.

4. Golovachev Yu.P., Leonteva N.V. *Chislennoe issledovanie poperechnogo otryva v prostranstvennykh sverkhzvukovykh techeniyakh okolo krugovykh konusov* [Numerical investigation of transverse separation in spatial supersonic flows near circular cones]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*, 1998, vol. 68, no. 10, pp. 20–26.

Об авторах

Храмцов Игорь Валерьевич (Пермь, Россия) – студент кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические установки» ФГБОУ ВПО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: rkt@pstu.ru).

Сорокин Евгений Вадимович (Пермь, Россия) – студент кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические установки» ФГБОУ ВПО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: rkt@pstu.ru).

Бульбович Роман Васильевич (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Ракетно-космическая техника и энергетические установки», декан аэрокосмического факультета, ФГБОУ ВПО ПНИПУ (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: dekan_akf@pstu.ru).

About the authors

Khrantsov Igor Valeryevich (Perm, Russian Federation) – Student Department of Rocket and Space Technology, Generating Units, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: rkt@pstu.ru).

Sorokin Evgeniy Vadimovich (Perm, Russian Federation) – Student Department of Rocket and Space Technology, Generating Units, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: rkt@pstu.ru).

Bulbovich Roman Vasilyevich (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Rocket and Space Technology, Generating Units, Dean of Aerospace Faculty, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: dekan_akf@pstu.ru).

Получено 2.04.2012