

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Раухваргер А.Б., Соловьев М.Е., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х. Об определении эффективных параметров теплопередачи пористых слоев по фрагментам фотографий срезов // Вестник ПНИПУ. Машиностроение. Материаловедение. – 2023. – Т. 25, № 4. – С. 5–15. DOI: 10.15593/2224-9877/2023.4.01

Please cite this article in English as:

Raukhvarger A.B., Soloviev M.E., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh. About the determination of the effective parameters of heat transfer of porous layer from fragments of photographs of sections. *Bulletin of PNRPU. Mechanical engineering, materials science*. 2023, vol. 25, no. 4, pp. 5-15. DOI: 10.15593/2224-9877/2023.4.01

ВЕСТНИК ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение
Т. 25, № 4, 2023
Bulletin PNRPU. Mechanical engineering, materials science
<http://vestnik.pstu.ru/mm/about/inf/>

Научная статья

DOI: 10.15593/2224-9877/2023.4.01

УДК 621.793.74:536.521.2

А.Б. Раухваргер¹, М.Е. Соловьев¹, С.Л. Балдаев², Л.Х. Балдаев²

¹Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Российская Федерация

²Технологические системы защитных покрытий, Москва, г. Щербинка, Российская Федерация

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ
ПОРИСТЫХ СЛОЕВ ПО ФРАГМЕНТАМ ФОТОГРАФИЙ СРЕЗОВ**

Предложен метод расчета эффективной теплопроводности пористых слоев, сформированных плазменным напылением, на основании данных, получаемых с цифровых фотографий срезов слоев. Рассматривается конкретная двумерная стационарная задача теплопроводности на реальном фрагменте среза, где порам приписывается теплопроводность воздуха, а остальной части – теплопроводность напыленного вещества в твердом состоянии. Эффективная теплопроводность определяется из сравнения результатов численного решения такой задачи с аналитическим решением аналогичной задачи при постоянной теплопроводности, сводящейся к одномерной. Для численного решения двумерной стационарной задачи используется обобщение известного численного метода решения уравнения Лапласа, называемого процессом Либмана. Такой подход проверен на проведенных ранее расчетах методом конечных элементов на модели ячейки с включениями в форме кругов, что показало хорошее совпадение результатов. Также произведено сравнение результатов расчета на двумерной модели кругов с трехмерной моделью шаров. При этом обнаружено, что отличие результатов незначительно, что позволяет считать расчеты на реальных двумерных срезах допустимыми для определения эффективной теплопроводности. Проведены расчеты на фрагментах фотографий срезов 25 образцов, созданных при разных технологических режимах. Результаты расчетов сравнивались с результатами на модели кругов при таких же теплопроводностях вещества и пор, как и в реальных образцах. Обнаружено, что зависимость эффективной теплопроводности от пористости, определяемой отношением суммарной площади пор к общей площади фрагмента, для реальных образцов лежит значительно ниже, чем для модели кругов, а кроме того, обладает меньшей регулярностью. На основании этого сделан вывод о существенном влиянии на зависимость теплопроводности от пористости статистики конкретных форм пор, возможность параметризации которой подлежит дальнейшим исследованиям.

Ключевые слова: пористые слои, плазменное напыление, пористость, уравнение теплопроводности, эффективная теплопроводность, эффективная объемная теплоемкость, разностная схема, процесс Либмана, модель, цифровые фотографии.

A.B. Raikhvarger¹, M.E. Soloviev¹, S.L. Baldaev², L.Kh. Baldaev²

¹Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russian Federation

²LLC "Technological systems of protective coatings", Moscow, Shcherbinka, Russian Federation

ABOUT THE DETERMINATION OF THE EFFECTIVE PARAMETERS OF HEAT TRANSFER OF POROUS LAYER FROM FRAGMENTS OF PHOTOGRAPHS OF SECTIONS

A method is proposed for calculating the effective thermal conductivity of porous layers formed by plasma spraying, based on data obtained from digital photographs of sections of layers. A specific two-dimensional stationary thermal conductivity problem is considered on a real slice fragment, where the thermal conductivity of air is attributed to the pores, and the thermal conductivity of the sprayed substance in the solid state is attributed to the rest. The effective thermal conductivity is determined by comparing the results of the numerical solution of such a problem with the analytical solution of a similar problem with a constant thermal conductivity, which reduces to one-dimensional. For the numerical solution of a two-dimensional stationary problem, a generalization of the well-known numerical method for solving the Laplace equation, called the Liebman process, is used. This approach was tested on the previously carried out calculations by the finite element method on a cell model with inclusions in the form of circles, which showed a good coincidence of the results. The calculation results were also compared on a two-dimensional model of circles with a three-dimensional model of balls. At the same time, it was found that the difference in the results is insignificant, which allows us to consider calculations on real two-dimensional slices acceptable for determining the effective thermal conductivity. Calculations were carried out on fragments of photographs of sections of 25 samples created under different technological modes. The results of the calculations were compared with the results on the model of circles with the same thermal conductivity of the substance and pores as in real samples, it was found that the dependence of the effective thermal conductivity on porosity, determined by the ratio of the total area of the pores to the total area of the fragment, for real samples lies much lower than for the model of circles, and in addition, has less regularity. Based on this, it is concluded that the dependence of thermal conductivity on porosity has a significant effect on the statistics of specific pore forms, the possibility of parameterization of which is subject to further research.

Keywords: porous layers, plasma spraying, porosity, thermal conductivity equation, effective thermal conductivity, effective volumetric heat capacity, difference scheme, Liebman process, model, digital photographs.

Введение

Процесс плазменного напыления покрытий [1–4] приводит к формированию пористых слоев. В связи с этим свойства таких слоев существенно отличаются от монолитных состояний тех же материалов. В зависимости от назначения слоев, этот факт может играть как отрицательную, так и положительную роль [5–7].

В связи с этим определение и возможность прогнозирования свойств таких покрытий (теплотехнических, электрических, механических) представляет значительный интерес. Проблема осложняется тем, что конкретные варианты форм пор и их распределение по размерам зависят от напыляемого материала и конкретных технологических режимов напыления.

Что касается тепловых свойств, экспериментальные методы их определения [8–17] требуют, в применении к таким слоям, больших трудовых и материальных затрат, тем более, если требуется установить закономерности связи тепловых параметров с параметрами технологических режимов.

Ранее [18] были произведены расчеты эффективной теплопроводности на двухмерной модели ячейки материала, содержащей включенную область с низкой теплопроводностью, которая может моделировать пору, с использованием метода конечных элементов [19]. В этих расчетах, в частности, выяснилось, что эффективная теплопроводность зависит не только от доли площади включения от полной площади ячейки, но и конкретной формы области включения. Это говорит о том, что

для определения эффективной теплопроводности пористого материала нужно иметь дело с конкретным реальным распределением размеров пор и их форм.

Были также проведены комплексные исследования по цифровым фотографиям срезов пористых слоев с автоматическим определением доли суммарной площади пор [20]. С одной стороны, такие цифровые фотографии могут служить областями, на которых реализуются численные алгоритмы расчета, с другой стороны, большой разброс размеров и вариаций форм пор, делает затруднительным применение на таких областях метода конечных элементов.

Таким образом, для расчетов на реальных образцах требуется найти метод, позволяющий в качестве исходной геометрии области расчета принимать фрагменты фотографий срезов, обладающий при этом достаточной скоростью сходимости.

В настоящей работе для этой цели предлагается использовать обобщение известного алгоритма решения уравнения Лапласа, называемого процессом Либмана [21; 22], применительно к стационарному уравнению теплопроводности в случае, когда теплопроводность непостоянна.

1. Первичная обработка фотографий срезов

В работе [20] описан алгоритм выделения пор на фрагментах фотографий срезов (рис. 1) и приведена специально разработанная программа, реализующая этот алгоритм.

Кроме того, программа определяет пористость q как отношение количества пикселей в

где λ_M и λ_{II} – коэффициенты теплопроводности в материале и в порах, g_M и g_{II} – объемные теплоемкости в материале и в порах, вычисляемые по формуле (4) для материала и пор соответственно.

Поскольку при постоянном значении объемной теплоемкости и температуры количество тепловой энергии пропорционально объему, эффективное значение этого параметра можно получить простым усреднением с использованием величины пористости q , рассчитанной по фотографии среза (1), что дает

$$g_{\text{эфф}} = (1-q)g_M + qg_{II}. \quad (10)$$

Для определения эффективной теплопроводности следует поставить и решить определенную конкретную задачу по уравнению теплопроводности на материале с порами и на однородном материале с неопределенной теплопроводностью, и из сравнения результатов определить теплопроводность во втором варианте. Это и будет эффективная теплопроводность.

Для независимого от объемной теплоемкости определения эффективной теплопроводности следует ограничиться стационарной задачей ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), что в соответствии с выражением (7) дает

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (11)$$

Поскольку речь идет об определении эффективной теплопроводности по фрагментам фотографий срезов, удобно для этой цели рассмотреть стационарную задачу с граничными условиями, проиллюстрированными на рис. 3.

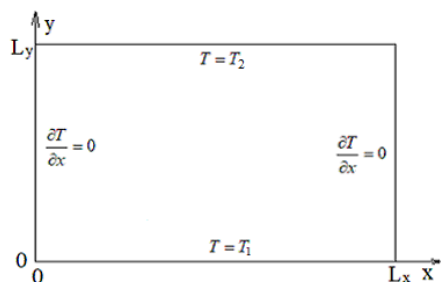


Рис. 3. Граничные условия для рассматриваемой двухмерной задачи

На нижней и верхней границах поддерживаются постоянные температуры T_1 и T_2 , соответственно

$$T(x, 0) = T_1, \quad (12)$$

$$T(x, L_y) = T_2. \quad (13)$$

На левой и правой границах осуществляется тепловая изоляция

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \quad (15)$$

где L_x и L_y – ширина и высота фрагмента соответственно.

При постоянной теплопроводности эта двухмерная задача эквивалентна простой одномерной задаче: уравнение $\frac{d^2 T}{dy^2} = 0$, при граничных условиях $T(0) = T_1$, $T(L_y) = T_2$, решением которой является линейная функция

$$T = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{L_y} y. \quad (16)$$

Стационарная плотность потока в этом случае, в соответствии с (2), будет определяться выражением

$$J = \lambda_{\text{эфф}} \frac{T_1 - T_2}{L_y}. \quad (17)$$

Значение $\lambda_{\text{эфф}}$ можно тогда определить, приравняв плотности потока (17) средней по горизонтали плотности потока в двухмерной задаче при наличии пор. Поскольку решение двухмерной задачи с непостоянной теплопроводностью возможно только численными методами, значение плотности потока на разных горизонталях будет несколько отличаться из-за погрешности численного метода, следует взять среднее арифметическое от средних значений на нижней и верхней границах. Тогда из (17) получим

$$\lambda_{\text{эфф}} = \frac{(J_1 + J_2)L_y}{2(T_1 - T_2)}, \quad (18)$$

где J_1 и J_2 – средние плотности потоков на нижней и верхней границах соответственно по решению двухмерной задачи с непостоянной теплопроводностью.

Поскольку исходная информация о порах задается в виде матрицы срезов, удобно использовать метод конечных разностей с шагом сетки, равным цене пикселя. Сами пиксели следует рассматривать как узлы сетки.

Построим конечно-разностную замену левой части (11) по обычным правилам [23–25]: первые производные заменяются отношением конечных

приращений при возрастании координаты, а вторые – при убывании координаты. Тогда для первых производных получим

$$\frac{\partial T}{\partial x} \longrightarrow \frac{1}{h}(T_{i+1,j} - T_{i,j}), \quad (19)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \longrightarrow \frac{1}{h}(T_{i,j+1} - T_{i,j}), \quad (20)$$

где h – цена пикселя в изображении, i, j – координатные индексы пикселей по вертикали и горизонтали соответственно $i \in [0, \ell_y - 1]$, $j \in [0, \ell_x - 1]$, ℓ_y и ℓ_x – количества пикселей по высоте и по ширине изображения, $T_{i,j}$ – температура в точке, соответствующей положению пикселя с координатными индексами i, j .

При этом для вторых производных с учетом непостоянства λ получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \frac{1}{h^2} [\lambda_{i,j} T_{i+1,j} + \lambda_{i-1,j} T_{i-1,j} - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i-1,j}) T_{i,j}], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \frac{1}{h^2} [\lambda_{i,j} T_{i,j+1} + \lambda_{i,j-1} T_{i,j-1} - (\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1}) T_{i,j}], \end{aligned} \quad (22)$$

где $\lambda_{i,j}$ – теплопроводность в точке, соответствующей данному пикселю, определяемая в зависимости от того, принадлежит ли пиксель поре или нет, в соответствии с (8).

Для внутренних точек рассматриваемого фрагмента вместо (11) из (21) и (22) получим разностные уравнения

$$\begin{aligned} & \lambda_{i,j} (T_{i+1,j} + T_{i,j+1}) + \lambda_{i-1,j} T_{i-1,j} + \lambda_{i,j-1} T_{i,j-1} = \\ & = (2\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1} + \lambda_{i-1,j}) T_{i,j}, \quad (23) \\ & i \in [1, \ell_y - 2], \\ & j \in [1, \ell_x - 2]. \end{aligned}$$

Для граничных точек получим уравнения из соответствующей замены граничных условий (12)–(15):

– для нижней границы

$$T_{j,0} = T_1, \quad j = 0, 1, \dots, \ell_x - 1; \quad (24)$$

– для верхней границы

$$T_{j,\ell_y-1} = T_2, \quad j = 0, 1, \dots, \ell_x - 1; \quad (25)$$

– для боковых границ

$$T_{i,0} = T_{i,1}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell_y - 2; \quad (26)$$

$$T_{i,\ell_x-1} = T_{i,\ell_x-2}, \quad i = 1, 2, \dots, \ell_y - 2. \quad (27)$$

Для разрешения рассмотренной разностной схемы будем использовать следующий алгоритм.

Зададим начальное приближение в соответствии со стационарным решением при постоянной теплопроводности в соответствии с (16)

$$T_{i,j}^{[0]} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ell_y} i \quad (28)$$

для всех точек рассматриваемой области. Далее для внутренних точек будем осуществлять шаги итераций по рекуррентной формуле

$$T_{i,j}^{[k+1]} = \frac{\lambda_{i,j} (T_{i+1,j}^{[k]} + T_{i,j+1}^{[k]}) + \lambda_{i-1,j} T_{i-1,j}^{[k]} + \lambda_{i,j-1} T_{i,j-1}^{[k]}}{2\lambda_{i,j} + \lambda_{i,j-1} + \lambda_{i-1,j}}, \quad (29)$$

корректируя после каждого шага значения температуры в точках боковых границ в соответствии с (26) и (27)

$$T_{i,0}^{[k+1]} = T_{i,1}^{[k+1]}, \quad (30)$$

$$T_{i,\ell_x-1}^{[k+1]} = T_{i,\ell_x-2}^{[k+1]} \quad (31)$$

и оставляя значения на горизонтальных границах неизменными в соответствии с (24) и (25)

$$T_{j,0}^{[k+1]} = T_1, \quad (32)$$

$$T_{j,\ell_y-1}^{[k+1]} = T_2, \quad (33)$$

пока норма отклонений температур на текущем шаге от значений на предыдущем шаге не станет меньше задаваемой достаточно малой величины. Когда это будет достигнуто, значения температур с соответствующей точностью будут удовлетворять разностным уравнениям (23) и граничным условиям (24)–(27). После этого следует вычислить средние плотности потоков на нижней и верхней границах

$$J_1 = \frac{1}{\ell_x} \sum_{j=0}^{\ell_x-1} \lambda_{0,j} \frac{(T_{0,j} - T_{1,j})}{h}, \quad (34)$$

$$J_2 = \frac{1}{\ell_x} \sum_{j=0}^{\ell_x-1} \lambda_{\ell_y-1,j} \frac{(T_{\ell_y-2,j} - T_{\ell_y-1,j})}{h} \quad (35)$$

и вычислить эффективную теплопроводность по формуле (18).

Этот алгоритм представляет собой обобщение так называемого процесса Либмана [21; 22], предназначенного для численного решения уравнения Лапласа, к которому сводится двумерная стационарная задача по уравнению теплопроводности, когда теплопроводность постоянна. Поскольку сходимость доказана только для этого случая, наше обобщение следует считать эвристическим алгоритмом, что требует контроля сходи-

мости при его применении и проверки на задачах, решенных другими гарантированно сходящимися численными методами.

В дальнейшем изложенный алгоритм будем называть обобщенным процессом Либмана. В многочисленных осуществленных нами расчетах этот алгоритм по факту сходиллся.

3. Проверка обобщенного процесса Либмана на результатах расчета методом конечных элементов

Описанный в предыдущем разделе алгоритм удобно проверить сравнением с расчетами, проведенными методом конечных элементов в [18] на модели кругов, расположенных в центре ячейки и случайным образом.

С этой целью разработана специальная программа, имитирующая матрицу фрагмента с порами в виде дискретного приближения регулярно расположенных кругов и проводящая расчет эффективной теплопроводности по описанному в предыдущем разделе алгоритму.

Имитация матрицы фрагмента состоит в следующем.

Задаются размеры матрицы ℓ_y и ℓ_x , количество кругов n и затравочная пористость q_3 . Строится матрица соответствующих размеров и заполняется значениями 0. Определяется площадь круговой поры в пикселях

$$N_{\Pi} = \frac{q \ell_x \ell_y}{n} \quad (36)$$

и соответственно радиус круга

$$r = \sqrt{\frac{N_{\Pi}}{\pi}}. \quad (37)$$

Для регулярного расположения кругов по матрице фрагмента полагается, что количества кругов по горизонтали n_x и по вертикали n_y пропорциональны соответствующим размерам матрицы

$$n_x = \gamma \ell_x, \quad (38)$$

$$n_y = \gamma \ell_y, \quad (39)$$

где γ – коэффициент пропорциональности, определяемый выражением

$$\gamma = \sqrt{\frac{n}{\ell_x \ell_y}}. \quad (40)$$

В соответствии с (38) и (39) шаги расположения кругов по горизонтали и по вертикали будут одинаковыми и равные значению, обратному γ

$$s = \sqrt{\frac{\ell_x \ell_y}{n}}. \quad (41)$$

Индексы центров кругов в матрице вычисляются округлением до целого результатов выражений

$$j_v = \left(\frac{1}{2} + v \right) s, \quad v = 0, 1, 2, \dots, n_x - 1, \quad (42)$$

$$i_w = \left(\frac{1}{2} + w \right) s, \quad w = 0, 1, 2, \dots, n_y - 1, \quad (43)$$

где v и w – индексы расположения кругов по вертикали и по горизонтали соответственно.

Далее последовательно проходятся квадраты размером $s \times s$, в каждом из которых расположен соответствующий круг, при этом элементы матрицы фрагмента, отстоящие от центров кругов не более чем на радиус (37) $(i - i_v)^2 + (j - j_w)^2 \leq r^2$, заполняются значениями 1.

Поскольку при моделировании кругов проводятся округления, реальная пористость может существенно отличаться от затравочной. В связи с этим для каждого варианта расчета определяется реальная пористость проходом всей матрицы и подсчетом элементов, содержащих значения 1.

С помощью данной модели проведены расчеты, описанные в предыдущем разделе алгоритмом, в определенных диапазонах реальной пористости и количества кругов. Теплопроводности материала и пор брались такими же, как в рассматриваемых расчетах методом конечных элементов:

$$\lambda_M = 100 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \lambda_{\Pi} = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

На рис. 4 приведены результаты расчетов в сравнении с расчетами по методу конечных элементов для регулярных и случайных кругов в ячейках, которые очень хорошо соответствуют друг другу.

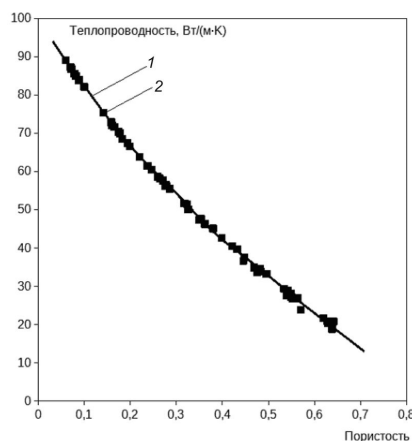


Рис. 4. Сравнение расчетов по методу конечных элементов и по обобщенному процессу Либмана: 1 – сплайн, проходящий через точки, рассчитанные по методу конечных элементов; 2 – точки, рассчитанные по обобщенному процессу Либмана

4. Сравнение двухмерной задачи с трехмерной

Фотографии срезов позволяют определить эффективную теплопроводность для двухмерной задачи. Однако возникает вопрос, насколько хорошо определенный таким образом параметр будет описывать реальное трехмерное распространение тепла в пористом материале.

Если материал однороден, то двухмерные пористости в разных параллельных друг другу срезах будут отличаться не более статистической погрешности. Отсюда следует, что и объемная пористость (отношение суммарного объема пор к полному объему трехмерного фрагмента) будет с точностью до статистической погрешности равна двухмерной (определенной по фотографиям срезов).

Тогда для решения поставленного вопроса можно сравнить результаты расчета на модели кругов с результатами на аналогичной трехмерной модели: шарообразные регулярно расположенные шары, моделирующие поры в трехмерном фрагменте.

Трехмерная стационарная задача по уравнению теплопроводности, аналогичная двухмерной задаче, рассматриваемой в предыдущих разделах, иллюстрируется на рис. 5.

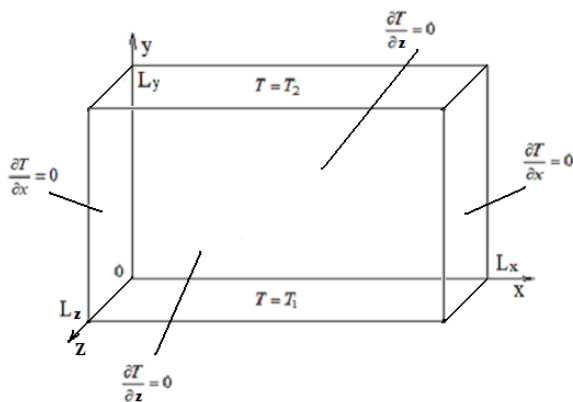


Рис. 5. Граничные условия для рассматриваемой трехмерной задачи

Температура теперь является функцией трех переменных $T(x, y, z)$.

На нижней и верхней границах по-прежнему поддерживаются постоянные температуры T_1 и T_2 , соответственно

$$T(x, 0, z) = T_1, \quad (44)$$

$$T(x, L_y, z) = T_2. \quad (45)$$

На левой и правой границах осуществляется тепловая изоляция

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad (46)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L_x} = 0, \quad (47)$$

как и на задней и передней границах

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad (48)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L_z} = 0, \quad (49)$$

где L_x , L_y и L_z – соответствующие размеры трехмерного фрагмента.

Проводя выкладки, подобные проведенным в разделе 2, для трехмерного случая получим рекуррентную формулу обобщенного процесса Либмана в виде

$$T_{i,j,f}^{[k+1]} = \frac{\lambda_{i,j,f}(T_{i+1,j,f}^{[k]} + T_{i,j+1,f}^{[k]} + T_{i,j,f+1}^{[k]}) + \lambda_{i-1,j,f}T_{i-1,j,f}^{[k]} + \lambda_{i,j-1,f}T_{i,j-1,f}^{[k]} + \lambda_{i,j,f-1}T_{i,j,f-1}^{[k]}}{3\lambda_{i,j,f} + \lambda_{i-1,j,f} + \lambda_{i,j-1,f} + \lambda_{i,j,f-1}}, \quad (50)$$

а корректировка значений в граничных точках будет определяться формулами

$$T_{i,0,f}^{[k+1]} = T_{i,1,f}^{[k+1]}, \quad (51)$$

$$T_{i,\ell_x-1,f}^{[k+1]} = T_{i,\ell_x-2,f}^{[k+1]}, \quad (52)$$

$$T_{i,j,0}^{[k+1]} = T_{i,j,1}^{[k+1]}, \quad (53)$$

$$T_{i,j,\ell_z-1}^{[k+1]} = T_{i,j,j,\ell_z-2}^{[k+1]}. \quad (54)$$

Здесь $i \in [0, \ell_y - 1]$, $j \in [0, \ell_x - 1]$, $f \in [0, \ell_z - 1]$ – индексы, соответствующие координатам y , x , z соответственно, ℓ_y , ℓ_x , ℓ_z – количества элементов трехмерной матрицы по соответствующим направлениям.

Вычисление средних плотностей потока на нижней и верхней границах будет теперь, в отличие от (34) и (35), вычисляться двухмерным усреднением

$$J_1 = \frac{1}{\ell_x \ell_f} \sum_{f=0}^{\ell_z-1} \sum_{j=0}^{\ell_x-1} \lambda_{0,j,f} \frac{(T_{0,j,f} - T_{1,j,f})}{h}, \quad (55)$$

$$J_2 = \frac{1}{\ell_x \ell_f} \sum_{f=0}^{\ell_z-1} \sum_{j=0}^{\ell_x-1} \lambda_{\ell_y-1,j,f} \frac{(T_{\ell_y-2,j,f} - T_{\ell_y-1,j,f})}{h}. \quad (56)$$

Модель шаров строится наподобие модели кругов с учетом трехмерности.

Количество элементов в шаре определяется выражением

$$N_{\Pi} = \frac{q \ell_x \ell_y \ell_z}{n}, \quad (57)$$

а радиус шара – по формуле

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3N_{\Pi}}{\pi}}. \quad (58)$$

Шаги в расположении шаров по всем трем направлениям будут определяться следующим образом

$$s = \sqrt{\frac{\ell_x \ell_y \ell_z}{n}}, \quad (59)$$

а положения центров шаров определяться выражениями

$$j_v = \left(\frac{1}{2} + v\right)s, \quad v = 0, 1, 2, \dots, n_x - 1, \quad (60)$$

$$i_w = \left(\frac{1}{2} + w\right)s, \quad w = 0, 1, 2, \dots, n_y - 1, \quad (61)$$

$$f_u = \left(\frac{1}{2} + u\right)s, \quad u = 0, 1, 2, \dots, n_z - 1. \quad (62)$$

На рис. 6 приведены результаты расчета эффективной теплопроводности по специально разработанной программе для трехмерной модели, в сравнении с расчетом по двумерной, изложенном в предыдущем разделе при тех же исходных данных.

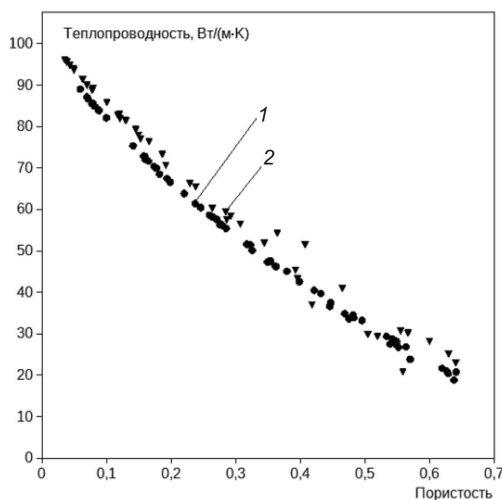


Рис. 6. Сравнение расчетов эффективной теплопроводности на трехмерной и двумерной моделях: 1 – расчет по двумерной модели; 2 – расчет по трехмерной модели

Из представленных результатов видно, что трехмерный расчет дает менее регулярную зависимость, что объясняется необходимостью в трехмерном случае задавать меньшую допустимую погрешность промежуточных вычислений, что, однако, приведет к значительному увеличению времени выполнения, так как и сам обход трехмерной области на каждом шаге значительно умень-

шает производительность по сравнению с двумерным расчетом.

Тем не менее заметна общая закономерность: зависимость эффективной теплопроводности от пористости в трехмерной модели в среднем идет несколько выше, чем в двумерной. Это отклонение, однако, незначительно, что говорит о правомочности оценки эффективной теплопроводности по двумерным срезам.

5. Расчеты по реальным срезам и сравнение с расчетами по модели кругов

С помощью специально разработанной программы, реализующей алгоритм, изложенный в разделе 2, и загружающей матрицы фрагментов из файлов, полученных по фотографиям реальных срезов, произведены расчеты для 25 образцов, которые были изготовлены с разными технологическими режимами. В отличие от модели кругов, как видно на примерах (см. рис. 1, 2), на реальных срезах поры присутствуют разных размеров и всевозможных форм.

В качестве исходных теплопроводностей брались значения теплопроводности оксида алюминия

$$\lambda_M = 20 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$$

$$\text{и теплопроводности воздуха в порах при нормальных условиях } \lambda_{\Pi} = 0,0259 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

При этих же значениях произведены расчеты по модели кругов.

На рис. 7 приведены результаты расчетов по реальным срезам в сравнении с результатами расчетов по модели кругов.

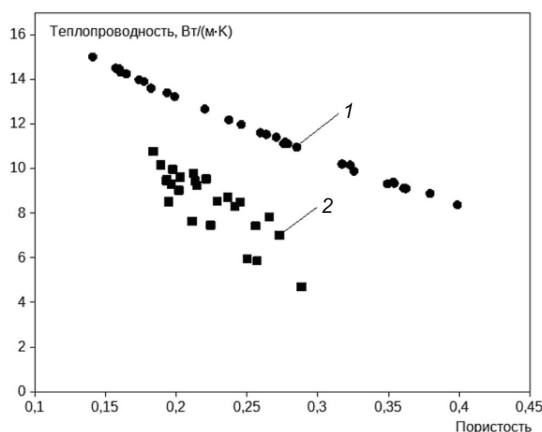


Рис. 7. Сравнение расчетов эффективной теплопроводности по реальным срезам и по модели кругов: 1 – расчет по модели кругов; 2 – расчет по реальным срезам

По представленным результатам четко проявляются два аспекта: во-первых, зависимость эффективной теплопроводности от пористости для реальных срезов проходит значительно ниже, чем

по модели кругов, во-вторых, для реальных срезов эта зависимость нерегулярная, существует большой разброс.

Оба эти аспекта говорят, что кроме пористости, на эффективную теплопроводность влияет статистически проявляемое отличие форм пор от кругов, которое может быть разным для разных образцов, так как они изготавливались по разным технологическим режимам.

Этот факт качественно объясним тем, что при заданной площади пор наличие значительных выступов приведет к уменьшению толщины путей распространения теплового потока с высокой теплопроводностью.

Заключение

Предложен метод расчета эффективной теплопроводности пористых слоев, сформированных плазменным напылением, по фрагментам фотографий срезов. Показано, что на модели кругов метод дает результаты, хорошо совпадающие с результатами расчета методом конечных элементов, а на модели сфер результаты незначительно отличаются от результатов на модели кругов, что говорит о применимости оценок по двумерным расчетам.

Результаты расчетов по реальным срезам показывают, что эффективная теплопроводность зависит не только от пористости, но и от статистики конкретных форм пор.

В дальнейшем авторы намерены исследовать возможность статистической параметризации форм и более детально определить ее влияние на эффективную теплопроводность.

Библиографический список

1. Кудинов В.В., Бобров Г.В. Нанесение покрытий напылением. Теория, технология и оборудование. – М.: Металлургия, 1992. – 432 с.
2. Davis J.R. Handbook of thermal spray technology. – ASM International, 2004. – 338 p.
3. Газотермическое напыление / под общей ред. Л.Х. Балдаева. – М.: Маркет ДС, 2007. – 344 с.
4. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Development of micro-plasma transferred arc (μ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications // Journal of Materials Processing Technology. – 2014. – Vol. 214. – P. 1102–1110. DOI: 10.1016/j.jmatprot.2013.12.016
5. Гецов Л.Б. Детали газовых турбин. – Л.: Машиностроение, 1982. – 296 с.
6. Коломыцев П.Т. Высокотемпературные защитные покрытия для никелевых сплавов. – М.: Металлургия, 1991. – 239 с.
7. Теплозащитные покрытия лопаток турбин авиационных газотурбинных двигателей / В.П. Панков, А.Л. Бабаян, М.В. Куликов [и др.] // Ползуновский вестник. – 2021. – № 1. – С. 161–172. DOI: 10.25712/ASTU.2072-8921.2021.01.023

8. Теплофизические измерения и приборы / Е.С. Платунов, С.Е. Буравой, В.В. Куренин, Г.С. Петров. – Л.: Машиностроение, 1986. – 256 с.

9. Коротких А.Г. Теплопроводность материалов: учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 97 с.

10. Гусейнов Г.Г. Устройство для определения коэффициента теплопроводности методом пластины // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2010. – № 17. – С. 29–38.

11. Measurement of thin film isotropic and anisotropic thermal conductivity using 3ω and thermoreflectance imaging / K. Maize, Y. Ezzahri, X. Wang, S. Singer, A. Majumdar, A. Shakouri // 2008 Twenty-fourth Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium. – 2008. – P. 185–190. DOI: 10.1109/STHERM.2008.4509388

12. Измерение коэффициента теплопроводности методом стационарного теплового потока / М.В. Дорохин, А.В. Здоровейщев, Ю.М. Кузнецов. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 45 с.

13. Подледнева Н.А., Краснов В.А., Магомадов Р.С. Определение коэффициентов теплопроводности и температуропроводности за один опыт методом линейного источника теплоты постоянной мощности // Вестник АГТУ. – 2013. – № 2. – С. 50–55.

14. Boué C., Holé S. Infrared thermography protocol for simple measurements of thermal diffusivity and conductivity // Infrared Physics & Technology. – 2012. – Vol. 55. – P. 376–379. DOI: 10.1016/j.infrared.2012.02.002

15. Evaluation of the fused silica thermal conductivity by comparing infrared thermometry measurements with two-dimensional simulations / P. Combis, P. Cormont, L. Gallais, D. Hebert, L. Robin, J.-L. Rullier // Applied Physics Letters. – 2012. – Vol. 101. – P. 211908–211912. DOI: 10.1063/1.4764904

16. Thermal conductivity measurements of high and low thermal conductivity films using a scanning hot probe method in the 3ω mode and novel calibration strategies / A.A. Wilson, M.M. Rojo, B. Abad, J.A. Perez, J. Maiz, J. Schomacker, Marisol. S. Martín-González, D. Borca-Tasciuc, T. Borca-Tasciuc // Nanoscale. – 2015. – № 37. – P. 15404–15412. DOI: 10.1039/C5NR03274A

17. A universal method for thermal conductivity measurements on micro-/nano-films with and without substrates using micro-Raman spectroscopy / N.M. Wight, E. Acosta, R.K. Vijayaraghavan, P.J. McNally, V. Smirnov, N.S. Bennett // Thermal Science and Engineering Progress. – 2017. – Vol. 3. – P. 95–101. DOI: 10.1016/j.tsep.2017.06.009

18. Численное моделирование теплофизических свойств порошковых покрытий металлов / М.Е. Соловьев, А.Б. Раухваргер, С.Л. Балдаев, Л.Х. Балдаев, В.И. Мищенко // Вестник ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение. – 2023. – Т. 25, № 1. – С. 5–15. DOI: 10.15593/2224-9877/2023.1.01

19. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 66 с.

20. Влияние условий плазменного напыления порошка оксида алюминия на пористость и электрическое

сопротивление покрытия / М.Е. Соловьев, А.Б. Раухваргер, С.Л. Балдаев, Л.Х. Балдаев, В.И. Мищенко // Научно-технические технологии в машиностроении. – 2023. – № 5 (143). – С. 22–32. DOI: 10.30987/2223-4608-2023-8-14

21. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова И.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

22. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708 с.

23. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

24. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 388 с.

25. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

References

1. Kudinov V.V., Bobrov G.V. Nanesenie pokrytii napyleniem. Teoriia, tekhnologiia i oborudovanie [Deposition of coatings by sputtering. Theory, technology and equipment]. Moscow: Metallurgiiia, 1992, 432 p.

2. Davis J.R. Handbook of thermal spray technology. *ASM International*, 2004, 338 p.

3. Gazotermicheskoe napylenie [Gas-thermal spraying]. Ed. L.Kh. Baldaeva. Moscow: Market DS, 2007, 344 p.

4. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Development of micro-plasma transferred arc (μ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications. *Journal of Materials Processing Technology*, 2014, vol. 214, pp. 1102–1110. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2013.12.016

5. Getsov L.B. Detali gazovykh turbin [Gas turbine parts]. Leningrad: Mashinostroenie, 1982, 296 p.

6. Kolomytsev P.T. Vysokotemperaturnye zashchitnye pokrytiia dlia nikelovykh splavov [High-temperature protective coatings for nickel alloys]. Moscow: Metallurgiiia, 1991, 239 p.

7. Pankov V.P., Babaian A.L., Kulikov M.V. Teplozashchitnye pokrytiia lopatok turbin avia-tsonnykh gazoturbinnykh dvigatelei [Thermal protective coatings of turbine blades of aviation gas turbine engines]. *Polzunovskii Vestnik*, 2021, no. 1, pp. 161–172. DOI: 10.25712/ASTU.2072-8921.2021.01.023

8. Platonov E.S., Buravoi S.E., Kurenin V.V., Petrov G.S. Teplofizicheskie izmereniia i pribory [Thermophysical measurements and instruments]. Leningrad: Mashinostroenie, 1986, 256 p.

9. Korotkikh A.G. Teploprovodnost' materialov: uchebnoe posobie [Thermal conductivity of materials: textbook]. Tomsk: Izdatelstvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2011, 97 p.

10. Guseinov G.G. Ustroistvo dlia opredeleniia koeffitsienta teploprovodnosti metodom plastiny [Device for determining the heat transfer coefficient by the plate method]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2010, no. 17, pp. 29–38.

11. Maize K., Ezzahri Y., Wang X., Singer S., Majumdar A., Shakouri A. Measurement of thin film isotropic and anisotropic thermal conductivity using 3ω and thermoreflectance imaging. *Twenty-fourth Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium*, 2008, pp. 185–190. DOI: 10.1109/STHERM.2008.4509388

12. Dorokhin M.V., Zdoroveishchev A.V., Kuznetsov Iu.M. Izmerenie koeffitsienta teploprovodnosti metodom

stationarnogo teplovogo potoka [Measurement of heat transfer coefficient by the steady-state heat flux method]. *Nizhnii Novgorod: Nizhegorodskii gosuniversitet*, 2019, 45 p.

13. Podledneva N.A., Krasnov V.A., Magomadov R.S. Opredelenie koeffitsientov teploprovodnosti i temperaturoprovodnosti za odin opyt metodom lineinogo istochnika teploty postoiannoi moshchnosti [Determination of thermal conductivity and temperature-conductivity coefficients in one experiment by the method of a linear heat source of constant power]. *Vestnik AGTU*, 2013, no. 2, pp. 50–55.

14. Boué C., Holé S. Infrared thermography protocol for simple measurements of thermal diffusivity and conductivity. *Infrared Physics & Technology*, 2012, vol. 55, pp. 376–379. DOI: 10.1016/j.infrared.2012.02.002

15. Combis P., Cormont P., Gallais L., Hebert D., Robin L., Rullier J.-L. Evaluation of the fused silica thermal conductivity by comparing infrared thermometry measurements with two-dimensional simulations. *Applied Physics Letters*, 2012, vol. 101, pp. 211908–211912. DOI: 10.1063/1.4764904

16. Wilson A.A., Rojo M.M., Abad B., Perez J.A., Maiz J., Schomacker J., Marisol S. Martín-González, Borca-Tasciuc D., Borca-Tasciuc T. Thermal conductivity measurements of high and low thermal conductivity films using a scanning hot probe method in the 3ω mode and novel calibration strategies. *Nanoscale*, 2015, no. 37, pp. 15404–15412. DOI: 10.1039/C5NR03274A

17. Wight N.M., Acosta E., Vijayaraghavan R.K., McNally P.J., Smirnov V., Bennett N.S. A universal method for thermal conductivity measurements on micro-/nano-films with and without substrates using microraman spectroscopy. *Thermal Science and Engineering Progress*, 2017, vol. 3, pp. 95–101. DOI: 10.1016/j.tsep.2017.06.009

18. Solov'ev M.E., Raikhvarger A.B., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh., Mishchenko V.I. Chislennoe modelirovanie teplofizicheskikh svoistv poroshkovykh pokrytii metallov [Numerical Modeling of Thermophysical Properties of Metal Powder Coatings]. *Vestnik PNIPIU. Mashinostroenie, materialovedenie*, 2023, vol. 25, no. 1, pp. 5–15. DOI: 10.15593/2224-9877/2023.1.01

19. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Metod ko-nechnykh elementov dlia resheniia lokal'nykh zadach mekhaniki kompozitsionnykh materialov [Finite element method for solving local problems of mechanics of composite materials]. Moscow: Izdatelstvo MGTU im. N.E. Baumana, 2010, 66 p.

20. Solov'ev M.E., Raikhvarger A.B., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh., Mishchenko V.I. Vliianie uslovii plazmennogo napyleniia poroshka oksida aluminiuma na poristost' i elektricheskoe soprotivlenie pokrytiia [Effect of conditions of plasma spraying of aluminum oxide powder on porosity and electrical resistance of the coating]. *Naukoemkie tekhnologii v mashinostroenii*, 2023, no. 5 (143), pp. 22–32. DOI: 10.30987/2223-4608-2023-8-14

21. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova I.Z. Chislennye metody analiza [Numerical methods of analysis]. Moscow: Nauka, 1967, 368 p.

22. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]. Leningrad: Fizmatgiz, 1962, 708 p.

23. Samarskii A.A. Vvedenie v teoriiu raznostnykh skhem [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1971, 552 p.

24. Samarskii A.A. Teoriia raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1977, 388 p.

25. Patankar S. Chislennye metody resheniia zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics]. Moscow: Energoatomizdat, 1984, 152 p.

Поступила: 08.09.2023

Одобрена: 02.10.2023

Принята к публикации: 27.10.2023

Об авторах

Раухваргер Алексей Борисович (Ярославль, Российская Федерация) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информационные системы и технологии» Ярославского государственного технического университета (Российская Федерация, 150023, Ярославль, Московский пр., 88, e-mail: ABRRS@yandex.ru).

Соловьев Михаил Евгеньевич (Ярославль, Российская Федерация) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы и технологии» Ярославского государственного технического университета (Российская Федерация, 150023, Ярославль, Московский пр., 88, e-mail: soloviev56@gmail.com).

Балдаев Сергей Львович (Щербинка, Российская Федерация) – заместитель генерального директора по технологиям ООО «Технологические системы защитных покрытий» (Российская Федерация, 108851, г. Щербинка, ул. Южная, 9А, e-mail: s.baldaev@tspc.ru).

Балдаев Лев Христофорович (Щербинка, Российская Федерация) – генеральный директор ООО «Тех-

нологические системы защитных покрытий» (Российская Федерация, 108851, г. Щербинка, ул. Южная, 9А, e-mail: l.baldaev@tspc.ru).

About the authors

Aleksey B. Raukhvarger (Yaroslavl, Russian Federation) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Information Systems and Technologies, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovsky ave., Yaroslavl, 150023, Russian Federation, e-mail: ABRRS@yandex.ru).

Mikhail E. Soloviev (Yaroslavl, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovsky ave., Yaroslavl, 150023, Russian Federation, e-mail: soloviev56@gmail.com).

Sergey L. Baldaev (Shcherbinka, Russian Federation) – Candidate of Technical Sciences, Deputy General Director for Technologies of Technological Systems of Protective Coatings LLC (9A Yuzhnaya st., Shcherbinka, 108851, Russian Federation, e-mail: s.baldaev@tspc.ru).

Lev Kh. Baldaev (Shcherbinka, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, General Director of Technological Systems of Protective Coatings LLC (9A Yuzhnaya st., Shcherbinka, 108851, Russian Federation, e-mail: l.baldaev@tspc.ru).

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов равноценен.