Базилевский, М.П. Метод построения неэлементарных производственных функций Кобба – Дугласа / М.П. Базилевский // Прикладная математика и вопросы управления. – 2023. – № 1. – С. 102–115. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.07

Библиографическое описание согласно ГОСТ Р 7.0.100–2018
Базилевский, М. П. Метод построения неэлементарных производственных функций Кобба – Дугласа / М. П. Базилевский. – текст : непосредственный. – DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.07 // Прикладная математика и вопросы управления / Applied Mathematics and Control Sciences. – 2023. – № 1. – С. 102–115.

пермский политех

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ВОПРОСЫ УПРАВЛЕНИЯ
№ 1, 2023
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Научная статья
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.07
УДК 519.862.6

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ НЕЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КОББА – ДУГЛАСА

М.П. Базилевский

Иркутский государственный университет путей сообщения, Иркутск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 05 декабря 2022
Одобрена: 09 февраля 2023
Принята к публикации:
10 марта 2023

Финансирование
Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов
Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад автора
100 %.

Ключевые слова:
регрессионный анализ, неэлементарная линейная регрессия, неэлементарная степенная регрессия, производственная функция Кобба – Дугласа, эластичность, метод наименьших квадратов, стандартизованная регрессия, коэффициент корреляции, коэффициент детерминации, интерпретируемость, задача частично-булевого линейного программирования, валовой региональный продукт Томской области.

АННОТАЦИЯ

Актуальным научным направлением в машинном обучении является разработка новых интерпретируемых математических моделей, а также методов и программ для их построения. Хорошими интерпретационными свойствами обладают многие известные регрессионные модели, например, линейные и степенные (производственные функции Кобба – Дугласа). Ранее автором были разработаны неэлементарные линейные регрессии, задача построения которых была сведена к задаче частично-булевого линейного программирования.

На основе неэлементарных линейных регрессий в данной работе впервые предложены неэлементарные производственные функции Кобба – Дугласа, включающие в себя не только объясняющие переменные в степенях, но и все возможные их парные комбинации, преобразованные с помощью бинарных операций min и max. Выполнена линеаризация предложенных моделей, позволяющая применять для их построения таким же образом сформулированную задачу частично-булевого линейного программирования, что и для неэлементарных линейных регрессий. В результате ее решения автоматически определяется модель оптимальной структуры. Достоинством такой формулировки является то, что решение задачи может быть получено быстрее, чем при использовании переборных процедур, а также то, что знаки оценок построенной модели гарантированно будут согласованы с содержательным смыслом факторов. При этом контролировать требования к структуре модели можно с помощью линейных ограничений на бинарные переменные. В частности, задачу можно использовать для выбора оптимальных структур традиционных элементарных производственных функций Кобба – Дугласа.

Решена задача моделирования валового регионального продукта Томской области. В качестве объясняющих переменных выбраны следующие: среднедушевые денежные доходы населения, инвестиции в основной капитал, затраты на инновационную деятельность организаций, среднегодовая численность занятых, стоимость основных фондов, внутренние затраты на научные исследования и разработки. В качестве решателя задачи частично-булевого линейного программирования был выбран пакет LPSolve. В результате решения этой задачи была выбрана оптимальная структура неэлементарной производственной функции Кобба – Дугласа, содержащая все шесть объясняющих переменных в трех регрессорах. Коэффициент детерминации построенной модели оказался равным 0,997. Все коэффициенты регрессии оказались значимы по *t*-критерию Стьюдента, а их знаки удовлетворяют содержательному смыслу факторов. Дана интерпретация построенной модели.

© **Базилевский Михаил Павлович** – канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры «Математика», e-mail: mik2178@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-3253-5697.

Perm Polytech Style: Bazilevskiy M.P. A method for constructing non-elementary Cobb – Douglas production functions. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2023, no. 1, pp. 102–115. DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.07

MDPI and ACS Style: Bazilevskiy, M.P. A method for constructing non-elementary Cobb – Douglas production functions. *Appl. Math. Control Sci.* **2023**, 1, 102–115. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.07

Chicago/Turabian Style: Bazilevskiy, Mikhail P. 2023. "A method for constructing non-elementary Cobb – Douglas production functions". *Appl. Math. Control Sci.* no. 1: 102–115. https://doi.org/10.15593/2499-9873/2023.1.07

perm polytech

APPLIED MATHEMATICS
AND CONTROL SCIENCES
№ 1, 2023
https://ered.pstu.ru/index.php/amcs

Article
DOI: 10.15593/2499-9873/2023.1.07
UDK 519.862.6

A METHOD FOR CONSTRUCTING NON-ELEMENTARY COBB – DOUGLAS PRODUCTION FUNCTIONS

M. P. Bazilevskiy

Irkutsk State Transport University, Irkutsk, Russia

ARTICLE INFO

Received: 05 December 2022
Approved: 09 February 2023
Accepted for publication:
10 March 2023

Funding
This research received no external funding

Conflicts of Interest
The authors declare no conflict of interest.

Author Contribution
100 %.

Keywords:
regression analysis, non-elementary linear regression, non-elementary power regression, Cobb – Douglas production function, elasticity, ordinary least squares method, standardized regression, correlation coefficient, coefficient of determination, interpretability, mixed integer 0–1 linear programming problem, gross regional product of the Tomsk region.

ABSTRACT

The actual scientific problem in machine learning is the development of new interpretable mathematical models, as well as methods and programs for their construction. Many well-known regression models have good interpretative properties, for example, linear and power models (Cobb – Douglas production functions). Previously, the author developed non-elementary linear regressions, the problem of constructing which was reduced to the mixed integer 0–1 linear programming problem.

Based on non-elementary linear regressions, in this paper, for the first time, non-elementary Cobb-Douglas production functions are proposed, which include not only explanatory variables in degrees, but also all their possible pair combinations, transformed using binary operations min and max. The proposed models are linearized, which makes it possible to apply for their construction the mixed integer 0–1 linear programming problem formulated in the same way as for non-elementary linear regressions. As a result of its solution, the optimal structure model is automatically determined. The advantage of such a formulation is that the solution of the problem can be obtained faster than using enumeration procedures, and also that the signs of the estimates of the constructed model are guaranteed to be consistent with the meaningful meaning of the factors. At the same time, it is possible to control the requirements for the structure of the model using linear constraints on binary variables. In particular, the problem can be used to select the optimal structures for traditional elementary Cobb – Douglas production functions.

The problem of modeling the gross regional product of the Tomsk region is solved. The following variables were chosen as explanatory variables: average per capita cash income of the population, investments in fixed capital, costs of innovative activities of organizations, average annual number of employees, cost of fixed assets, internal costs for research and development. The LPSolve package was chosen as the solver of the mixed integer 0–1 linear programming problem. As a result of solving this problem, the optimal structure of the non-elementary Cobb – Douglas production function was chosen, which contains all six explanatory variables in three regressors. The coefficient of determination for the constructed model turned out to be 0.997. All regression coefficients turned out to be significant according to Student's *t*-test, and their signs satisfy the meaningful meaning of the factors. An interpretation for the constructed model is given.

© **Mikhail P. Bazilevskiy** – CSc in Technical Sciences, Associate Professor of Department of Mathematics, e-mail: mik2178@yandex.ru, ORCID: 0000-0002-3253-5697.

Введение

В настоящее время для выявления статистической зависимости между исследуемыми переменными активно применяются методы регрессионного анализа [1; 2]. Построенная в результате его применения регрессионная модель может быть использована как для прогнозирования значений зависимой переменной, так и для объяснения характера влияния на последнюю независимых переменных. Регрессионный анализ широко используется в различных областях человеческой деятельности. Его приложения в экономике можно найти, например, в работах [3–6]: в [3] построена регрессионная модель валового внутреннего продукта Саудовской Аравии, в [4] исследуется влияние структуры капитала на результаты деятельности компаний в России, а в [5] – взаимосвязь между урожайностью кукурузы и размером ферм в Северном Китае. Приложение регрессионного анализа в геологии можно найти в работе [6], в которой исследуется скорость инфильтрации почвы в зависимости от ее свойств. В работе [7] регрессионный анализ применен для решения технической задачи исследования возможных размеров сверхзвукового транспортного самолета на основе существующих сверхзвуковых конструкций. Решение медицинской задачи с помощью регрессионного анализа можно найти в статье [8], в которой исследуется связь между артериальной гипертензией и исходом у пациентов с пневмонией, вызванной коронавирусной инфекцией COVID-19.

В экономике зависимости между выпуском продукции и факторами производства принято называть производственными функциями (ПФ). На сегодняшний день существует множество известных ПФ [9; 10]: линейная, Леонтьева, Кобба – Дугласа [11; 12], Аллена, с постоянной эластичностью замены факторов CES (Constant Elasticity of Substitutions), с линейной эластичностью замены факторов LES (Linear Elasticity of Substitutions), Солоу, многорежимная, линейного программирования, Джири, логарифмическая, Сато, Лу – Флетчера, Лиу – Хильдебранда, Кадияла, Бруно, Сато – Гофмана и др. Вместе с тем продолжается процесс поиска новых форм связи между переменными. К их числу относится класс так называемых кусочно-линейных регрессий [13–17], образованных из ПФ Леонтьева. Оценивание этих моделей в работах [13–17] производится с помощью метода наименьших модулей. Параллельно в статьях [18–21] развивались алгоритмы оценивания подобных регрессий с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Сначала в [18] был предложен алгоритм МНК-оценивания ПФ Леонтьева с двумя объясняющими переменными. А в [19] впервые была введена неэлементарная линейная регрессия (НЛР), в которую помимо объясняющих переменных входят преобразованные с помощью бинарных операций min или max все возможные комбинации их пар. Под бинарной операцией min (max) понимается математическая функция, принимающая два аргумента и возвращающая их минимум (максимум). Затем в [20] были предложены две стратегии построения НЛР. После чего в [21] состав НЛР был расширен, и она стала включать в себя и операцию min, и операцию max, а задача ее построения была формализована в виде задачи частично-булевого линейного программирования (ЧБЛП). Регулируя в этой задаче ограничения на бинарные переменные, можно контролировать математическую форму НЛР, а именно количество входящих в нее регрессоров, их типы и состав объясняющих переменных. Достоинством предложенного в [21] метода также является то, что знаки коэффициентов при переменных в полученной НЛР согласуются со знаками их коэффициентов корреляции с зависимой переменной, что делает модель вполне интерпретируемой. Стоит заметить, что проблема построения интерпретируемых моделей [22–24] машинного обучения является весьма актуальной.

Построенная в [21] вполне интерпретируемая НЛР позволила выявить новые закономерности функционирования железнодорожного транспорта в Иркутской области, недоступные при использовании линейной регрессии. Известно, что ПФ Кобба – Дугласа [11; 12] так же, как и линейная регрессия, довольно просто интерпретируется. Поэтому целью данной работы является разработка неэлементарной ПФ Кобба – Дугласа и сведение задачи ее построения с помощью МНК к задаче ЧБЛП.

1. Метод построения НЛР

Рассмотрим введенную в [21] НЛР вида

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l} \min\{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{j1} x_{i,\mu_{j2}}\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l+C_l^2} \max\{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{j2} x_{i,\mu_{j2}}\} + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

где n – объем выборки; l – количество объясняющих переменных; y_i – i-е значение объясняемой переменной y; $x_{ij} > 0$ – i-е значение j-й объясняющей переменной; ε_i – i-я ошибка аппроксимации; α_0, α_1, ..., $\alpha_{l+2C_l^2}$, λ_{11}, λ_{21}, ..., $\lambda_{C_l^2,1}$, λ_{12}, λ_{22}, ..., $\lambda_{C_l^2,2}$ – неизвестные параметры; μ_{j1}, μ_{j2} – элементы j-й строки индексной матрицы M размера $C_l^2 \times 2$, содержащей в строках всевозможные комбинации пар индексов переменных.

НЛР (1) является нелинейной по оцениваемым параметрам. Но если придать параметрам λ_{11}, λ_{21}, ..., $\lambda_{C_l^2,1}$, λ_{12}, λ_{22}, ..., $\lambda_{C_l^2,2}$ конкретные значения, то она становится линейной по параметрам α_0, α_1, ..., $\alpha_{l+2C_l^2}$. В [19] установлено, что оптимальные МНК-оценки параметров λ_{11}, λ_{21}, ..., $\lambda_{C_l^2,1}$, λ_{12}, λ_{22}, ..., $\lambda_{C_l^2,2}$ модели (1) принадлежат промежуткам:

$$\lambda_{j1}, \lambda_{j2} \in \left(\lambda_{\min}^{(j)}, \lambda_{\max}^{(j)}\right),\ j = \overline{1, C_l^2}, \tag{2}$$

где $\lambda_{\min}^{(j)} = \min\left\{\frac{x_{1,\mu_{j1}}}{x_{1,\mu_{j2}}}, \frac{x_{2,\mu_{j1}}}{x_{2,\mu_{j2}}}, ..., \frac{x_{n,\mu_{j1}}}{x_{n,\mu_{j2}}}\right\}$, $\lambda_{\max}^{(j)} = \max\left\{\frac{x_{1,\mu_{j1}}}{x_{1,\mu_{j2}}}, \frac{x_{2,\mu_{j1}}}{x_{2,\mu_{j2}}}, ..., \frac{x_{n,\mu_{j1}}}{x_{n,\mu_{j2}}}\right\}$.

Равномерно разобьем [21] каждый из промежутков (2) p точками, сформировав матрицу $\Lambda = \left(\lambda_{jk}^*\right)$, $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$, элемент λ_{jk}^* которой показывает k-е значение параметра λ_j для j-й пары переменных. Заменим выражение (1) на следующее:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{jk}^- \min\left\{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{jk}^* x_{i,\mu_{j2}}\right\} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{C_l^2} \sum_{k=1}^{p} \alpha_{jk}^+ \max\left\{x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{jk}^* x_{i,\mu_{j2}}\right\} + \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}, \tag{3}$$

где α_{jk}^-, $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$ – неизвестные параметры для регрессоров с бинарной операцией минимум, а α_{jk}^+, $j = \overline{1, C_l^2}$, $k = \overline{1, p}$ – неизвестные параметры для регрессоров с бинарной операцией максимум.

Сделав в (3) замену $z_{ijk}^{-}=\min\left\{x_{i,\mu_{j1}},\lambda_{jk}^{*}x_{i,\mu_{j2}}\right\}$, $z_{ijk}^{+}=\max\left\{x_{i,\mu_{j1}},\lambda_{jk}^{*}x_{i,\mu_{j2}}\right\}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,C_l^2}$, $k=\overline{1,p}$, получим линейную регрессию:

$$y_i=\alpha_0+\sum_{j=1}^{l}\alpha_j x_{ij}+\sum_{j=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p}\alpha_{jk}^{-}z_{ijk}^{-}+\sum_{j=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p}\alpha_{jk}^{+}z_{ijk}^{+}+\varepsilon_i,\ i=\overline{1,n}. \tag{4}$$

Проведя нормирование всех переменных в (4) по известному правилу [21], вместо (4) можно получить стандартизованную регрессию с неизвестными коэффициентами β_j, $j=\overline{1,l}$ и β_{jk}^{-}, β_{jk}^{+}, $j=\overline{1,C_l^2}$, $k=\overline{1,p}$. А с помощью нее можно сформулировать следующую задачу ЧБЛП построения модели (3):

$$R^2=\sum_{j=1}^{l}r_{yx_j}\cdot\beta_j+\sum_{j=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p}r_{yz_{jk}^{-}}\cdot\beta_{jk}^{-}+\sum_{j=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p}r_{yz_{jk}^{+}}\cdot\beta_{jk}^{+}\to\max, \tag{5}$$

$$-\left(1-\delta_j\right)M\le\sum_{k=1}^{l}r_{x_jx_k}\cdot\beta_k+\sum_{s=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p}r_{x_jz_{sk}^{-}}\cdot\beta_{sk}^{-}+$$

$$+\sum_{s=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p}r_{x_jz_{sk}^{+}}\cdot\beta_{sk}^{+}-r_{yx_j}\le(1-\delta_j)M,\ j=\overline{1,l}, \tag{6}$$

$$-\left(1-\delta_{jk}^{-}\right)M\le\sum_{s=1}^{l}r_{x_sz_{jk}^{-}}\cdot\beta_s+\sum_{s_1=1}^{C_l^2}\sum_{s_2=1}^{p}r_{z_{s_1s_2}^{-}z_{jk}^{-}}\cdot\beta_{s_1s_2}^{-}+$$

$$+\sum_{s_1=1}^{C_l^2}\sum_{s_2=1}^{p}r_{z_{s_1s_2}^{+}z_{jk}^{-}}\cdot\beta_{s_1s_2}^{+}-r_{yz_{jk}^{-}}\le(1-\delta_{jk}^{-})M,\ \ j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}, \tag{7}$$

$$-\left(1-\delta_{jk}^{+}\right)M\le\sum_{s=1}^{l}r_{x_sz_{jk}^{+}}\cdot\beta_s+\sum_{s_1=1}^{C_l^2}\sum_{s_2=1}^{p}r_{z_{s_1s_2}^{-}z_{jk}^{+}}\cdot\beta_{s_1s_2}^{-}+$$

$$+\sum_{s_1=1}^{C_l^2}\sum_{s_2=1}^{p}r_{z_{s_1s_2}^{+}z_{jk}^{+}}\cdot\beta_{s_1s_2}^{+}-r_{yz_{jk}^{+}}\le(1-\delta_{jk}^{+})M,\ j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}, \tag{8}$$

$$0\le\beta_j\le\left(r_{yx_j}\right)^{-1}\delta_j,\ \ j\in\left\{s\,|\,r_{yx_s}>0\right\}, \tag{9}$$

$$\left(r_{yx_j}\right)^{-1}\delta_j\le\beta_j\le0,\ \ j\in\left\{s\,|\,r_{yx_s}<0\right\}, \tag{10}$$

$$0\le\beta_{jk}^{-}\le\left(r_{yz_{jk}^{-}}\right)^{-1}\delta_{jk}^{-},\ (j,k)\in\left\{(s_1,s_2)\,|\,r_{yz_{s_1s_2}^{-}}>0\right\}, \tag{11}$$

$$\left(r_{yz_{jk}^{-}}\right)^{-1}\delta_{jk}^{-}\le\beta_{jk}^{-}\le0,\ (j,k)\in\left\{(s_1,s_2)\,|\,r_{yz_{s_1s_2}^{-}}<0\right\}, \tag{12}$$

$$0\le\beta_{jk}^{+}\le\left(r_{yz_{jk}^{+}}\right)^{-1}\delta_{jk}^{+},\ (j,k)\in\left\{(s_1,s_2)\,|\,r_{yz_{s_1s_2}^{+}}>0\right\}, \tag{13}$$

$$\left(r_{yz_{jk}^{+}}\right)^{-1}\delta_{jk}^{+}\le\beta_{jk}^{+}\le0,\ (j,k)\in\left\{(s_1,s_2)\,|\,r_{yz_{s_1s_2}^{+}}<0\right\}, \tag{14}$$

$$\delta_j \in \{0,1\},\ j=\overline{1,l}, \tag{15}$$

$$\delta^-_{jk} \in \{0,1\},\ j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}, \tag{16}$$

$$\delta^+_{jk} \in \{0,1\},\ j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}, \tag{17}$$

где R^2 – коэффициент детерминации модели; символом r_{XY} обозначены коэффициенты парной корреляции между переменными X и Y; δ_j, $j=\overline{1,l}$ – булевы переменные, заданные по правилу

$$\delta_j = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я переменная входит в регрессию,} \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

δ^-_{jk}, $j=\overline{1,C_l^2}$, $k=\overline{1,p}$ – булевы переменные, заданные по правилу

$$\delta^-_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я бинарная операция минимум с } k\text{-м преобразованием} \\ \text{входит в регрессию,} \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

δ^+_{jk}, $j=\overline{1,C_l^2}$, $k=\overline{1,p}$ – булевы переменные, заданные по правилу

$$\delta^+_{jk} = \begin{cases} 1, \text{ если } j\text{-я бинарная операция максимум с } k\text{-м преобразованием} \\ \text{входит в регрессию,} \\ 0, \text{ в противном случае;} \end{cases}$$

M – большое положительное число, возможный способ выбора которого подробно описан в [21].

Решение задачи ЧБЛП с целевой функцией (5) и линейными ограничениями (6)–(17) приводит к построению модели (3) с оптимальным числом регрессоров, для которой справедливы неравенства $\beta_j \cdot r_{yx_j} > 0$, $j=\overline{1,l}$; $\beta^-_{jk} \cdot r_{yz^-_{jk}} > 0$, $\beta^+_{jk} \cdot r_{yz^+_{jk}} > 0$, $j=\overline{1,C_l^2}$, $k=\overline{1,p}$. В этой связи в полученной регрессии о значимости регрессоров можно судить по величинам абсолютных вкладов переменных в общую детерминацию R^2:

$$C^{\text{абс}}_{x_j} = r_{yx_j} \cdot \beta_j,\ j=\overline{1,l};\ C^{\text{абс}}_{z^-_{jk}} = r_{yz^-_{jk}} \cdot \beta^-_{jk},\ C^{\text{абс}}_{z^+_{jk}} = r_{yz^+_{jk}} \cdot \beta^+_{jk},\ j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}. \tag{18}$$

В [21] показано, как с помощью ограничений на бинарные переменные регулировать процесс построения НЛР. Например, для того чтобы каждая объясняющая переменная входила в модель не более одного раза, необходимо ввести в задачу (5)–(17) следующие линейные ограничения:

$$\sum_{j=1}^{l} v_{ij}\delta_j + \sum_{j=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p} v_{i,l+k+p(j-1)}\delta^-_{jk} + \sum_{j=1}^{C_l^2}\sum_{k=1}^{p} v_{i,l+pC_l^2+k+p(j-1)}\delta^+_{jk} \le 1,\ i=\overline{1,l}, \tag{19}$$

где v_{ij} – элементы бинарной матрицы V размера $\left(l+2p\cdot C_l^2\right)\times l$, заданные по правилу

$$v_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } j\text{-я переменная входит в } i\text{-й регрессор модели (3)},\\ 0, & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Как отмечено в [21], для того чтобы решение задачи (5)–(17) гарантировало интерпретируемость НЛР, предварительно необходимо:

1) исключить из рассмотрения объясняющие переменные, знаки коэффициентов корреляции которых с y противоречат содержательному смыслу решаемой задачи (для этого желательно привлекать экспертов из соответствующих предметных областей);

2) исключить такие преобразованные переменные z_{jk}^{-}, z_{jk}^{+}, $j=\overline{1,C_l^2}$, $k=\overline{1,p}$, для которых не выполняются условия:

$$(\, r_{yz_{jk}^{-}}>0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}}>0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}}>0\,) \quad \text{или}$$

$$(\, r_{yz_{jk}^{-}}<0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}}<0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}}<0\,), \quad j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}, \tag{20}$$

$$(\, r_{yz_{jk}^{+}}>0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}}>0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}}>0\,) \quad \text{или}$$

$$(\, r_{yz_{jk}^{+}}<0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j1}}}<0 \text{ и } r_{yx_{\mu_{j2}}}<0\,), \quad j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}, \tag{21}$$

т.е. каждая преобразованная переменная, так же, как и каждая входящая в нее объясняющая переменная, должны коррелировать с y с одинаковым знаком.

Сократить число преобразованных переменных, и, как следствие, уменьшить время решения задачи можно, исключая те из них, у которых коэффициент корреляции с y по абсолютной величине не превосходит некоторого числа $r\in[0,1)$, т.е. для которых не выполняются условия:

$$\left|r_{yz_{jk}^{-}}\right|\ge r,\ \left|r_{yz_{jk}^{+}}\right|\ge r,\ j=\overline{1,C_l^2},\ k=\overline{1,p}. \tag{22}$$

2. Метод построения неэлементарной ПФ Кобба – Дугласа

Рассмотрим ПФ Кобба – Дугласа [11; 12]:

$$y_i=\alpha_0\prod_{j=1}^{l}x_{ij}^{\alpha_j}\varepsilon_i,\ i=\overline{1,n}, \tag{23}$$

которая линеаризуется с помощью логарифмирования и в которой оцененные параметры α_j, $j=\overline{1,l}$ трактуются как коэффициенты эластичности x_j по y. Модель (23) далее будем называть мультипликативной степенной регрессией (МСР).

Введем в рассмотрение неэлементарную ПФ Кобба – Дугласа:

$$y_i=\alpha_0\cdot\prod_{j=1}^{l}x_{ij}^{\alpha_j}\cdot\prod_{j=1}^{C_l^2}\left(\min\left\{x_{i,\mu_{j1}},x_{i,\mu_{j2}}^{\lambda_{j1}}\right\}\right)^{\alpha_{j+l}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{C_l^2}\left(\max\left\{x_{i,\mu_{j1}},x_{i,\mu_{j2}}^{\lambda_{j2}}\right\}\right)^{\alpha_{j+l+C_l^2}}\cdot\varepsilon_i,\ i=\overline{1,n}, \tag{24}$$

которую далее будем называть неэлементарной мультипликативной степенной регрессией (НМСР). Очевидно, что ПФ Кобба – Дугласа является частным случаем НМСР (24). Будем считать, что значения всех объясняющих переменных, входящих в выражение (24), превосходят единицу.

Прологарифмировав выражение (24), получим:

$$\ln y_i = \ln \alpha_0 + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \ln x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l} \ln\left(\min\{x_{i,\mu_{j1}}, x_{i,\mu_{j2}}^{\lambda_{j1}}\}\right) + \\ + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l+C_l^2} \ln\left(\max\{x_{i,\mu_{j1}}, x_{i,\mu_{j2}}^{\lambda_{j2}}\}\right) + \ln \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}. \quad (25)$$

Очевидно, что для любых двух чисел $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ справедливо равенство:

$$\ln\left(\min\{a_1, a_2\}\right) = \min\{\ln a_1, \ln a_2\}.$$

С его помощью выражение (25) можно записать в виде:

$$\ln y_i = \ln \alpha_0 + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j \ln x_{ij} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l} \min\{\ln x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{j1} \ln x_{i,\mu_{j2}}\} + \\ + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l+C_l^2} \max\{\ln x_{i,\mu_{j1}}, \lambda_{j2} \ln x_{i,\mu_{j2}}\} + \ln \varepsilon_i,\ i = \overline{1,n}. \quad (26)$$

Делая в (26) замены $x_j^{\#} = \ln x_j$, $j = \overline{1,l}$, $y^{\#} = \ln y$, $\varepsilon^{\#} = \ln \varepsilon$, $\alpha_0^{\#} = \ln \alpha_0$, получим модель:

$$y_i^{\#} = \alpha_0^{\#} + \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_{ij}^{\#} + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l} \min\{x_{i,\mu_{j1}}^{\#}, \lambda_{j1} x_{i,\mu_{j2}}^{\#}\} + \\ + \sum_{j=1}^{C_l^2} \alpha_{j+l+C_l^2} \max\{x_{i,\mu_{j1}}^{\#}, \lambda_{j2} x_{i,\mu_{j2}}^{\#}\} + \varepsilon_i^{\#},\ i = \overline{1,n}. \quad (27)$$

Полученная модель (27) представляет собой НЛР (1), поэтому для ее построения можно использовать описанный в предыдущем параграфе математический аппарат, в частности, задачу ЧБЛП (5) – (17), заменив в ней переменные y, x_1, x_2, ..., x_l на прологарифмированные переменные $y^{\#}$, $x_1^{\#}$, $x_2^{\#}$, ..., $x_l^{\#}$. Завершив построение НЛР (27), необходимо представить ее в виде (24).

3. Решение прикладной задачи

Продемонстрируем работу предложенного математического аппарата на примере моделирования валового регионального продукта (ВРП) Томской области по ежегодным статистическим данным (https://rosstat.gov.ru/) за период с 2000 по 2019 г. В качестве объясняемой переменной y напрямую выступает ВРП Томской области (в млн руб.), а в качестве объясняющих переменных были выбраны следующие:

x_1 – среднедушевые денежные доходы населения (руб. в месяц);

x_2 – инвестиции в основной капитал (млн руб.);

x_3 – затраты на инновационную деятельность организаций (млн руб.);

x_4 – среднегодовая численность занятых (тысяч человек);

x_5 – стоимость основных фондов (млн руб.);

x_6 – внутренние затраты на научные исследования и разработки (млн руб.).

Выбор такого состава объясняющих переменных обусловлен предварительно проведенным анализом десятков современных научных работ по моделированию ВРП в разных регионах России.

Значения коэффициентов корреляции отобранных шести переменных с переменной y составляют $r_{yx_1}=0,985$, $r_{yx_2}=0,875$, $r_{yx_3}=0,938$, $r_{yx_4}=0,894$, $r_{yx_5}=0,989$, $r_{yx_{22}}=0,991$, а прологарифмированных переменных с $\ln y$ – $r_{y^\# x_1^\#}=0,996$, $r_{y^\# x_2^\#}=0,942$, $r_{y^\# x_3^\#}=0,905$, $r_{y^\# x_4^\#}=0,855$, $r_{y^\# x_5^\#}=0,982$, $r_{y^\# x_6^\#}=0,991$. Как видим, при логарифмировании знаки коэффициентов корреляции между переменными не изменились.

Для выбора оптимальной структуры НМСР был использован персональный компьютер с процессором Intel Core i5 (3.40 ГГц, 4 ядра) и объемом оперативной памяти 8 ГБ. В качестве решателя задачи ЧБЛП (5)–(17), (19) был использован пакет LPSolve. Число разбиений p было выбрано равным 7, а число r в (22) было взято равным 0,2.

В результате решения задачи ЧБЛП было найдено следующее уравнение:

$$\ln y = 1,28 + \underset{(9,081)}{\overset{(0,3402)}{0,598}} \min\{\ln x_1, 1,501 \ln x_4\} +$$

$$+ \underset{(4,351)}{\overset{(0,2971)}{0,212}} \min\{\ln x_2, 1,241 \ln x_6\} + \underset{(9,112)}{\overset{(0,3594)}{0,411}} \max\{\ln x_3, 0,621 \ln x_5\}. \quad (28)$$

В уравнении (28) в скобках под коэффициентами указаны значения *t*-критерия Стьюдента, а над ними – значения абсолютных вкладов переменных в общую детерминацию, найденные по формулам (18). Как видим, все переменные оказались значимы по *t*-критерию для уровня значимости 0,01. Абсолютные вклады регрессоров в общую детерминацию также достаточно высоки.

Коэффициент детерминации НМСР (28) составляет 0,996654, что говорит о ее высоком аппроксимационном качестве. Графики наблюдаемых и расчетных по модели (28) значений переменной y представлены на рисунке.

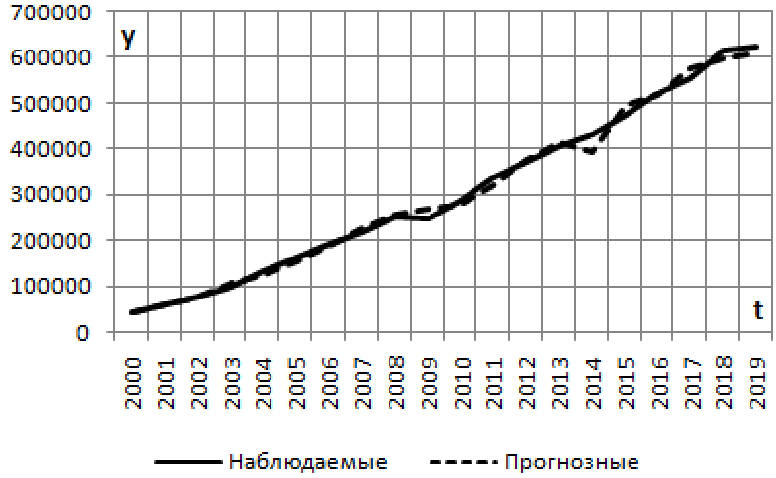

Рис. Графики наблюдаемых и прогнозных значений (авторские результаты)

Для удобства представим НМСР (28) в виде

$$y = 3,5968 \cdot \left(\min\left\{ x_1, x_4^{1,501} \right\} \right)^{0,598} \left(\min\left\{ x_2, x_6^{1,241} \right\} \right)^{0,212} \left(\max\left\{ x_3, x_5^{0,621} \right\} \right)^{0,411}. \quad (29)$$

Модель (29) в кусочно-заданной форме имеет вид:

$$y = \begin{cases} 3,5968 \cdot x_4^{0,898} \cdot x_6^{0,263} \cdot x_3^{0,411} \text{ при } x_1 \geq x_4^{1,501},\ x_2 \geq x_6^{1,241},\ x_3 \geq x_5^{0,621}; \\ 3,5968 \cdot x_4^{0,898} \cdot x_6^{0,263} \cdot x_5^{0,255} \text{ при } x_1 \geq x_4^{1,501},\ x_2 \geq x_6^{1,241},\ x_3 < x_5^{0,621}; \\ 3,5968 \cdot x_4^{0,898} \cdot x_2^{0,212} \cdot x_3^{0,411} \text{ при } x_1 \geq x_4^{1,501},\ x_2 < x_6^{1,241},\ x_3 \geq x_5^{0,621}; \\ 3,5968 \cdot x_4^{0,898} \cdot x_2^{0,212} \cdot x_5^{0,255} \text{ при } x_1 \geq x_4^{1,501},\ x_2 < x_6^{1,241},\ x_3 < x_5^{0,621}; \\ 3,5968 \cdot x_1^{0,598} \cdot x_6^{0,263} \cdot x_3^{0,411} \text{ при } x_1 < x_4^{1,501},\ x_2 \geq x_6^{1,241},\ x_3 \geq x_5^{0,621}; \\ 3,5968 \cdot x_1^{0,598} \cdot x_6^{0,263} \cdot x_5^{0,255} \text{ при } x_1 < x_4^{1,501},\ x_2 \geq x_6^{1,241},\ x_3 < x_5^{0,621}; \\ 3,5968 \cdot x_1^{0,598} \cdot x_2^{0,212} \cdot x_3^{0,411} \text{ при } x_1 < x_4^{1,501},\ x_2 < x_6^{1,241},\ x_3 \geq x_5^{0,621}; \\ 3,5968 \cdot x_1^{0,598} \cdot x_2^{0,212} \cdot x_5^{0,255} \text{ при } x_1 < x_4^{1,501},\ x_2 < x_6^{1,241},\ x_3 < x_5^{0,621}. \end{cases} \quad (30)$$

С помощью (30) можно дать следующую интерпретацию полученной НМСР.

1. Если $x_1 \geq x_4^{1,501}$, то на ВРП Томской области влияет среднегодовая численность занятых x_4, а среднедушевые денежные доходы населения x_1 не влияют. При этом с увеличением среднегодовой численности занятых x_4 на 1 % (при неизменных значениях остальных переменных) ВРП y возрастает в среднем на 0,898 %. А если $x_1 < x_4^{1,501}$, то на ВРП влияют среднедушевые доходы населения x_1, а среднегодовая численность занятых x_4 не влияет. При этом с увеличением среднедушевых доходов населения x_1 на 1 % (при неизменных значениях остальных переменных) ВРП y возрастает в среднем на 0,598 %.

2. Если $x_2 \geq x_6^{1,241}$, то на ВРП влияют внутренние затраты на научные исследования и разработки x_6, а инвестиции в основной капитал x_2 не влияют. При этом с увеличением внутренних затрат на научные исследования и разработки x_6 на 1 % (при неизменных значениях остальных переменных) ВРП y возрастает в среднем на 0,263 %. А если $x_2 < x_6^{1,241}$, то на ВРП влияют инвестиции в основной капитал x_2, а внутренние затраты на научные исследования и разработки x_6 не влияют. При этом с увеличением инвестиций в основной капитал x_2 на 1 % (при неизменных значениях остальных переменных) ВРП y возрастает в среднем на 0,212 %.

3. Если $x_3 \geq x_5^{0,621}$, то на ВРП влияют затраты на инновационную деятельность организаций x_3, а стоимость основных фондов x_5 не влияет. При этом с увеличением затрат на инновационную деятельность организаций x_3 на 1 % (при неизменных значениях остальных переменных) ВРП y возрастает в среднем на 0,411 %. А если $x_3 < x_5^{0,621}$, то на ВРП влияет стоимость основных фондов x_5, а затраты на инновационную деятельность организаций x_3 не влияют. При этом с увеличением стоимости основных фондов x_5 на 1 % (при неизменных значениях остальных переменных) ВРП y возрастает в среднем на 0,255 %.

Заключение

В работе впервые предложены неэлементарные степенные регрессионные модели (ПФ Кобба – Дугласа). Показано, что при логарифмировании они трансформируются в НЛР, поэтому задача их построения может быть сформулирована в виде задачи ЧБЛП. В результате решения этой задачи автоматически определяется оптимальное количество входящих в модель регрессоров, их типы и состав переменных. Требования к структуре модели в задаче можно регулировать с помощью линейных ограничений на бинарные переменные. В полученной в результате решения задачи модели знаки степеней гарантированно согласуются со знаками коэффициентов корреляции соответствующих объясняющих переменных с объясняемой переменной.

С помощью разработанного математического метода решена задача моделирования ВРП Томской области. Построена неэлементарная степенная регрессия и дана ее интерпретация. Особенность неэлементарных степенных регрессий состоит в том, что в них состав влияющих на объясняемую переменную объясняющих переменных меняется в зависимости от их текущих значений, тогда как в элементарных регрессиях этот состав постоянен.

Предложенные в работе неэлементарные ПФ Кобба – Дугласа и метод их построения могут применяться не только для моделирования зависимостей между объемами выпуска продукции и факторами производства, но и для решения прикладных задач из любых предметных областей. При этом к исходным статистическим данным предъявляются следующие требования: значения объясняемой переменной должны быть строго положительны, а значения объясняющих переменных должны быть строго больше единицы.

Для построения неэлементарных степенных регрессий требуется решать довольно трудоемкую вычислительную задачу ЧБЛП, что, в свою очередь, требует разработки специализированного программного обеспечения. Для этого в настоящее время ведется разработка новой усовершенствованной версии программы «ВИнтер-1» [25]. Определенный научный интерес вызывает тестирование скорости решения в новой программе задач построения неэлементарных степенных регрессий по данным большой размерности.

Научный интерес вызывает симбиоз предложенного математического аппарата с методом последовательного повышения абсолютных вкладов переменных в общую детерминацию, рассмотренным в [25].

Список литературы

1. Gunst R.F., Mason R.L. Regression analysis and its application: a data-oriented approach. – CRC Press. – 2018.

2. Montgomery D.C., Peck E.A., Vining G.G. Introduction to linear regression analysis. – John Wiley & Sons. – 2021.

3. Amirat A., Zaidi M. Estimating GDP growth in Saudi Arabia under the government’s vision 2030: a knowledge-based economy approach // Journal of the Knowledge Economy. 2020. – Vol. 11, № 3. – P. 1145–1170. DOI: https://doi.org/10.1007/s13132-019-00596-2

4. Company performance and optimal capital structure: evidence of transition economy (Russia) / V. Spitsin, D. Vukovic, S. Anokhin, L. Spitsina // Journal of Economic Studies. – 2020. – Vol. 48, № 2. – P. 313–332. DOI: https://doi.org/10.1108/JES-09-2019-0444

5. Sheng Y., Ding J., Huang J. The relationship between farm size and productivity in agriculture: Evidence from maize production in Northern China // American Journal of Agricultural Economics. – 2019. – Vol. 101, № 3. – P. 790–806. DOI: https://doi.org/10.1093/ajae/aay104

6. Estimation of infiltration rate from soil properties using regression model for cultivated land / G.T. Patle, T.T. Sikar, K.S. Rawat, S.K. Singh // Geology, Ecology, and Landscapes. – 2019. – Vol. 3, № 1. – P. 1–13. DOI: https://doi.org/10.1080/24749508.2018.1481633

7. Joiner K.F., Zahra J., Rehman O. Conceptual sizing of next supersonic passenger aircraft from regression of the limited existing designs // MATEC Web of Conferences. EDP Sciences. – 2018. – Vol. 198. – P. 05001. DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/201819805001

8. Hypertension is associated with increased mortality and severity of disease in COVID-19 pneumonia: a systematic review, meta-analysis and meta-regression / R. Pranata, M.A. Lim, I. Huang, S.B. Raharjo, A.A. Lukito // Journal of the renin-angiotensin-aldosterone system: JRAAS. – 2020. – Vol. 21, № 2. DOI: https://doi.org/10.1177/1470320320926899

9. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. – М.: Финансы и статистика, 1986.

10. Хацкевич Г.А., Проневич А.Ф., Чайковский М.В. Двухфакторные производственные функции с заданной предельной нормой замещения // Экономическая наука сегодня. – 2019. – № 10. – С. 169–181.

11. The effect of gross domestic product and population growth on CO2 emissions in Indonesia: An application of the ant colony optimisation algorithm and Cobb-Douglas model / S. Sukono, W. Albra, T. Zulham, I. Majid, J. Saputra, B. Subartini, F. Thalia // International Journal of Energy Economics and Policy. – 2019. – Vol. 9, № 4. – P. 313. DOI: https://doi.org/10.32479/ijeep.8011

12. Dritsaki C., Stamatiou P. Cobb-Douglas production function: The case of Poland's economy // International Conference on Applied Economics. Springer, Cham, 2018. – P. 465–483. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-02194-8_31

13. Носков С.И., Лоншаков Р.В. Идентификация параметров кусочно-линейной регрессии // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. – 2008. – № 6. – С. 63–64.

14. Носков С.И., Хоняков А.А. Программный комплекс построения некоторых типов кусочно-линейных регрессий // Информационные технологии и математическое моделирование в управлении сложными системами. – 2019. – № 3 (4). – С. 47–55.

15. Носков С.И., Хоняков А.А. Применение функции риска для моделирования экономических систем // Южно-Сибирский научный вестник. – 2020. – № 5 (33). – С. 85–92.

16. Носков С.И. Построение кусочно-линейной регрессии с интервальной неопределенностью в данных для зависимой переменной // Вестник кибернетики. – 2022. – № 2 (46). – С. 61–65.

17. Носков С.И. Построение кусочно-линейной авторегрессионной модели произвольного порядка // Вестник Югорского государственного университета. – 2022. – № 2 (65). – С. 89–94.

18. Базилевский М.П. МНК-оценивание параметров специфицированных на основе функций Леонтьева двухфакторных моделей регрессии // Южно-Сибирский научный вестник. – 2019. – № 2 (26). – С. 66–70.

19. Базилевский М.П. Оценивание линейно-неэлементарных регрессионных моделей с помощью метода наименьших квадратов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. – 2020. – Т. 8, № 4 (31).

20. Базилевский М.П. Отбор информативных операций при построении линейно-неэлементарных регрессионных моделей // International Journal of Open Information Technologies. – 2021. – Т. 9, № 5. – С. 30–35.

21. Базилевский М.П. Метод построения неэлементарных линейных регрессий на основе аппарата математического программирования // Проблемы управления. – 2022. – № 4. – С. 3–14. DOI: https://doi.org/10.25728/pu.2022.4.1

22. Molnar C. Interpretable machine learning. – Lulu.com, 2020.

23. Doshi-Velez F., Kim B. Towards a rigorous science of interpretable machine learning // arXiv preprint arXiv:1702.08608. – 2017. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.08608

24. Miller T. Explanation in artificial intelligence: Insights from the social sciences // Artificial intelligence. – 2019. – Vol. 267. – P. 1–38. DOI: https://doi.org/10.1016/j.artint.2018.07.007

25. Базилевский М.П. Построение вполне интерпретируемых линейных регрессионных моделей с помощью метода последовательного повышения абсолютных вкладов переменных в общую детерминацию // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. – 2022. – № 2. – С. 5–16. DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/2/5-16

References

1. Gunst R.F., Mason R.L. Regression analysis and its application: a data-oriented approach. CRC Press, 2018.

2. Montgomery D. C., Peck E. A., Vining G. G. Introduction to linear regression analysis. John Wiley & Sons, 2021.

3. Amirat A., Zaidi M. Estimating GDP growth in Saudi Arabia under the government's vision 2030: a knowledge-based economy approach. *Journal of the Knowledge Economy*, 2020, vol. 11, no. 3, pp. 1145–1170. DOI: https://doi.org/10.1007/s13132-019-00596-2

4. Spitsin V., Vukovic D., Anokhin S., Spitsina L. Company performance and optimal capital structure: evidence of transition economy (Russia). *Journal of Economic Studies*. 2020, vol. 48, no. 2, pp. 313–332. DOI: https://doi.org/10.1108/JES-09-2019-0444

5. Sheng Y., Ding J., Huang J. The relationship between farm size and productivity in agriculture: Evidence from maize production in Northern China. *American Journal of Agricultural Economics*. 2019, vol. 101, no. 3, pp. 790–806. DOI: https://doi.org/10.1093/ajae/aay104

6. Patle G. T., Sikar T. T., Rawat K. S., Singh S. K. Estimation of infiltration rate from soil properties using regression model for cultivated land. *Geology, Ecology, and Landscapes*. 2019, vol. 3, no. 1, pp. 1–13. DOI: https://doi.org/10.1080/24749508.2018.1481633

7. Joiner K. F., Zahra J., Rehman O. Conceptual sizing of next supersonic passenger aircraft from regression of the limited existing designs. *MATEC Web of Conferences. EDP Sciences*. 2018, vol. 198, p. 05001. DOI: https://doi.org/10.1051/matecconf/201819805001

8. Pranata R., Lim M. A., Huang I., Raharjo S. B., Lukito A. A. Hypertension is associated with increased mortality and severity of disease in COVID-19 pneumonia: a systematic review, meta-analysis and meta-regression. *Journal of the renin-angiotensin-aldosterone system: JRAAS*. 2020, vol. 21, no. 2. DOI: https://doi.org/10.1177/1470320320926899

9. Kleyner G.B. Proizvodstvennye funktsii: teoriya, metody, primenenie [Production functions: theory, methods, application.]. Moscow, Finansy i statistika, 1986.

10. Khatskevich G.A., Pronevich A.F., Chaykovskiy M.V. Dvukhfaktornye proizvodstvennye funktsii s zadannoy predel'noy normoy zameshcheniya [Two-factor production functions with a given marginal rate of substitution]. *Ekonomicheskaya nauka segodnya*, 2019, no. 10, pp. 169–181.

11. Sukono S., Albra W., Zulham T., Majid I., Saputra J., Subartini B., Thalia F. The effect of gross domestic product and population growth on CO2 emissions in Indonesia: An application of the ant colony optimisation algorithm and Cobb-Douglas model. *International Journal of Energy Economics and Policy*. 2019, vol. 9, no. 4, pp. 313. DOI: https://doi.org/10.32479/ijeep.8011

12. Dritsaki C., Stamatiou P. Cobb-Douglas production function: The case of Poland's economy. *International Conference on Applied Economics. Springer, Cham*. 2018, pp. 465–483. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-02194-8_31

13. Noskov S.I., Lonshakov R.V. Identifikatsiya parametrov kusochno-lineynoy regressii [Identification of parameters of piecewise linear regression]. *Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems*, 2008, no. 6, pp. 63–64.

14. Noskov S.I., Khonyakov A.A. Programmnyy kompleks postroeniya nekotorykh tipov kusochno-lineynykh regressiy [Software complex for building some types pieces of linear regressions]. *Information technology and mathematical modeling in the management of complex systems*, 2019, no. 3 (4), pp. 47–55.

15. Noskov S.I., Khonyakov A.A. Primenenie funktsii riska dlya modelirovaniya ekonomicheskikh sistem [Applying the risk function to model economic systems]. *South-Siberian Scientific Bulletin*, 2020, no. 5 (33), pp. 85–92.

16. Noskov S.I. Postroenie kusochno-lineynoy regressii s interval'noy neopredelennost'yu v dannykh dlya zavisimoy peremennoy [Constructing a data-driven piecewise linear regression with interval uncertainty for the dependent variable]. *Proceedings in Cybernetics*, 2022, no. 2 (46), pp. 61–65.

17. Noskov S.I. Postroenie kusochno-lineynoy avtoregressionnoy modeli proizvol'nogo poryadka [Construction of a piece-linear autoregression model of an arbitrary order]. *Yugra State University Bulletin*, 2022, no. 2 (65), pp. 89–94.

18. Bazilevskiy M.P. MNK-otsenivanie parametrov spetsifitsirovannykh na osnove funktsiy Leont'eva dvukhfaktornykh modeley regressii [OLS-estimation of two-factor regression models specified on Leontief functions]. *South-Siberian Scientific Bulletin*, 2019, no. 2 (26), pp. 66–70.

19. Bazilevskiy M.P. Otsenivanie lineyno-neelementarnykh regressionnykh modeley s pomoshch'yu metoda naimen'shikh kvadratov [Estimation linear non-elementary regression models using ordinary least squares]. *Modeling, optimization and information technology*, 2020, vol. 8, no. 4 (31).

20. Bazilevskiy M.P. Otbor informativnykh operatsiy pri postroenii lineyno-neelementarnykh regressionnykh modeley [Selection of informative operations in the construction of linear non-elementary regression models]. *International Journal of Open Information Technologies*, 2021, vol. 9, no. 5, pp. 30–35.

21. Bazilevskiy M.P. Metod postroeniya neelementarnykh lineynykh regressiy na osnove apparata matematicheskogo programmirovaniya [A method for constructing nonelementary linear regressions based on mathematical programming]. *Control Sciences*, 2022, no. 4, pp. 3–14. DOI: https://doi.org/10.25728/pu.2022.4.1

22. Molnar C. Interpretable machine learning. Lulu.com, 2020.

23. Doshi-Velez F., Kim B. Towards a rigorous science of interpretable machine learning. *arXiv preprint arXiv:1702.08608*, 2017. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1702.08608

24. Miller T. Explanation in artificial intelligence: Insights from the social sciences. *Artificial intelligence*, 2019, vol. 267, pp. 1–38. DOI: https://doi.org/10.1016/j.artint.2018.07.007

25. Bazilevskiy M.P. Postroenie vpolne interpretiruemykh lineynykh regressionnykh modeley s pomoshch'yu metoda posledovatel'nogo povysheniya absolyutnykh vkladov peremennykh v obshchuyu determinatsiyu [Construction of quite interpretable linear regression models using the method of successive increase the absolute contributions of variables to the general determination]. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, 2022, no. 2, pp. 5–16. DOI: https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/2/5-16