

Научная статья

DOI: 10.15593/2224-9397/2023.1.05

УДК 621.52

**В.В. Куприянов, И.С. Бондаренко**Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,  
Москва, Россия

## УСЛОВИЯ ПРИМЕНИМОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЬНО-КОДИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ИНФОРМАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ШУМОВ КВАНТОВАНИЯ

Выбор устройств преобразования изменений физических величин в модулированные сигналы для их передачи с помощью канала связи на Землю является важной частью процесса разработки телеметрических систем, применяемых при испытаниях пилотируемых и беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). В основе этого выбора лежит теорема Котельникова, определяющая число отсчётных дискретных значений измеряемой величины. Однако затруднительна передача всего диапазона этих возможных значений. Для упрощения передачи на большие расстояния дискретных значений сигнала они подвергаются квантованию по уровню, когда непрерывная шкала значений заменяется равномерной дискретной шкалой. Но упрощение задачи передачи сигнала достигается ценой увеличения искажений (потерь информации) за счёт появления шумов квантования. Одним из путей решения этой проблемы является использование функции кодирования, состоящей из бинарных кодовых групп. **Цель исследования:** разработка математической модели измерительно-кодирующих устройств (ИКУ) при испытаниях БПЛА. **Методы:** создание метода снижения потерь информации в схемах кодирования с информационным экстраполятором и обратной связью по ошибке квантования посредством одновременного вычисления двух параметров – скорости передачи дискретных символов исходной выборки и частоты квантования – на основе оценки влияния шумов. **Результаты:** на базе предложенного метода с полиномиальным предсказанием информации и использованием статистической регрессии построена модель ИКУ, позволяющая увеличить объём предсказываемой информации в 1,5 раза за счёт дополнительных измерений с гироскопического датчика курсовой системы БПЛА. На интервале тестирования средняя ошибка прогноза по измерениям в 31-й точке для гауссовского распределения составила 5,3 %. Определение функции кодирования в виде экстраполятора математического ожидания информации позволило перейти от аппроксимации функции бортовых измерений к разностным уравнениям, что улучшило информационные показатели по сравнению с классическим подходом. Идея экспериментов заключалась в моделировании шести разных видов модуляции в случае гауссовских сигналов. Количественные оценки показали, что в интервале значений отношения пропускной способности ИКУ к частоте квантования более 12 четыре наиболее распространённых вида ИКУ обеспечивают близкие значения потерь информации до 0,03 бит. **Практическая значимость:** результаты исследований использованы при создании измерительно-кодирующей испытательной подсистемы бортовой аппаратуры БПЛА. Она позволяет существенно снизить потери информации из-за шумов квантования.

**Ключевые слова:** математическая модель, измерительно-кодирующее устройство, экстраполятор, принцип максимума информации, модуляция, шумов квантования, дисперсия, энтропии, телеметрическая система.

**V.V. Kupriyanov, I.S. Bondarenko**

National University of Science and Technology "MISIS", Moscow, Russian Federation

## **CONDITIONS OF MEASURING-CODERS MATHEMATICAL MODEL APPLICABILITY AND DEFINITION OF INFORMATION LOSSES AT THE SLICING NOISES PRESENCE**

The choice of devices for converting changes in physical quantities into modulated signals for their transmission via a communication channel to Earth is an important part of the development process of telemetry systems used in testing manned and unmanned aerial vehicles (UAVs). This choice is based on Kotelnikov's theorem, which determines the number of reference discrete values of the measured quantity. However, it is difficult to transmit the entire range of these possible values. To simplify the transmission of discrete signal values over long distances, they are quantized by level, when a continuous scale of values is replaced by a uniform discrete scale. But the simplification of the signal transmission task is achieved at the cost of increasing distortion (information loss) due to the appearance of quantization noise. One way to solve this problem is to use an encoding function consisting of binary code groups. **Purpose:** to develop a mathematical model of measuring and coding devices (MCD) during testing of UAVs. **Methods:** creation of a method for reducing information loss in coding schemes with an information extrapolator and feedback on quantization error by simultaneously calculating two parameters – the transmission rate of discrete symbols of the original sample and the quantization frequency – based on the evaluation of the influence of noise. **Results:** based on the proposed method with polynomial prediction of information and the use of statistical regression, an MCD model is constructed that allows increasing the volume of predicted information by 1,5 times due to additional measurements from the gyroscopic sensor of the UAV course system. During the testing interval, the average forecast error for measurements at the 31st point for the Gaussian distribution was 5,3 %. The definition of the coding function in the form of an extrapolator of the mathematical expectation of information made it possible to move from the approximation of the function of on-board measurements to difference equations, which improved information indicators compared to the classical approach. The idea of the experiments was to simulate six different types of modulation in the case of Gaussian signals. Quantitative estimates have shown that in the range of values of the ratio of the MCD bandwidth to the quantization frequency of more than 12, the four most common types of MCD provide close values of information loss up to 0,03 bits. **Practicalrelevance:** the results of the research were used in the creation of a measuring and coding test subsystem of on-board UAV equipment. It allows you to significantly reduce the loss of information due to quantization noise.

**Keywords:** mathematical model, measuring and coding device, extrapolator, maximum information principle, modulation, quantization noise, dispersion, entropy, telemetry system.

### **Введение**

В настоящее время широко используется воздушное и космическое пространство для эффективного мониторинга природных процессов и антропогенных воздействий на Земле. Это и экология [1–3], и изменение климата [4], и обеспечение безопасности [5, 6], и контроль различных технологических процессов [7–11]. В последние годы на телеметрические комплексы при испытаниях различного класса авиа-

ционных объектов (в том числе БПЛА), а также для выполнения различного рода экспериментов возлагаются функции измерений физических величин, их преобразования и статистической обработки для получения информации о параметрах испытуемого объекта. Особую роль стали занимать методы вычисления потерь информации в условиях шумов [12–14] для анализа характеристик измерительно-кодирующих устройств телеметрических комплексов, рассматриваемых как информационные системы [15–18]. К этим системам, предназначенным для натурных испытаний БПЛА, не предъявляются особые требования по упрощению применяемых алгоритмов. Квантование понимается как переход от непрерывного аналогового сигнала к дискретному цифровому кодированию сигнала. Квантуются дискретные уровни сигнала и дискретное время. Очевидно, что при этом существенное значение имеет правильный выбор математической модели ИКУ, которая должна учитывать влияние погрешности квантования, зависящей от закона распределения анализируемых данных. Минимальное значение этой погрешности привязано к её модели с равномерным распределением данных и определяется разрядностью представления чисел в двоичной системе. Однако на практике погрешность квантования много больше и зависит от характеристик ИКУ как непрерывно-дискретного преобразователя. Возрастающий интерес к моделированию ИКУ обусловлен их использованием в телеметрических комплексах, необходимых при испытаниях БПЛА, и прежде всего, когда все операции, связанные с обработкой бортовых измерений для принятия решений, выполняются на Земле. Основной задачей является выбор устройств преобразования изменений физических величин в модулированные сигналы для их передачи с помощью канала цифровой связи на Землю.

В настоящей работе дискретная информационная модель диагонального вида используется для решения задачи одновременного вычисления параметров передачи дискретных символов и квантования на основе данных выборки измерений на примере анализа шести различных кодирующих устройств. Для решения этой задачи используются информационные методы обработки измерений и статистическая регрессия [19–22]. В отличие от упомянутых работ рассмотрение задачи проводится на основе строгого математического анализа условий применимости развитого метода максимума передачи информации через ИКУ и свойств полученных решений.

## 1. Обоснование применимости дискретной математической модели ИКУ

Основным типом телеметрических комплексов, применяемых при испытаниях различных современных пилотируемых и беспилотных аппаратов, можно считать системы с времяимпульсной модуляцией (ВИМ) сигналов. Процесс преобразования изменений физической величины в телеметрический сигнал с помощью различных измерительных устройств и последующих модуляторов, например ВИМ, можно в обобщенном смысле рассматривать как кодирование информации. Наиболее общим практическим представлением сигналов, квантованных измерительно-преобразующими устройствами, являются совокупности их значений или последовательности символов [9]. Применяемые главным образом в целях сжатия различные пороговые элементы в виде фиксированных или переменных уставок (рис. 1), в силу случайного изменения измеряемого сигнала  $x(t)$ , приводят к случайному характеру получаемых на выходе временных последовательностей.

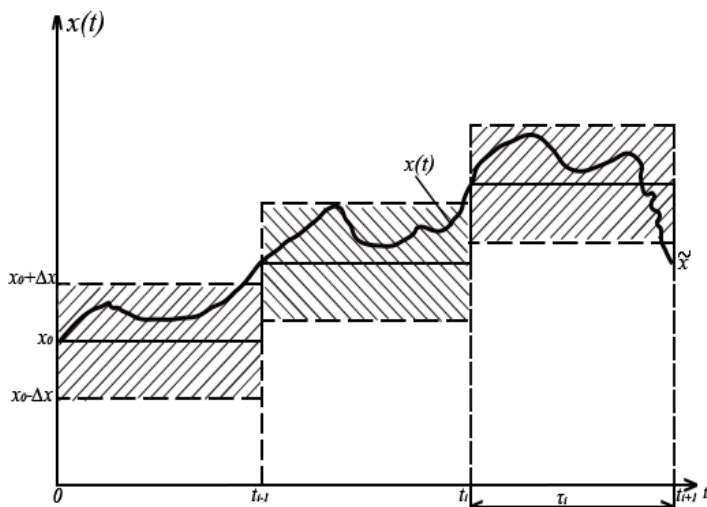


Рис. 1. Ступенчатая аппроксимация реального сигнала  $x(t)$ :

$\Delta x$ ,  $\tau_i$  – уставки аппроксимации по величине сигнала и времени соответственно;  $x_0$ ,  $\tilde{x}$  – начальное и конечное аппроксимированные значения

Описываемые таким образом реальные измерительно-преобразовательные устройства являются системами со случайным числом конечных состояний. Они характеризуются распределением вероятностей состояний  $P_i (i=1, \dots, k)$  и переходными вероятностями, т.е. вероят-

ностями  $p_{ij}^{(k)}$  появления символа  $k$  при переходе из состояния  $i$  в состояние  $j$ . Согласно принципу максимума информации [23–25], на каждом интервале оптимальное измерительно-преобразующее устройство определяется распределением вероятностей  $p_{ij}^{(k)}$ , максимизирующим выходную информацию. Применяемые в настоящее время измерительно-преобразующие устройства рассматриваются обычно как кодирующие и являются инерционными, т.е. могут обладать некоторой памятью [5, 18]. Поэтому их дискретную математическую модель можно представить в виде:

$$y_{k+1} = f(y_k, x_k), \quad (1)$$

$$z_k = g(y_k, n), \quad (2)$$

где  $x_k$  –  $k$ -й символ на входе ИКУ;  $z_k$  – выходной символ, соответствующий входному символу  $x_k$  и состоянию  $y_k$  для ИКУ;  $n$  – шум.

Под функцией  $f(y_k, x_k)$  будем понимать достаточно общую характеристику ИКУ. При этом можно записать:

$$\delta x_k = \dot{x}(t)\tau_{ij}|\delta x_k| \geq \Delta, \quad (3)$$

где  $k$  – номер символа двоичного знака;  $\delta x_k$  – изменение входного  $k$ -го символа за случайное время  $\tau_{ij}$  при скорости изменения измерительного сигнала, равной  $\dot{x}(t)$ . Уставка  $\Delta$  выбирается либо постоянной, либо изменяющейся согласно законам:

$$\Delta_1 = x_k - x_{k-1}; \Delta_2 = x_k - (2x_{k-1} - x_{k-2}); \Delta_3 = x_k - \sum_{i=1}^n \gamma_i x_{k-1}, n \leq k, \quad (4)$$

где  $\gamma_i$  – некоторая постоянная величина.

К методам формирования функции  $f(y_k, x_k)$  относятся методы с полиномиальным предсказанием информации. Сущность этого метода сводится к экстраполяции некоторого полинома  $k$ -го порядка, который аппроксимирует функцию измерений какого-либо параметра объекта по измерениям в  $k+1$ -й точке. При этом используется разностная аппроксимация вида:

$$\hat{y}_t = \sum_{j=0}^k \Delta_j y_{t-j}. \quad (5)$$

Глубина памяти в функции, определяемая выражениями (3), принимается неограниченной, т.е. от первого момента измерения. При двоичном кодировании передаваемая после  $|\delta x_k| \geq \Delta$  выборка  $y_k$ ,

каждый член которой – это конечная последовательность двоичных знаков после аналого-цифрового преобразования, описывается в виде:

$$y_k = \sum_i^{i_{\max}} D_i 2^{-i}, \quad (6)$$

причем  $i$  – номер текущего разряда числа;  $i_{\max}$  – максимальный номер разряда;  $D_i$  – двоичное число, равное 0 или 1 и определяемое числом каскадов ИКУ. По сути, выборкой является конечная последовательность двоичных чисел случайной длительности. Используя известный подход Шеннона–Уивера [23], обозначим через  $N_i(T)$  число последовательностей символов  $x_i$  длины  $T$ , а через  $\tau_{ij}^{(1)}, \tau_{ij}^{(2)}, \dots, \tau_{ij}^{(k)}$  – случайные длительности символов, появляющиеся в состоянии  $i$  и переводящие устройство кодирования в состояние  $j$ .

При измерении параметров испытуемого объекта процесс на выходе ИКУ можно описать матричным уравнением:

$$N(T) = N_i(T - \tau), \quad (7)$$

где  $\tau^T = \|\tau_{ij}^{(1)}, \tau_{ij}^{(2)}, \dots, \tau_{ij}^{(k)}\|$ ;  $\tau_{ij}^{(k)}$  определяется из формулы (3).

На основании теоремы исчисления конечных разностей при достаточно большой величине  $T$  было получено соотношение, связывающее конечные последовательности двоичных символов с их случайными длительностями  $\tau_{ij}^{(k)}$ . Сами эти последовательности определяются корнем  $Y$  характеристического уравнения матрицы (7). Было получено:

$$\sum_{k=1}^n Y^{-\tau_{ij}^{(k)}} = 1. \quad (8)$$

Сопоставляя каждому случайному интервалу  $\tau_{ij}^{(k)}$  переходную вероятность  $p_{ij}^{(k)}$  с учетом (8), были найдены условия, которым должны удовлетворять эти вероятности:

$$p_{ij}^{(k)} = Y^{-\tau_{ij}^{(k)}}; \quad \sum_{i,j} \sum_k p_{ij}^{(k)} = 1, i, j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Среднюю скорость информации, создаваемую последовательностями двоичных символов длительностью  $\tau_{ij}^{(k)}$  для ИКУ, можно найти из формулы:

$$\dot{J}(Y) = - \sum_{i,j} \sum_k P_i p_{ij}^{(k)} \log p_{ij}^{(k)} / \sum_{i,j} \sum_k P_i p_{ij}^{(k)} \tau_{ij}^{(k)}. \quad (10)$$

Подставляя значение  $p_{ij}^{(k)}$  из (9) в (10) и проводя ряд преобразований, при  $k \rightarrow \infty$  имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \dot{J}(Y) = \log Y. \quad (11)$$

На основании выполненного исследования при учете, что стохастическая матрица состояний может иметь только один максимальный действительный корень, равный единице, установлено, что скорость передачи информации через ИКУ достигает максимального значения для  $Y$ , определяемого выражением (11) и являющегося наибольшим корнем уравнения  $\det|Y| = (Y^{-\tau} - I) = 0$ , причем  $I$  – единичная матрица. Но соответствующая этому состоянию ИКУ вероятность на его выходе достигает значения  $P_i p_{ij}^{(k)} = 1$  лишь при  $k \rightarrow \infty$ . Поэтому максимальная скорость информации, создаваемая ИКУ, или его пропускная способность меньше скорости создания информации источником  $\dot{J}(x)$ . Следствием этого будет потеря информации. Для обеспечения наилучшего кодирования согласование ИКУ и источника информации надо осуществлять по пропускной способности ИКУ. Как правило, ИКУ рассчитывается на пропуск определенного количества информации в единицу времени. Очевидно, что пропускная способность ИКУ должна быть не меньше скорости создания информации источником, т.е.  $C \geq \dot{J}(x)$ . Если распределение вероятностей символов неизвестно, то используют максимально возможную информацию источника, которая имеет место при равновероятном процессе. Например, полосу пропускания ИКУ  $f$  можно оценить по формуле:

$$f \geq \frac{2f_c \log_2 m}{\log_2(1 + \frac{P_c}{P_n})}, \quad (12)$$

где  $f_c$  – верхняя частота спектра сигнала, создаваемого источником;  $P_c, P_n$  – соответственно мощности сигнала источника информации и всевозможных помех и шумов, присутствующих при измерениях;  $m$  – число всех возможных двоичных символов.

Равенство в (12) относится к случаю использования идеальной пропускной способности, в то время как действительная пропускная способность ИКУ при реальном коде, например, время-импульсной или кодово-импульсной модуляции будет несколько ниже. Формула (12) –

это предельное соотношение для предварительных оценок. Во избежание потерь информации необходимо оценить влияние шага и шумов квантования на информационные характеристики применяемых ИКУ.

## **2. Оценка влияния шага квантования по времени на информационную характеристику ИКУ**

При выборе ИКУ с тем или иным видом модуляции сигналов необходимо оценивать возникающие в них потери информации. В связи с этим исследуем влияние процесса квантования на информационную характеристику ИКУ типа ВИМ, широко применяемую в телеметрических системах. Приводимые ниже соотношения справедливы для любого вида модуляции из числа используемых. Действительно, элементами входного пространства произвольного ИКУ являются упорядоченные пары  $(X, Y)$ . В этом случае для совокупности непересекающихся множеств  $x_k$  и  $y_k$ , последовательности которых образуются согласно закону (7), скорость создания выходной информации определяется как

$$j(x_k, y_k) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n p(x_k, y_k) \log \frac{p(x_k, y_k)}{p(x_k)p(y_k)}, \quad (13)$$

где  $p(x_k, y_k)$  соответствует вероятности объединения множеств  $x_k$  и  $y_k$ . На практике полоса частот измерительных устройств всегда ограничена, и требуется квантовать входной сигнал с более малыми шагами по времени и уровню. Квантование по уровню связано с ограниченной точностью средств измерения, а по времени – характером обработки. Изменение скорости создания информации из-за уменьшения шага квантования ВИМ-сигнала можно показать, если применить следующий подход. Допустим, что из-за сокращения интервала квантования  $\tau_i$  первоначальное множество  $y_k$  разбивается на два подмножества  $y_k' + y_k''$ . Тогда формулу (13) можно переписать в виде:

$$j(x_k, y_k) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n [p(x_k, y_k') + p(x_k, y_k'')] \log \frac{[p(x_k, y_k') + p(x_k, y_k'')]}{p(x_k)[p(y_k') + p(y_k'')]}. \quad (14)$$

Для упрощения вывода введем обозначения:

$$\begin{aligned} p(x_k) &= W; \quad p(y_k') = B; \quad p(y_k'') = C; \quad p(y_k) = B + C; \quad p(x_k, y_k') = S; \\ p(x_k, y_k'') &= E; \quad p(x_k, y_k) = S + E. \end{aligned} \quad (15)$$

Заменим в (14) соответствующие вероятности на введенные обозначения (15). Тогда для скорости информации получим:



$$\dot{J}(x_k, y_k) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n (S + E) \log \frac{S + E}{W(B + C)}. \quad (16)$$

Для объединения подмножеств  $y_k'$  и  $y_k''$  имеем:

$$\dot{J}(x_k, U y_k', y_k'') = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n \left[ S \log \frac{S}{WB} + E \log \frac{E}{WC} \right]. \quad (17)$$

Сравнение результатов потенцирования под знаком суммы в (16) и (17) приводит к соотношению:

$$\frac{S^S \times E^E}{B^S \times C^E} \geq \left[ \frac{S + E}{B + C} \right]^{S+E}. \quad (18)$$

Видно, что скорость информации при более упорядоченном разбиении первоначального множества интервалов квантования возрастает. В пределе при  $\tau \rightarrow 0$  эта скорость стремится к величине:

$$\dot{J}(x, y) \leq \frac{1}{T} \iint p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy.$$

На основании приведенных положений ИКУ, характеризуемое функцией  $f(x, y)$  в (1), можно оценить с помощью привносимой им потери информации:

$$\begin{aligned} \Delta J &= N \Delta \dot{J}(x, y) = \\ &= \frac{N}{T} \left[ \iint p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy - \sum_{i=1}^n p(x_k, y_k) \log \frac{p(x_k, y_k)}{p(x_k)p(y_k)} \right], \end{aligned}$$

где  $N$  – число символов, образуемых в кодере; множества  $x_k$  и  $y_k$  определяются по схеме (15) в соответствии с характеристикой ИКУ  $f(x, y)$  в (1).

Функция неизвестного распределения может быть задана априори или определена одним из общепринятых методов, приведенных в [20–22]. По величине потери информации, согласно изложенному в [12] методу, можно вычислить вероятность ошибки ИКУ:

$$P_f(\varepsilon) = \frac{1}{2} [\exp(-\Delta J(x, y)N) + \exp(-\Delta J(y, x)N)]. \quad (19)$$

В результате такого расчета принимают схему ИКУ с характеристикой  $f(x, y)$ , обеспечивающей вероятность ошибки, не превышающей заданную. Но удобнее воспользоваться оценкой среднеквадратической ошибки как функцией шага квантования  $\tau$ . Очевидно,  $\varepsilon^2$  будет уменьшаться при уменьшении  $\tau$ , и при  $\tau \rightarrow 0$  ошибка стремится к некоторому

предельному значению  $\varepsilon_0^2$ . Если задать коэффициент точности  $K$ , приходим к уравнению для определения  $\tau$ :  $\varepsilon^2(\tau) = K\varepsilon_0^2$ , причем  $1 < K < \varepsilon^2 / \varepsilon_0^2$ . Коэффициент  $K$  показывает, во сколько раз среднеквадратическая погрешность квантования превышает минимально возможную  $\varepsilon_0^2$ . Для экспоненциальных распределений ошибок квантования и входного сигнала соответственно в виде  $\exp(-\mu|t|)$  и  $\exp(-|t|)$  с помощью методики [12] при ВИМ сигнала было получено выражение для ошибки квантования:

$$\varepsilon^2 = \frac{\{[1 - \exp(-2\tau)][1 - \exp(-2\mu\tau)]\}^{\frac{1}{2}}}{2\{1 - \exp[-(1 + \mu)\tau]\}}.$$

Предел этого выражения при  $\tau \rightarrow 0$  следующий:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \varepsilon^2(\tau) = \varepsilon_0^2 = \sqrt{\mu} / (1 + \mu).$$

На рис. 2 приведен график зависимости  $\varepsilon^2$  от числа « $n$ » точек отсчета в единицу времени при  $\mu = 20$  и  $n = 1/\tau$ .

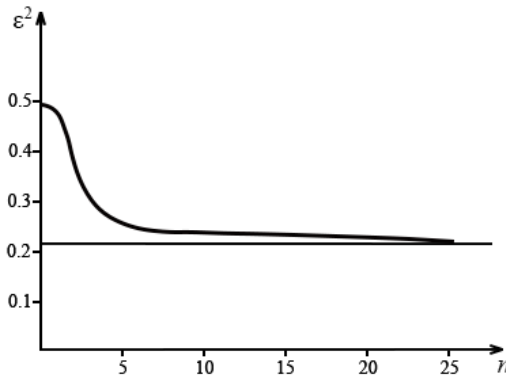


Рис. 2. Зависимость ошибки квантования от числа точек отсчета

Из рис. 2 видно, что брать число точек отсчета в единицу времени больше 10 нецелесообразно, так как увеличение числа точек отсчета не приводит к существенному уменьшению ошибки. Предельное значение ошибки при этом  $\varepsilon_0^2 = 0,213$ . Задавая коэффициент точности  $K$ , по кривой на рис. 2 можно легко найти значение интервала  $\tau = 1/n$ , при

котором  $\varepsilon^2 = K \cdot 0,213$ . Например, при  $K = 1,2$  из рис. 2 получим  $n = 7$  или  $\tau = 0,143$  с. Следовательно, этот подход позволяет, исходя из заданных условий, выбрать максимально допустимый шаг квантования по времени непрерывного сигнала. Ошибка ИКУ для ВИМ кодово-импульсной дельта-модуляции изменяется соответственно от 0,256 до 0,424 при  $n = 2, \dots, 25$  отсчетов.

В общем виде оценка характеристики ИКУ сводится к задаче оценки восстановления на Земле функции, измеренной и закодированной на борту БПЛА с помощью кодера с характеристикой  $f(y,x)$ . Эту оценку можно найти с помощью метода  $\Delta_J$  – обратных матриц [21]. В этом случае оценивается ошибка, возникающая при вырождении оператора  $A$  в задаче восстановления вектора  $X=A^{-1}Y$  по измерениям на выходе ИКУ вектора  $Y$ . Вырожденность оператора  $A$  приводит к невыполнению условия  $AA^{-1} = I$ . Однако эту оценку не приводим, так как к реальности поставленных в данной статье задач она имеет косвенное отношение и имеет самостоятельное значение.

### **3. Оценка влияние шумов квантования на информационную характеристику ИКУ**

Процессы кодирования информации в ИКУ подвержены некоторым шумам. Основную роль часто играют шумы, возникающие в различных элементах этих устройств при больших коэффициентах усиления. Поэтому процессы кодирования аналоговых сигналов сопровождаются ошибками, происходящими из-за неидеальной характеристики кодирующего устройства, что приводит к появлению так называемого шума квантования. Вопросы исследования этих шумов достаточно подробно изложены в трудах [7, 23, 24, 26–30]. В связи с этим мы коснемся одного вопроса информационной оценки шумов квантования, возникающего при выборе измерительно-кодирующих устройств.

В соответствии с известной теоремой К. Шеннона [23], нижняя граница скорости передачи информации в оптимальных ИКУ должна выбираться следующей:

$$C \geq f_c \log_2 \left[ \frac{1}{2\pi e \sigma_{\Pi}^2} \exp(2\sigma_{\text{H}}^2) \right], \quad (20)$$

где  $\sigma_{\Pi}^2$  – дисперсия (мощность) шума;  $\sigma_{\text{H}}^2$  – дисперсия энтропии кодовой последовательности;

$$\sigma_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(y_k) \log_2^2 p(y_k) dy - H_0^2, \quad (21)$$

причем  $H_0 = -\int_{-\infty}^{\infty} p(y_k) \log_2 p(y_k) dy$  – дифференциальная энтропия кодовой последовательности.

При кодировании различные символы кодируются различным числом двоичных знаков. Количество двоичных знаков на символ должно быть равно частной энтропии этого символа, т.е.  $-\log_2 p_i$ . Если все числа  $-\log_2 p_i$  являются целыми, то таким кодом является код Шеннона–Фано. Величина энтропийной дисперсии (21) характеризует различие частных энтропий  $-\log_2 p_i$  между собой и остается ограниченной величиной при уменьшении шага квантования по уровню. Как известно, если шаг квантования стремится к нулю, то в непрерывном случае энтропия Шеннона стремится к бесконечности.

Допустим, что шумы отсутствуют и выборки  $\{y\}$  создаются на выходе безынерционной ИКУ по методу конечных разностей:

$$\Delta y_k = y_k - \hat{y}_k, \quad (22)$$

где

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^k d_j y_{k-j}. \quad (23)$$

Минимизация потерь информации в рамках общепринятой схемы О’Нила [31] при аппроксимации гауссовских последовательностей рядом (23) приводит к граничному условию:

$$\Delta J_{\min} \leq \left[ 6n + 10 \log_2 \left( \frac{\sigma^2}{\sigma_H^2} \right) \right], \quad (24)$$

где  $n$  – число двоичных разрядов при кодировании каждой выборки при частоте ее, равной  $2fc$ ;  $\sigma^2$  – дисперсия сигнала.

Формула (24) получена при числе символов, образуемых в ИКУ, равном 10 и длине последовательностей двоичных символом  $S = \{5, 10, 20, 30, 40, 50\}$ . Выражение (24) представляет аналитическое решение для нижней границы потерь информации, которую можно получить за счет идеального кодирования (ИД), причем в силу стохастического характера исследуемого процесса величина ошибок всегда отлична от нуля. Условию (24) отвечает схема кодирования с экстраполято-

ром, показанная на рис. 3, а. Эта схема кодирования работает с потерями информации, поэтому скорости передачи информации на ее входе и выходе не будут одинаковы. На рис. 3, б приведена схема с реальным кодирующим устройством при той же частоте квантования [25, 28].

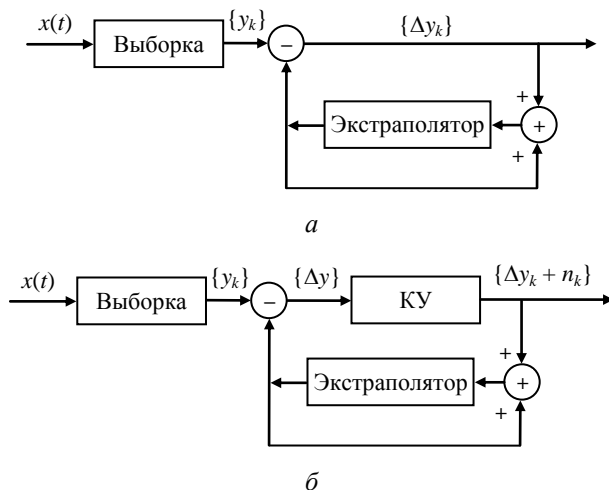


Рис. 3. Схемы кодирования: а – с безынерционным кодирующим устройством; б – с экстраполятором и обратной связью по ошибке квантования;  $n_k$  – шум квантования

В основу экстраполятора положена методика полиномиальной аппроксимации [22] математического ожидания информации с помощью статистической регрессии:

$$M \{ J [ \Delta y_k / (\Delta y_k)_I ] \},$$

где  $M$  – оператор математического ожидания;  $J [ \Delta y_k ]$  – информационная функция, являющаяся зависимой переменной;  $(\Delta y_k)_I = \| \Delta y_1, \dots, \Delta y_k \|$  – множества измеряемых величин (предсказывающая переменная);  $\Delta y_k = \| (\Delta y_k)_I, (\Delta y_k)_{II} \|$  – расширенное множество величин/параметров состояния объекта.

По выборке измеряемых величин  $(\Delta y_k)_I$  прогнозируется значение информации, отвечающей другой части множества  $\Delta y_k \rightarrow (\Delta y_k)_{II} = \| \Delta y_{k+1}, \dots, \Delta y_{k+k_1} \|$  при наличии корреляции между  $(\Delta y_k)_I$  и  $(\Delta y_k)_{II}$ . Появляется возможность расширения числа используемых измерений в исходной предсказывающей выборке за счет дополнительных

измерений из  $(\Delta y_k)_{II}$ . При этом увеличивается объем предсказываемой информации. Оценки коэффициентов  $d_j$  в (23) искались с минимальной дисперсией количества информации по методике определения оценок наименьших квадратов, используя итерационную процедуру. В качестве начального значения функции информации принималась ее оценка, найденная по одной реализации, причем ее верхнее значение определяется распределением  $\chi^2$  при  $100(1 - \alpha)\%$ -ном доверительном интервале и числе степеней свободы, равном  $k - 1$ , а именно:

$$J_0(\Delta y_k) \leq \chi_{1-\alpha}^2. \quad (25)$$

#### 4. Численные результаты

В ходе моделирования применялись экспериментальные данные с гироскопического датчика курсовой системы БПЛА для двух интервалов измерений, первый из которых включал 22 точки, а второй  $(\Delta y_k)_{II}$  – 9 точек. Согласно (25) при 95%-ном доверительном интервале верхние оценки информации составили 5,80 и 9,25 бит для первого и полного множеств значений величин при корреляции между  $(\Delta y_k)_I$  и  $(\Delta y_k)_{II}$ , равной 0,74. При использовании построенной модели прогноза информации на интервале тестирования 50 мин средняя ошибка прогноза в процентах по всем измерениям для гауссовского распределения при энтропийной дисперсии в 1,04 бит составила 5,3 %, что является приемлемым не только для имитационного моделирования исследуемых процессов, но и для практики прогнозирования в реальных условиях. Вычисленные значения  $d_j$  находились в пределах 0,5–1,6, а увеличение информации за счет дополнительной выборки составило в 1,5 раза.

Результаты моделирования на основе проведенных расчетов характеристик различных видов ИКУ при передаче гауссовских сигналов с ограниченным спектром:

$$F(j\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при других } \omega_c \leq \omega \leq \omega_c, \\ \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 + 1 \right], & \\ 0, & \text{при других } \omega, \end{cases}$$

причем  $\omega_c = 2\pi f_c = 25c^{-1}$  при  $f_c = 4$  Гц приведены на рис. 3. Здесь приняты обозначения: ШФ – код Шеннона–Фано,  $P$  – равномерный код, ВИМ – время-импульсная модуляция, КИМ – кодовоимпульсная ли-

нейная модуляция,  $\Delta M$  – дельта-модуляция при  $n$  двоичных разрядах на интервал,  $3\sigma$ -квантователь по правилу  $\pm 3\sigma$ .

Если сопоставить различные применяемые виды модуляции по минимальным потерям информации, то они хуже идеального случая (ИД) (рис. 4).

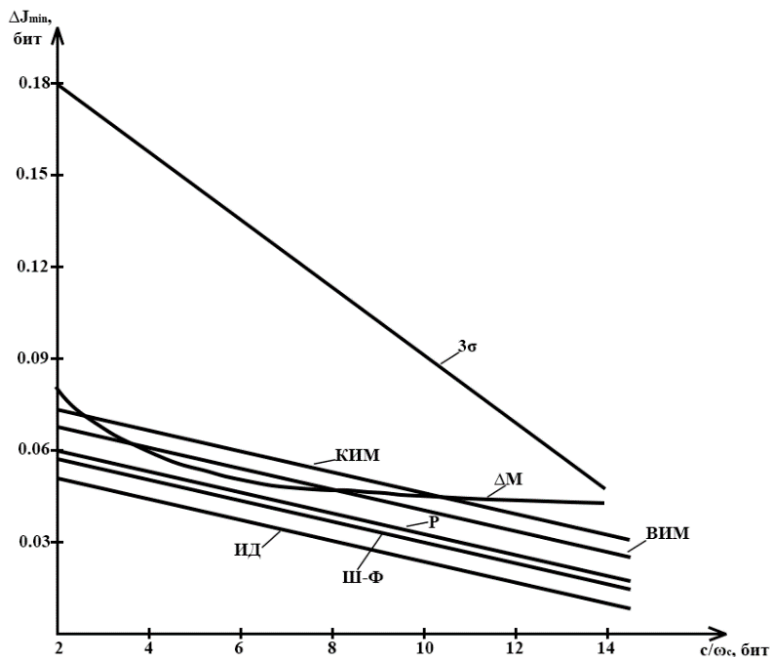


Рис. 4. Характеристики кодирующих устройств

Самые большие потери наблюдаются для квантователя по закону  $\pm 3\sigma$ , они на порядок хуже. Коды Шеннона–Фано равномерны, ВИМ- и КИМ-модуляции обеспечивают близкие значения потерь информации к идеальному варианту. Это объясняется тем, что при кодировании информация в сигнале содержится в виде сочетания определенных символов, например, двоичный код. Воздействие шумов, изменяющих амплитуду сигнала, не изменяет сочетания символов до того уровня шумов, пока их величина не будет в состоянии преобразовать один знак в другой, т.е. импульс в паузу. Другими словами, сочетание измененных двоичных знаков остается практически тем же, что и при неизменных двоичных знаках. С ростом скорости передачи информации ее потери из-за шумов квантования при кодировании снижаются.

## Заключение

В данной работе рассмотрены ИКУ как системы, состояния которых описываются случайным числом символов конечного алфавита. Аналитически получены формулы (8), (9), определяющие переходные вероятности, соответствующие случайным длительностям символов между соседними состояниями ИКУ.

Выведена формула (11) для средней скорости информации, создаваемой последовательностями случайных длительностей дискретных символов. Методом информационной экстраполяции функции измерений найдены оценки потерь информации в шести кодирующих устройствах. Приведённые результаты численных расчётов указывают, что различием кодов Шеннона–Фано равномерного, ВИМ и КИМ-модуляций между собой можно пренебречь для гауссовских сигналов в ин-

тервале значений отношений  $\frac{c}{\omega_c} \gg 12$ , причём эти оценки не связаны

с априорными предположениями относительно величины шума квантования. Установлено, что выбор числа точек отсчета при квантовании по времени свыше 10 означает возможность прерывания процедуры численного расчета для распространённых видов ИКУ как ВИМ, кодово-импульсная и дельта-модуляции, что важно с точки зрения практической реализации предлагаемого подхода.

## Библиографический список

1. Planetary technology. Prerequisites for the formation of a new scientific discipline / М.М. Khayrutdinov, С.В. Kongar-Syuryun [et al.] // *Gornaya Promyshlennost.* – 2020. – № 3. – P. 113–120. DOI: 10.30686/1609-9192-2020-3-113-120
2. Remote sensing data analysis for the ecological stability purposes / J. Chromcak, M. Farbak [et al.] // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science.* – 2021. – 906(1), 012068. DOI: 10.1088/1755-1315/906/1/012068
3. Kulikova E., Ivannikov A. Geographic information systems in geological monitoring during the construction of urban underground structures // *Monitoring 2019 Conference – Monitoring of Geological Processes and Ecological Condition of the Environment.* DOI: 10.3997/2214-4609.201903192



4. Ensuring the sustainability of arctic industrial facilities under conditions of global climate change / G. Buslaev [et al.] // Resources. – 2021. – 10(12). – 128. DOI: 10.3390/resources10120128

5. Umerbekov Zh.Zh., Goncharenko S.N. Validation of efficiency of the target production safety management model introduction in the mining industry // MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin. – 2019. – 8. – P. 225–234. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2019-08-0-225-234

6. Goncharenko A.N. Modern trends and application models in e-learning and remote training in the framework of higher education programs // MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin. – 2018. – 6. – P. 222–230. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-6-0-222-230

7. Multiple-signal single-loop filter (MSSF) sigma-delta modulators / A. Torralba, F. Colodro, J. Martinez-Heredia, J. Mora // AEU-Intern. Journal of Electronics and Communications. – 2021. – Vol. 132. – P. 212–222. DOI: 10.1016/j.aeue. 2021. 153633

8. Trofimov V.B. An approach to intelligent control of complex industrial processes: an example of ferrous metal industry // Automation and Remote Control. – 2020. – 81(10). – P. 1856–1864.

9. Магеррамов Р.В. Аналого-цифровое преобразование [Электронный ресурс] // Молодой ученый. – 2017. – № 2 (136). – С. 152–155. – URL: <https://moluch.ru/archive/136/38098/> (дата обращения: 09.08.2022).

10. Aristov A.O. Quasi-cellular nets based on models of flow-systems // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1392. – № 1. – P. 1–5. DOI: 10.1088/1742-6596/1392/1/012064

11. Фрейман В.И. К вопросу о проектировании и реализации элементов и устройств распределенных информационно-управляющих систем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2019. – № 30. – С. 28–49.

12. Куприянов В.В. Теоретическое обоснование возможности снижения потерь информации при измерениях непрерывных случайных величин при наличии шумов // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2021. – № 8. – С. 70–81. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2021\_8\_0\_70

13. Integration of GNSS with non-radio sensors with separation of the state vector for transport navigation tasks / D. Tsaregorodtsev [et al.] // 27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation

Systems, ICINS 2020 – Proceedings. – 2020. – 9133762. DOI: 10.23919/ICINS43215.2020.9133762

14. Vehicles Cooperative Navigation Using GNSS for Coordinates and DSRC for Mutual Heading / A.Y. Ustinov, R.S. Kulikov, E.V. Zakharova, V.N. Zamolodchikov // 12th International Scientific and Technical Conference, 2018 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics). – 2019. – 8601468. DOI: 10.1109/Dynamics.2018.8601468

15. Pfanzagl I. Theory of measurements. – New York: Wiley, 1976. – 378 p.

16. Gerardy R. Experiments with some methods for the identification of finite-state systems // Intern. Journal of General Systems. – 2017. – Vol. 4, № 9. – P. 197–203.

17. Puri M.L., Ralescu D. A possibility measure is not a fuzzy measure // Fuzzy Sets and Systems. – 2018. – Vol. 3, № 7. – P. 311–315.

18. Christensen R. Entropy minimax sourcebook. Applications entropy. – Lincoln: Massachusetts, 2019. – 326 p.

19. Watanabe S. Knowing and guessing. – New York: Wiley, 2014. – 487 p.

20. Guiasu S. Information technology with applications. – New York: McGraw-Hill, 2007. – 312 p.

21. Barto A.G. Discrete and continuous models // Intern. Journal of General Systems. – 2013. – Vol. 3, № 3. – P. 163–177.

22. Wilks S.S. Mathematical statistics. – New York: Wiley, 2014. – 487 p.

23. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИИЛ, 1963. – 829 с.

24. Jaynes E.T. Maximum entropy formalism // IEEE Transactions on Systems. – 2018. – Vol. 2, № 4. – P. 137–176.

25. Delta-modulator based quantized output feedback controller for linear networked control systems / C. Wanigasekara, D. Almahles, A. Swain, S. Nguang // IEEE Access Journal. – 2020. – Vol. 8. – P. 175169–175179.

26. Reza F.M. An introduction to information theory. – New York: McGraw-Hill, 2010. – 395 p.

27. Kapur J.N. On maximum entropy complexity measures // Intern. Journal of General Systems. – 2013. – Vol. 9, № 2. – P. 95–102.

28. Viachos A., Temenos N., Sotiriadis P.P. Exploring the effectiveness of sigma-delta modulators in stochastic computing-based FIR filtering // Paper presented at the 2021 10th International Conference on Modern Circuits and Systems Tehnologies, MOCAS.T. – 2021. – P. 368–379. DOI: 10.1109/MOCAS.T 52088.2021.9493368

29. Kupriyanov V.V., Bondarenko I.S. Ensuring safety of industrial cargo by rail transportation at the mining enterprises // Безопасность труда в промышленности. – 2021. – № 4. – P. 56–62. DOI: 1024000/0409-2961-2021-4-56-62

30. Kupriyanov V.V., Temkin I.O., Bondarenko I.S. Study of the time characteristics for emergency situations in the coal mines // Безопасность труда в промышленности. – 2022. – № 1. – P. 39–45. DOI: 1024000/0409-2961-2022-1-39-45

31. Куллбак С. Теория информации и статистика. – М.: Наука, 1968. – 406 с.

## References

1. Khayrutdinov M.M., Kongar-Syuryun C.B. et al. Planetary technology. Prerequisites for the formation of a new scientific discipline. *Gornaya Promyshlennost*, 2020, no. 3, pp. 113-120. DOI: 10.30686/1609-9192-2020-3-113-120

2. Chromcak J., Farbak M. et al. Remote sensing data analysis for the ecological stability purposes. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 2021, 906(1), 012068. DOI: 10.1088/1755-1315/906/1/012068

3. Kulikova E., Ivannikov A. Geographic information systems in geological monitoring during the construction of urban underground structures. *Monitoring 2019 Conference - Monitoring of Geological Processes and Ecological Condition of the Environment*. DOI: 10.3997/2214-4609.201903192

4. Buslaev G. et al. Ensuring the sustainability of arctic industrial facilities under conditions of global climate change. *Resources*, 2021, 10(12), 128. DOI: 10.3390/resources10120128

5. Umerbekov Zh.Zh., Goncharenko S.N. Validation of efficiency of the target production safety management model introduction in the mining industry. *MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin*, 2019, 8, pp. 225-234. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2019-08-0-225-234

6. Goncharenko A.N. Modern trends and application models in e-learning and remote training in the framework of higher education programs // *MIAB. Mining Informational and Analytical Bulletin*, 2018, 6, pp. 222-230. [In Russ]. DOI: 10.25018/0236-1493-2018-6-0-222-230

7. Torralba A., Colodro F., Martinez-Heredia J., Mora J. Multiple-signal single-loop filter (MSSF) sigma-delta modulators. *AEU-Intern. Journal of Electronics and Communications*, 2021, vol. 132, pp. 212-222. DOI: 10.1016/j.aeue. 2021. 153633

8. Trofimov V.B. An approach to intelligent control of complex industrial processes: an example of ferrous metal industry. *Automation and Remote Control*, 2020, 81(10), pp. 1856-1864.

9. Magerramov R.V. Analogo-tsifrovoye preobrazovanie [Analog to digital conversion]. *Molodoi uchenyi*, 2017, no. 2 (136), pp. 152-155, available at: <https://moluch.ru/archive/136/38098/> (accessed 09 August 2022).

10. Aristov A.O. Quasi-cellular nets based on models of flow-systems. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1392, no. 1, pp. 1-5. DOI: 10.1088/1742-6596/1392/1/012064

11. Freiman V.I. K voprosu o proektirovanii i realizatsii elementov i ustroystv raspredelennykh informatsionno-upravliaiushchikh sistem [On the issue of designing and implementing elements and devices of distributed information and control systems]. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Elektrotehnika, informatsionnye tekhnologii, sistemy upravleniia*, 2019, no. 30, pp. 28-49.

12. Kupriianov B.B. Teoreticheskoe obosnovanie vozmozhnosti snizheniia poter' informatsii pri izmereniiakh nepreryvnykh sluchainykh velichin pri nalichii shumov [Theoretical justification of the possibility of reducing information loss when measuring continuous random variables in the presence of noise]. *Gornyi informatsionno-analiticheskii biulleten'*, 2021, no. 8, pp. 70-81. DOI: 10.25018/0236\_1493\_2021\_8\_0\_70

13. Tsaregorodtsev D. et al. Integration of GNSS with non-radio sensors with separation of the state vector for transport navigation tasks. *27th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS 2020 - Proceedings*, 2020, 9133762. DOI: 10.23919/ICINS43215.2020.9133762

14. Ustinov A.Y., Kulikov R.S., Zakharova E.V., Zamolodchikov V.N. Vehicles Cooperative Navigation Using GNSS for Coordinates and DSRC for Mutual Heading. *12th International Scientific and Technical*

*Conference, 2018 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines (Dynamics)*, 2019, 8601468. DOI: 10.1109/Dynamics.2018.8601468

15. Pfanzagl I. Theory of measurements. New York: Wiley, 1976, 378 p.

16. Gerardy R. Experiments with some methods for the identification of finite-state systems. *Intern. Journal of General Systems*, 2017, vol. 4, no. 9, pp. 197-203.

17. Puri M.L., Ralescu D. A possibility measure is not a fuzzy measure. *Fuzzy Sets and Systems*, 2018, vol. 3, no. 7, pp. 311-315.

18. Christensen R. Entropy minimax sourcebook. Applications entropy. Lincoln: Massachusetts, 2019, 326 p.

19. Watanabe S. Knowing and guessing. New York: Wiley, 2014, 487 p.

20. Guiasu S. Information technology with applications. New York: McGraw-Hill, 2007, 312 p.

21. Barto A.G. Discrete and continuous models. *Intern. Journal of General Systems*, 2013, vol. 3, no. 3, pp. 163-177.

22. Wilks S.S. Mathematical statistics. New York: Wiley, 2014, 487 p.

23. Shennon K. Raboty po teorii informatsii i kibernetike [Works on information theory and cybernetics]. Moscow: IIL, 1963, 829 p.

24. Jaynes E.T. Maximum entropy formalism. *IEEE Transactions on Systems*, 2018, vol. 2, no. 4, pp. 137-176.

25. Wanigasekara C., Almakhles D., Swain A., Nguang S. Delta-modulator based quantized output feedback controller for linear networked control systems. *IEEE Access Journal*, 2020, vol. 8, pp. 175169-175179.

26. Reza F.M. An introduction to information theory. New York: McGraw-Hill, 2010, 395 p.

27. Kapur J.N. On maximum entropy complexity measures. *Intern. Journal of General Systems*, 2013, vol. 9, no. 2, pp. 95-102.

28. Viachos A., Temenos N., Sotiriadis P.P. Exploring the effectiveness of sigma-delta modulators in stochastic computing-based FIR filtering. *Paper presented at the 2021 10th International Conference on Modern Circuits and Systems Tehnologies, MOCAS*T, 2021, pp. 368-379. DOI: 10.1109/MOCAST 52088.2021.9493368

29. Kupriyanov V.V., Bondarenko I.S. Ensuring safety of industrial cargo by rail transportation at the mining enterprises. *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*, 2021, 4, pp. 56-62. DOI: 1024000/0409-2961-2021-4-56-62

30. Kupriyanov V.V., Temkin I.O., Bondarenko I.S. Study of the time characteristics for emergency situations in the coal mines. *Bezopasnost' truda v promyshlennosti*, 2022, no. 1, pp. 39-45. DOI: 1024000/0409-2961-2022-1-39-45

31. Kullbak S. *Teoriia informatsii i statistika* [Information theory and statistics]. Moscow: Nauka, 1968, 406 p.

### **Сведения об авторах**

**Куприянов Вячеслав Васильевич** (Москва, Россия) – доктор технических наук, профессор кафедры «Автоматизированные системы управления» Института информационных технологий и компьютерных наук Национального исследовательского технологического университета «Московский институт стали и сплавов» (119049, Москва, Ленинский пр., 4, e-mail: kupriyanov.vv@misis.ru).

**Бондаренко Инна Сергеевна** (Москва, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные системы управления» Института информационных технологий и компьютерных наук Национального исследовательского технологического университета «Московский институт стали и сплавов» (119049, Москва, Ленинский пр., 4, e-mail: innabondarenko@gmail.com).

### **About the authors**

**Vyacheslav V. Kupriyanov** (Moscow, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor National University of Science and Technology “MISiS”, National University of Science and Technology “MISiS” (119049, Moscow, 4, Leninsky pr., e-mail: v\_v\_kupriyanov@mail.ru).

**Inna S. Bondarenko** (Moscow, Russian Federation) – Ph. D in Technical Sciences, Associate Professor National University of Science and Technology “MISiS” (119049, Moscow, 4, Leninsky pr., e-mail: innabondarenko@gmail.com).

Поступила: 25.10.2022. Одобрена: 16.01.2023. Принята к публикации: 01.04.2023.

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов по отношению к статье.

**Вклад авторов.** Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Куприянов, В.В. Условия применимости математической модели измерительно-кодирующих устройств и определение потерь информации при наличии шумов квантования / В.В. Куприянов, И.С. Бондаренко // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Электротехника, информационные технологии, системы управления. – 2023. – № 45. – С. 107–129. DOI: 10.15593/2224-9397/2023.1.05

Please cite this article in English as:

Kupriyanov V.V., Bondarenko I.S. Conditions of measuring-coders mathematical model applicability and definition of information losses at the slicing noises presence. *Perm National Research Polytechnic University Bulletin. Electrotechnics, information technologies, control systems*, 2023, no. 45, pp. 107-129. DOI: 10.15593/2224-9397/2023.1.05