

УДК 517.93

DOI: 10.15593/2224-9982/2023.72.04

В.П. Иванов

Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр
Российской академии наук, Санкт-Петербург, Россия

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА МНОЖЕСТВЕ СИНГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ

Рассматривается проблема построения общих решений задач терминального управления нелинейными системами. Доказывается, что оптимальная траектория является огибающей параметрического семейства поверхностей и, соответственно, определённым на них параметрическим семейством сингулярных кривых; оптимальное управление может быть найдено на этом семействе. Приводится конструктивный метод построения сингулярных кривых. «Свободные» параметры сингулярных кривых находятся из условия минимизации терминального функционала. Такой подход в ряде случаев позволяет избежать явного решения краевой задачи для класса нелинейных динамических систем, упростить вычислительные алгоритмы. Вводится принцип информационного дуализма. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: нелинейные дискретные системы, оптимальное управление, огибающие, параметрическое семейство, сингулярные кривые.

V.P. Ivanov

Saint Petersburg Federal Research Center of Russian Academy of Sciences,
Saint Petersburg, Russian Federation

METHOD OF SYNTHESIS OF OPTIMAL TERMINAL CONTROL OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS USING A SET OF SINGULAR CURVES

The problem of constructing general solutions to the problems of terminal control of nonlinear systems is considered. It is proved that: 1) the optimal trajectory is the envelope of a parametric family of surfaces and, accordingly, a parametric family of singular curves defined on them, 2) optimal control can be found on this family. A constructive method for constructing singular curves is given. The "free" parameters of singular curves are found from the condition of minimization of the terminal functional. Such an approach in some cases avoids the explicit solution of the boundary value problem for a class of nonlinear dynamical systems, and simplifies computational algorithms.

Keywords: nonlinear discrete systems, optimal control, envelopes, parametric family, singular curves.

Синтез оптимального управления динамическими системами различного назначения является задачей, без решения которой невозможно создание высокоэффективных устройств, систем, технологий. В первую очередь это относится к управлению изделиями авиационной, ракетной, космической техники, а в более широком смысле – к транспортным системам различного назначения, к управлению ядерными, химическими реакторами, энергетическими и экономическими системами и т.д., постепенно охватывая многие сферы практической деятельности человечества. Усложнённость и разнообразие рассматриваемых задач определяет актуальность методов оптимизации.

В теории и практике оптимального управления нелинейными системами достаточно широко используются системы терминального управления, в которых целью управления является достижение заданной точки пространства состояний в заданный (терминальный) момент времени. Или в другой формулировке: минимизация терминального функционала, определённого в заданной точке пространства состояний в данный момент времени. Отметим, что к задаче минимизации терминального функционала может быть сведена (при введении соответствующих переменных) большая часть задач оптимального управления с иными критериями качества.

Решение задач оптимизации управления нелинейными системами неразрывно связана с проблемой решения соответствующей краевой задачи. При отсутствии аналитических решений она тем или иным способом решается численно. При этом неизбежны другие проблемы численных методов, такие как ошибки округлений, проблемы машинного нуля, устойчивости и сходимости и др. Поэтому необходимы поиски других подходов к преодолению указанных трудностей, в частности к использованию метода огибающих.

Методам решения задач оптимального управления, в том числе численным, посвящено достаточно много научной литературы (см. [1–7]).

Настоящая работа базируется на обзоре результатов исследований автора, опубликованных в [8–11] с добавлением новых фрагментов, новых интерпретаций. Общая идея подхода состоит в том, что непрерывная фазовая траектория может быть представлена как огибающая семейства сингулярных кривых, восстановленных в каждой её точке, в общем случае не являющихся фазовыми траекториями. Это создаёт предпосылки к поиску управления на семействе сингулярных кривых.

Постановка задачи оптимального терминального управления нелинейной динамической системой

Рассмотрим класс нелинейных управляемых динамических систем вида

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= f_j(x) + B_j(x)u_j, \quad j = 1, \dots, m, \\ \frac{dx_i}{dt} &= f_i(x), \quad i = m + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $B = (B_1, \dots, B_m)$ – заданные нелинейные вектор-функции; $B_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$; $u = (u_1, \dots, u_m)$ – m -мерный вектор управления; $m < n$.

В рамках данной статьи будем рассматривать случай, когда каждая j -я компонента управления ограничена отрезками $[U_{j\min}^{dop}, U_{j\max}^{dop}]$.

Задан терминальный функционал:

$$J = F \left[\| x_i(T) - x_{zad\ i} \|, \quad i = m + 1, \dots, n \right], \quad (2)$$

определенный на решениях системы уравнений (1). F – некоторая заданная функция; $T \in \mathfrak{S}(t)$; $x_{zad} = (x_{zad\ 1}, \dots, x_{zad\ n})$ – заданные значения вектора состояния.

В момент $t = T$ могут быть введены дополнительные условия вида

$$h_i = h_i[x(T)], \quad i = 1, \dots, n,$$

которые могут быть включены в функционал (2) через дополнительные множители Лагранжа.

Так как система уравнений (1) автономная, то множество $\mathfrak{S}(t)$ допустимо сузить до отрезка $[t_0, T]$, где t_0 – начальное значение аргумента t , $t_0 \in \mathfrak{S}(t)$. Момент времени T не фиксирован. Значения $x(t_0) = x_0$ известны.

Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом [6, 7]: среди всех допустимых на отрезке $[t_0, T]$ управлений $u \in U$, переводящих точку (t_0, x_0) в точку $(T, x(T))$, найти такие, для которых функционал (2), определенный на решениях системы уравнений (1), принимает наименьшее значение при выполнении условий (3).

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, \dots, p_n)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации H :

$$H = \sum_{i=1}^n p_i f_i + \sum_{j=1}^m p_j B_j u_j. \quad (3)$$

С использованием функции H в пространстве переменных $D^n(x, p)$, $x \in D^n(x, p)$, $p \in D^n(x, p)$, уравнения для x и p запишутся в следующей канонической форме [6, 7]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Отметим, что H и p на оптимальном решении непрерывны и к этому же приводит аналог условия Эрдмана – Вейерштрасса классического вариационного исчисления. Непрерывность сохраняется и в том случае, когда правые части уравнений (1) терпят разрыв.

Как доказано [6, 7], для оптимизации управления $u(t)$ и фазовой траектории $x(t)$ в рамках принципа максимума необходимо существование такого ненулевого вектора p , что выполняются следующие условия:

1) Функция H переменного $u \in U$ при каждом $t \in [t_0, T]$, т.е. при фиксированных x, p , достигает при $u = u_{opt}(t)$ минимума:

$$H(x_{opt}, u_{opt}, p) = \min_{u \in U} H(x, u, p). \quad (5)$$

Таким образом, оптимальное управление на границе множества допустимого управления определяется как

$$u_{opt} = \arg \min_{u \in U} H(x, u, p). \quad (6)$$

2) Выполняются условия трансверсальности:

$$\left[H \delta t - \sum_{i=1}^n p_i \delta x_i \right]_{t_0}^T + \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \delta x_i \right]_{t_0}^T = 0, \quad (7)$$

где $\delta t, \delta x_i$ – произвольные вариации соответствующих переменных.

Обобщенные условия трансверсальности в силу независимости вариаций приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} [H]_{t_0}^T &= 0, \\ p_i |_{t_0}^T &= \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Непосредственным следствием системы уравнений (4) и условия (5) является выполнение соотношения $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$.

С учетом (8) для автономных систем при незаданном явно аргументе имеем

$$H = \text{const} = 0. \quad (9)$$

Из соотношения (5), ввиду особой структуры уравнений динамической системы (1) и, соответственно, гамильтониана (3), оптимальное управление определяется как

$$u_{opt} = \arg \min_{u \in U} H(x, u, p) = \arg \min_{u \in U} \left(\sum_{i=1}^n p_i f_i + \sum_{j=1}^m p_j B_j u_j \right) = \arg \min_{u \in U} \left(\sum_{j=1}^m p_j B_j u_j \right), \quad (10)$$

откуда после преобразований имеем

$$u_{opt j} = \begin{cases} U_{j \min}^{dop}, & \text{если } p_j B_j > 0, \\ u_{j \text{osob}}, & \text{если } p_j = 0, \\ U_{j \max}^{dop}, & \text{если } p_j B_j < 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$j = 1, \dots, m,$$

где $u_{j \text{osob}}$ – особое оптимальное управление.

Отметим, что если в начальный момент времени значения X известны (или могут быть оценены), то вектор p определен (с точностью до констант) согласно условиям трансверсальности лишь на правом конце фазовой траектории. Возникает специфическая краевая задача, после решения которой («в принципе») тем или иным способом можно найти $p(t)$, а следовательно, и u_{opt} [6, 7]. Однако вычислительные трудности, стоящие на этом пути, методические ошибки численных методов и ошибки округлений делают процесс нахождения достоверных значений весьма трудным, а зачастую (например, при выполнении требования реального масштаба времени) и невозможным. Поэтому представляется желательным использовать нетрадиционные методы синтеза оптимального управления, одним из которых, в частности, является метод огибающих.

Оптимальное управление и параметрическое семейство поверхностей (сингулярных кривых)

В работах [8–10] доказано, что оптимальную траекторию можно представить как огибающую параметрического семейства поверхностей с выделенными на них сингулярными кривыми, которые в общем случае не являются фазовыми траекториями. В силу теоремы Якоби возможна и другая трактовка: поверхность Гамильтона – Якоби, определяющая оптимальную фазовую траекторию, является огибающей частных параметрических поверхностей, формирующих сингулярные кривые.

И там же доказывается, что оптимальное управление может быть найдено на семействе сингулярных кривых.

Отметим, что на семейство поверхностей (сингулярных кривых) не налагается никаких ограничений, кроме условий огибания их оптимальной траекторией. Например, в плоском случае возможно использование квадратичных парабол. Но это требует трансформации закона управления. Можно пойти другим путём: не меняя структуры закона управления, построить рациональные сингулярные кривые, удовлетворяющие условиям огибания.

В рамках данной работы предлагается следующий подход.

Представим уравнение (9) в следующем виде:

$$H[x, u_{opt}(x, p), p] = H(x, p) = 0. \quad (12)$$

Введем непрерывную функцию $W(x)$ такую, что $W[x(T)] = J = F[x(T)]$, $p = \frac{\partial W}{\partial x}$, и при-

ведем уравнение (12) к уравнению Гамильтона – Якоби:

$$H(x, p) = H\left(x, \frac{\partial W}{\partial x}\right) = 0. \quad (13)$$

Отметим, что уравнение (13) можно получить из уравнения Бэллмана с учётом автономности системы уравнений (1), условий трансверсальности (7), подставляя закон оптимального управления (11).

Представим функцию W в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных x_v , $v=1, \dots, n$ и аддитивной константы W_0 , т.е.:

$$W = \sum_{v=1}^n \bar{W}_v(x_v, \alpha) + W_0, \quad (14)$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Определим канонические переменные p_v , $v=1, \dots, n$:

$$p_v = \frac{\partial W}{\partial x_v} = \frac{\partial \bar{W}_v(x_v, \alpha)}{\partial x_v}, \quad v=1, \dots, n. \quad (15)$$

Согласно выражениям (15), переменные p_v , $v=1, \dots, n$ оказываются функциями только одной x_v и α , в то время как уравнения (1), (4) и условие $p = \frac{\partial W}{\partial x}$ говорят о том, что p_v , $v=1, \dots, n$ в общем случае должны быть функциями всех x_1, \dots, x_n и остальных p_i , $i=1, \dots, n$, $i \neq v$. Это противоречие может быть устранено, если приравнять $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ некоторые определенные комбинации переменных x_1, \dots, x_n , «замороженных» в данный момент времени, т.е.:

$$\alpha_v = \alpha_v(x_1, \dots, x_n), \quad v=1, \dots, n. \quad (16)$$

Из выражений (11), (13), (15) следует, что p_1, \dots, p_n , и управление u_{opt} можно определить на параметрическом семействе поверхностей, которое огибает оптимальная траектория, если в качестве параметров соответствующим образом взять «замороженные» фазовые координаты и $\det\left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_v}\right) \neq 0$, $i, v=1, \dots, n$.

Фиксируя в качестве параметров «замороженные» в текущий момент времени значения фазовых координат, мы тем самым на семействе поверхностей выделим семейство сингулярных кривых. Назовем их мгновенными решениями $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, поскольку они определяются функцией W , являющейся решением уравнения (13).

С другой стороны, если W – полный интеграл уравнения (13), то по теореме Якоби имеем:

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad p = \frac{\partial W}{\partial x}. \quad (17)$$

Потребуем, чтобы α и β удовлетворяли преобразованию гамильтониана $H(x, p)$ в гамильтониан $H(\alpha)$, а также каноническим уравнениям, которые, ввиду (13), запишутся как

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0. \quad (18)$$

Последние соотношения говорят о том, что для построения мгновенных решений можно производить условное разделение переменных в уравнении Гамильтона – Якоби (см. [8]).

Отметим, что мгновенные решения также должны удовлетворять условию минимизации функционала (2) относительно используемых параметров.

Нахождение оптимального терминального управления на семействе сингулярных кривых (мгновенных решений)

Представим уравнения (5) для p_1, \dots, p_m в следующей форме:

$$\frac{dp_v}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_v} = -p_v \left(\frac{\partial f_v}{\partial x_v} + \frac{\partial B_v}{\partial x_v} u_v \right) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^m p_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} + \frac{\partial B_j}{\partial x_v} u_j \right) - \sum_{i=m+1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v}, \quad (19)$$

$$v = 1, \dots, m,$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$\frac{dp_v}{dt} + \Phi_v p_v = G_v, \quad v = 1, \dots, m, \quad (20)$$

где $\Phi_v = -\left(\frac{\partial f_v}{\partial x_v} + \frac{\partial B_v}{\partial x_v} u_v \right)$, $G_v = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq v}}^m p_j \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_v} + \frac{\partial B_j}{\partial x_v} u_j \right) - \sum_{i=m+1}^n p_i \frac{\partial f_i}{\partial x_v}$.

Проинтегрировав уравнение (24), получим:

$$p_v = \exp\left(-\int \Phi_v dt\right) \left(\int G_v \exp\left(\int \Phi_v dt\right) dt - C_v \right), \quad v = 1, \dots, m. \quad (21)$$

Постоянные C_v находятся из условий трансверсальности (7).

Отметим, что знак функций p_v , $v = 1, \dots, m$, как следует из (20), (21), определяется знаком функций C_v [8, 9].

Рассмотрим участок особого управления.

В работе [13] доказано, что, ввиду линейного вхождения управления в систему уравнений (1), особое оптимальное управление каждой j -й компоненты может быть найдено из системы уравнений:

$$\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) = 0, \quad (22)$$

$$k = 0, 1, \dots, 2p_s$$

(p_s – порядок сингулярности) при выполнении следующих необходимых условий оптимальности:

$$(-1)^{p_s} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{d^{2p_s}}{dt^{2p_s}} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) \right] \geq 0, \quad (23)$$

$$p_s = 0, 1, 2, \dots,$$

если $\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \equiv 0$, $i, j = 1, \dots, m$.

Первоначально рассмотрим случай, когда порядок сингулярности равен единице. Тогда согласно (22) особое управление можно найти из системы уравнений:

$$p_j = 0, \quad \frac{dp_j}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (24)$$

Из первых двух уравнений системы (24) следует, что на участке особого управления, ввиду (20), (21), $G_j = 0$. Разрешим это уравнение относительно переменной x_j . Если корень существует, то

$$x_j = \eta_j(x_v, p_v; \quad v = 1, \dots, n; \quad v \neq j). \quad (25)$$

Третье уравнение системы (28) после преобразований запишем как

$$\frac{dG_j}{dt} = \frac{\partial G_j}{\partial x_j} (f_j + B_j u_{j \text{ особ}}) + \frac{\partial G_j}{\partial \eta_j} \cdot \frac{d\eta_j}{dt}.$$

Из последнего соотношения можно найти особое управление:

$$u_{j \text{ особ}} = \frac{1}{B_j} \left(-f_j + \frac{d\eta_j}{dt} \right) \quad (26)$$

при выполнении необходимых условий оптимальности в следующей форме:

$$B_j \frac{\partial G_j}{\partial x_j} \Bigg|_{x_j = \eta_j} \leq 0, \quad j = 1, \dots, m. \quad (27)$$

Отметим, что корень уравнения $G_j = 0$ необязательно может быть единственным. Тогда каждый корень проверяется на выполнение необходимых (27) и достаточных (2) условий оптимальности.

В случае произвольного порядка сингулярности особое оптимальное управление, ввиду (1), находится из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$p_j = 0, \quad \frac{dp_j}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0, \dots, \frac{d^{2p_s} p_j}{dt^{2p_s}} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (28)$$

при выполнении необходимых условий (23). Как доказано в [13], особое управление «проявится» в последней производной.

Но можно находить особое управление из других соображений.

Отметим, что первые три уравнения системы (28) представляют собой уравнения первого порядка сингулярности. Продифференцировав условие сингулярности первого порядка ($2p_s - 1$) раз, можно найти особое управление как [8, 9]:

$$u_{j \text{ особ}} = f \left(x, \eta_j, \frac{d\eta_j}{dt}, \dots, \frac{d^{2p_s-1} \eta_j}{dt^{2p_s-1}} \right). \quad (29)$$

Вблизи точки первого порядка сингулярности (см. (20), (21)) $\text{sign } p_j = \text{sign } G_j$.

Так как особое управление порядка сингулярности p_z находится при чётной производной сопряжённой переменной (см. (29)), то её знак также будет соответствовать знаку функции G_j .

Для нахождения управления на границе допустимого множества управлений из (1), (2), (5), (12) следует:

$$u_{opt j} = \begin{cases} U_{j \min}^{dop}, & \text{если } -G_j B_j > 0, \\ u_{j \text{ особ}}, & \text{если } x_j = \eta_j, \\ U_{j \max}^{dop}, & \text{если } -G_j B_j < 0, \end{cases} \quad (30)$$

$j = 1, \dots, m.$

Увяжем управление с мгновенными решениями.

Используя соотношения (12)–(14), составим уравнение Гамильтона – Якоби (12) в виде [8, 9]:

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial x_j} (f_j + B_j u_j) + \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial x_i} f_i = 0. \quad (31)$$

Условно разделим переменные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{W}_n}{\partial x_n} f_n = \alpha_n; \quad \frac{\partial \bar{W}_i}{\partial x_i} f_i - \alpha_{i+1} = \alpha_i, \quad i = m+1, \dots, n; \\ \frac{\partial \bar{W}_j}{\partial x_j} (f_j + B_j u_j) - \alpha_{j+1} = \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m, \quad \alpha_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Проинтегрируем уравнения, не забывая, что в каждом из них только одна соответствующая переменная, а затем сложим и найдём функцию W :

$$W = \sum_{j=1}^m \int \frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{f_j + B_j u_j} dx_j + \sum_{i=m+1}^{n-1} \int \frac{\alpha_{i+1} + \alpha_i}{f_i} dx_i + \int \frac{\alpha_n}{f_n} dx_n + W_0.$$

Найдём выражения для составления мгновенных решений $\left(\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right)$ с учётом (1), (18):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx_m}{f_m + B_m u_m} &= \int \frac{dx_{m+1}}{f_{m+1}}; \\ \int \frac{dx_j}{f_j + B_j u_j} &= \int \frac{dx_{j+1}}{f_{j+1} + B_{j+1} u_{j+1}}; \quad j = 1, \dots, m-1; \\ \int \frac{dx_i}{f_i} &= \int \frac{dx_{i+1}}{f_{i+1}}; \quad i = m+1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (33)$$

Из этих соотношений с учётом особенности системы уравнений (1) (так как $\frac{dx_j}{f_j + B_j u_j} = dt$) получим сингулярные модели для мгновенных решений. Минимальная модель определяется числом переменных, входящих в функционал, т.е. получим [11, 12]:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \alpha), \quad i = m+1, \dots, n. \quad (34)$$

Часть «замороженных» переменных, определяющих α , является множеством параметров η , от которых зависит управление. Оставшуюся часть обозначим как $\{\tilde{\alpha}\}$, т.е. $\{\tilde{\alpha}\} = \{\alpha\}/\{\eta\}$. В итоге получим следующую сингулярную модель, описывающую мгновенные решения:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \eta, \tilde{\alpha}), \quad i = m+1, \dots, n. \quad (35)$$

Проинтегрировав систему уравнений (35), подставим полученные значения x_j на момент $t = T$ в функционал (2) и, минимизируя последний, найдём параметры η как

$$\eta_j = \arg \min_{\eta} \left(F \left[\|x_i(T) - x_{zad i}\|, \quad i \geq m+1; \quad i = k, \dots, n \right] \right), \quad (36)$$

а согласно (26), (30) и оптимальное управление.

Если правые части модели (35) не содержат x_i , то аналитическое интегрирование модели гарантировано.

Таким образом, синтез оптимального закона управления мы проводим на исходной математической модели системы (1), но вычисляем его (находим) на редуцированной сингулярной модели (35). Такая информационная двойственность задачи нами названа как принцип информационного дуализма [11, 12].

Отметим, что в случае, когда система уравнений (35) не интегрируется или нет желания её интегрировать, воспользуемся известным подходом. Задачу нахождения оптимального управления можно рассматривать как задачу вариационного исчисления, как задачу минимизации терминального функционала (2) по параметрам η при наличии ограничений (39), т.е. как задачу Майера в Гамильтоновом или Лагранжевом формализме, но не на исходном n -мерном пространстве, а на редуцированном размерностью $n - k$ ($k \geq m + 1$), что значительно проще.

Выделим некоторые особенности данного подхода.

1. Фактически η , а следовательно, и управление, мы находим на редуцированном пространстве переменных, а именно вместо пространства переменных x_1, \dots, x_n используем пространство переменных x_{m+1}, \dots, x_n , т.е. пространство определения функционала (2).

2. Параметры η в момент времени t в пространстве определения функционала (2) формируют оптимальное управление по принципу обратной связи.

3. Параметры η в момент времени t в пространстве определения функционала (2) формируют адаптивное оптимальное управление. Адаптация осуществляется по вычисляемым в каждый момент времени параметрам на мгновенных решениях и соответствующим производным.

Отметим, что редуцированная модель (35) не содержит ограничений на управление и не включает в себя дифференциальные уравнения, описывающие изменения x_1, \dots, x_m . Такую ситуацию можно трактовать и как ситуацию отсутствия информации по x_1, \dots, x_m , а также отсутствия информации по ограничениям на управление.

В работе «Игры с противоположными интересами» [14] Ю.Б. Гермейер назвал построение редуцированной модели (35) в случае игровых задач «информационным доопределением игры».

Таким образом можно считать принцип информационного дуализма расширением принципа информационного доопределения игры на класс задач терминального оптимального управления.

Так как редуцированная модель проще исходной, её целесообразно применять для вычисления оптимального управления исходной системы (11), что упрощает алгоритмы и приборную реализацию системы управления.

Иллюстрирующий пример

Дана динамическая система

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= A(x), \\ \frac{dx_1}{dt} &= \frac{B}{x_1}(u - \cos x_2), \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 \sin x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 \cos x_2,\end{aligned}$$

где t – независимая переменная (время), $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ – вектор фазовых координат, $A(x)$ – заданная функция, B – константа, u – управление; $u \in [-U, +U]$; U – предельно допустимое значение управления.

Требуется найти управление, минимизирующее функционал:

$$J = \sqrt{[x_3(T) - x_{3\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\text{zad}}]^2},$$

где $x_{3\text{zad}}, x_{4\text{zad}}$ – заданные значения соответствующих координат.

Введём вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации

$$H = p_1 A + p_2 \frac{B}{x_1}(u - \cos x_2) + p_3 x_1 \sin x_2 + p_4 x_1 \cos x_2.$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряжённых переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + p_2 \frac{B}{x_1^2}(u - \cos x_2) - p_3 \sin x_2 - p_4 \cos x_2, \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \frac{\partial A}{\partial x_2} - p_2 \frac{B}{x_1} \sin x_2 - p_3 x_1 \cos x_2 + p_4 x_1 \sin x_2, \\ \frac{dp_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0, \\ \frac{dp_4}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0.\end{aligned}$$

Уравнения трансверсальности при $t = T$ примут вид:

$$\begin{aligned}p_1 &= 0, \quad p_2 = 0, \\ p_3 &= \frac{\partial J}{\partial x_3} = \frac{x_3(T) - x_{3\text{zad}}}{\sqrt{[x_3(T) - x_{3\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\text{zad}}]^2}}, \\ p_4 &= \frac{\partial J}{\partial x_4} = \frac{x_4(T) - x_{4\text{zad}}}{\sqrt{[x_3(T) - x_{3\text{zad}}]^2 + [x_4(T) - x_{4\text{zad}}]^2}}.\end{aligned}$$

Из второго и третьего уравнений для сопряжённых переменных следует, что

$$p_3 = \text{const}, \quad p_4 = \text{const}.$$

Введём параметр η – такой, что $\text{tg } \eta = \frac{p_3}{p_4}$.

Для порядка сингулярности, равного единице, оптимальное управление находится из решения следующей системы уравнений:

$$p_2 = 0, \quad \frac{d p_2}{d t} = 0, \quad \frac{d^2 p_2}{d t^2} = 0.$$

Перепишем её с учётом полученных результатов:

$$p_2 = 0, \quad x_1 \sin(x_2 - \eta) = 0, \quad \frac{d}{d t} [x_1 \sin(x_2 - \eta)] = 0.$$

Из второго уравнения следует, что $x_2 = \eta$, а из третьего, что $\frac{d x_2}{d t} = \frac{d \eta}{d t}$.

Отметим, что $\eta = \text{const}$. Тогда выражение для нахождения особого оптимального управления примет вид

$$u_{\text{osob}} = \cos \eta.$$

А полный закон управления мы запишем как

$$u = \begin{cases} -U \text{sign} \sin(x_2 - \eta), & \text{если } x_2 \neq \eta, \\ \cos \eta, & \text{если } x_2 = \eta. \end{cases}$$

Для вычисления управления запишем редуцированную модель:

$$\begin{aligned} \frac{d x_3}{d t} &= x_1 \sin \eta, \\ \frac{d x_4}{d t} &= x_1 \cos \eta. \end{aligned}$$

Так как на правом конце траектории $x_2 = \eta = \text{const}$, то из редуцированной системы дифференциальных уравнений при «замороженной» переменной x_1 получим

$$x_3(T) = x_3(t) + x_1 \sin \eta (T - t); \quad x_4(T) = x_4(t) + x_1 \cos \eta (T - t).$$

Подставив их в функционал, получим:

$$J = \sqrt{[x_3(t) + x_1 \sin \eta (T - t) - x_{3 \text{zad}}]^2 + [x_4(t) + x_1 \cos \eta (T - t) - x_{4 \text{zad}}]^2}.$$

Минимизируем функционал по η : $\frac{\partial J}{\partial \eta} = 0$.

Из последнего выражения определим η :

$$\text{tg } \eta = \frac{x_{3 \text{zad}} - x_3(t)}{x_{4 \text{zad}} - x_4(t)}.$$

Тогда управление, вычисленное на редуцированной модели, примет вид

$$u = \begin{cases} -U \operatorname{sign} \sin(x_2 - \eta), & \text{если } x_2 \neq \eta, \\ \cos \eta, & \text{если } x_2 = \eta. \end{cases}$$

Расчеты показали идентичность результатов, полученных из решения краевой задачи методом последовательных приближений и с использованием метода огибающих на редуцированной модели, но при этом вычислительные затраты оказались на порядок меньше.

Приложение нового подхода к задачам терминального игрового управления

Игровые задачи представляют собой развитие задач оптимального терминального управления. Поэтому к ним вполне может быть применён рассмотренный выше подход. Первоначально рассмотрим нелинейную дифференциальную игру «преследование – уклонение» двух однотипных объектов.

Задана цена игры – евклидова мера расстояния между центрами масс игроков на конечный момент времени T (заранее не определён):

$$J = \min_{u_p \in U_p} \max_{u_e \in U_e} \sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}, \quad (37)$$

где x_k, z_k – координаты центра масс игроков в левосторонней системе отсчета, u_k – управление игрока, U_k – множество допустимых значений управления, индекс k принимает значения $k = p$ для преследователя и $k = e$ для уклоняющегося.

Цена игры определена на решениях следующей системы дифференциальных уравнений игроков, описывающих движения в горизонтальной плоскости [1–5]:

$$\begin{aligned} \frac{dV_k}{dt} &= A_k(t), \\ \frac{d\varphi_k}{dt} &= \frac{g}{V_k} u_k, \\ \frac{dx_k}{dt} &= V_k \cos \varphi_k, \\ \frac{dz_k}{dt} &= V_k \sin \varphi_k, \end{aligned} \quad (38)$$

где t – независимая переменная (время), V_k – скорость, φ_k – угол поворота траектории, g – ускорение свободного падения, A – некоторая заданная функция. Множество допустимых значений управления U_k ограничено отрезком $[-N_k, +N_k]$.

При $t = t_0$ (t_0 – начальное значение времени) считаются известными $V_k = V_{k0}$, $\varphi_k = \varphi_{k0}$, $x_k = x_{k0}$, $z_k = z_{k0}$.

Для каждого игрока введём вектор-функцию множителей Лагранжа $\lambda_k = (\lambda_{V_k}, \lambda_{\varphi_k}, \lambda_{x_k}, \lambda_{z_k})$ и составим гамильтониан игровой задачи [2–5].

$$H = \sum_{k=p,e} (\lambda_{V_k} A_k + \lambda_{\varphi_k} \frac{g}{V_k} u_k + \lambda_{x_k} V_k \cos \varphi_k + \lambda_{z_k} V_k \sin \varphi_k). \quad (39)$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряжённых переменных:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_{V_k}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial V_k} = \lambda_{\varphi_k} \frac{g}{V_k^2} u_k - \lambda_{xk} \cos \varphi_k - \lambda_{zk} \sin \varphi_k, \\ \frac{d\lambda_{\varphi_k}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_k} = \lambda_{xk} V_k \sin \varphi_k - \lambda_{zk} V_k \cos \varphi_k, \\ \frac{d\lambda_{xk}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_k} = 0, \\ \frac{d\lambda_{zk}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z_k} = 0.\end{aligned}\tag{40}$$

Уравнения трансверсальности при $t = T$ примут вид $\lambda_{V_k} = 0$, $\lambda_{\varphi_k} = 0$,

$$\begin{aligned}\lambda_{xk} &= (-1)^j \frac{x_p(T) - x_e(T)}{\sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}}, \\ \lambda_{zk} &= (-1)^j \frac{z_p(T) - z_e(T)}{\sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}}, \\ k = p, e; \quad j &= \begin{cases} 1, & \text{if } k = p, \\ 2, & \text{if } k = e. \end{cases}\end{aligned}$$

Введём параметр η – такой, что $\operatorname{tg} \eta = \frac{\lambda_{zp}}{\lambda_{xp}} = \frac{\lambda_{ze}}{\lambda_{xe}}$. Тогда (с учётом третьего и четвертого уравнений для сопряжённых переменных) для $k = p, e$ получим: $\lambda_{xk} = \cos \eta = \operatorname{const}$, $\lambda_{zk} = \sin \eta = \operatorname{const}$.

Согласно [1–5] определим оптимальное управление игроков как аргумент, минимизирующий гамильтониан (39) для преследователя или максимизирующий для преследуемого. Тогда

$$u_{k \text{ opt}} = \begin{cases} -N_k \operatorname{sign} \lambda_{\varphi_k}, & \text{если } \lambda_{\varphi_k} \neq 0, \\ u_{k \text{ soc}}, & \text{если } \lambda_{\varphi_k} = 0, \end{cases}\tag{41}$$

где $u_{k \text{ soc}}$ – особое оптимальное управление игрока.

Как показано в [6], для порядка сингулярности, равного единице, особое оптимальное управление находится из решения следующей системы уравнений:

$$\lambda_{\varphi_k} = 0, \quad \frac{d\lambda_{\varphi_k}}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\lambda_{\varphi_k}}{dt^2} = 0.$$

Перепишем её с учётом полученных результатов [7]:

$$\lambda_{\varphi_k} = 0, \quad V_k \sin(\varphi_k - \eta) = 0, \quad \frac{d}{dt}[V_k \sin(\varphi_k - \eta)] = 0\tag{42}$$

Отсюда из второго уравнения следует, что на участке особого управления $\varphi_k = \eta$, а из третьего, что $\frac{d\varphi_k}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$. Или: $\frac{g}{V_k} u_{k \text{ soc}} = \frac{d\eta}{dt}$.

Отметим, что $\eta = \text{const}$. Тогда соответственно выражение для нахождения особого оптимального управления примет вид [7]:

$$u_{k \text{ soc}} = 0. \quad (43)$$

В некоторых случаях полезно сохранить производную по параметру η например, для того, чтобы компенсировать неточность его вычислений или адаптировать к неточности модели. Тогда выражение для особого управления получим в форме [7]:

$$u_{k \text{ soc}} = \frac{V_k}{g} \cdot \frac{d\eta}{dt}.$$

Придадим выражению для оптимального управления (41) иную форму. Рассмотрим второе уравнение сопряженной системы:

$$\frac{d\lambda_{\varphi_k}}{dt} = V_k \sin(\varphi_k - \eta).$$

Проинтегрируем его [7, 8]: $\lambda_{\varphi_k} = \int V_k \sin(\varphi_k - \eta) dt + C$.

Постоянная интегрирования C (краевая задача) выбирается из условия реализации соотношения $\lambda_{\varphi_k} = 0$ при $\sin(\varphi_k - \eta) = 0$ [7, 8].

Тогда: $\text{sign} \lambda_{\varphi_k} = -\text{sign} \sin(\varphi_k - \eta)$.

Используя полученные соотношения, преобразуем выражение для оптимального управления. Получим [9]:

$$u_{k \text{ opt}} = \begin{cases} -N_k \text{sign} \sin(\varphi_k - \eta), & \text{если } \sin(\varphi_k - \eta) \neq 0, \\ u_{k \text{ soc}}, & \text{если } \sin(\varphi_k - \eta) = 0. \end{cases} \quad (44)$$

Напомним, что согласно условиям трансверсальности на правом конце траектории $\eta = \text{const}$.

Из уравнения Гамильтона – Якоби для данной задачи следует ряд редуцированных моделей, из которых минимальная строится в пространстве переменных, входящих в функционал, т.е. получим [11, 12]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= V_k \cos \varphi_k, \\ \frac{dz_k}{dt} &= V_k \sin \varphi_k, \quad k = p, e. \end{aligned} \quad (45)$$

В этой модели V_k и φ_k – условные константы. Интегрируя уравнения (45), найдём $x_k(T, \varphi_k)$ и $z_k(T, \varphi_k)$. Подставим эти значения в функционал (37) и найдём η как аргумент, оптимизирующий функционал (37):

$$\eta = \arg \min_{\varphi_p} \max_{\varphi_e} \sqrt{[x_p(T) - x_e(T)]^2 + [z_p(T) - z_e(T)]^2}.$$

Или:

$$\text{tg} \eta = \frac{z_e(T) - z_p(T)}{x_e(T) - x_p(T)}. \quad (46)$$

Отметим, что редуцированная модель (45) не содержит ограничений на управление и не включает в себя дифференциальные уравнения, описывающие изменения V_k и φ_k . Такую ситуацию можно трактовать и как ситуацию отсутствия информации по V_k , φ_k и N_k . В работе «Игры с противоположными интересами» [12] Ю.Б. Гермейер назвал построение редуцированной модели (45) «информационным доопределением игры». Отметим, что в рамках данного подхода редуцированная модель информационного доопределения является одной из возможных редуцированных моделей, которую огибает фазовая траектория игровой задачи.

Можно показать, что метод огибающих применим и для других классов дифференциальных игр: коалиционных, кооперативных, иерархических. Использование редуцированных моделей облегчает реализацию игр, а в ряде случаев позволяет получить интерпретацию, отличную от традиционной.

Можно считать, что информационный дуализм является расширением принципа информационного доопределения игры на более широкий класс оптимизационных задач.

Заключение

Рассмотрены нетрадиционные методы синтеза оптимального терминального управления. Предлагается новый подход, основанный на использовании метода огибающих, согласно которому оптимальная траектория представляется как огибающая сингулярных кривых (мгновенных решений), восставленных в каждой её точке.

Известно, что участвующий в формировании оптимального управления вектор множителей Лагранжа касателен фазовой траектории. Следовательно, он касателен и каждой сингулярной кривой. Поэтому при некоторых условиях возможен синтез оптимального терминального управления на сингулярных кривых.

Условия первого порядка сингулярности особого управления позволяют, с одной стороны, достаточно просто увязать управление с параметрами мгновенных решений, с другой – с управлением на границе допустимого множества. Если система содержит особое управление более высоких порядков сингулярности, то его можно получить дифференцированием условия первого порядка.

Интересная особенность подхода заключается в следующем. Выражения для сингулярных кривых (мгновенных решений) определяют редуцированную математическую модель. Если синтез структуры оптимального управления осуществляется на полной (исходной математической) модели, то для вычисления управления в тот или иной момент времени достаточно использовать редуцированную (упрощённую) модель. Налицо то, что названо принципом информационного дуализма, который можно трактовать как расширение принципа информационного доопределения Ю.Б. Гермейера на задачи оптимального терминального управления. Следовательно, при отсутствии информации о некоторых проекциях фазового вектора её недостаток компенсируется переходом на редуцированную модель.

Полученные результаты могут быть использованы при решении ряда прикладных задач, в частности при разработке систем автоматического управления подвижными объектами.

Библиографический список

1. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. – М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.
2. Салмин В.В., Лазарев Ю.Н., Старинова О.Л. Методы оптимального управления и численные методы в задачах синтеза технических систем [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Федер. агентство по образованию, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С.П. Королева. – Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2007. – 82 с.
3. Измйлов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
4. Батенко А.П. Системы терминального управления. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.
5. Красовский Н.Н. Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

6. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. – М.: Наука, 1969. – 408 с.
7. Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. – М.: Радио и связь, 1982. – 389 с.
8. Иванов В.П. Оптимизация вырожденного управления динамическими системами методом огибающих // Труды СПИИРАН. – Вып.3. – Том 2. – СПб.: Наука, 2006. – С. 358–365.
9. Иванов В.П. Оптимизация управления динамическими системами на границе допустимого множества управлений методом огибающих // Труды СПИИРАН. – Вып.4. – СПб.: Наука, 2007. – С.270–276.
10. Anodina-Andrievskaja E.M., Ivanov V.P. New Methods of Synthesis and Calculation of Optimal Terminal Control. – 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF), 2021. – URL: <http://dx.doi.org/10.1109/weconf51603.2021.9470551> (дата обращения: 15.01.2023).
11. Иванов В.П. Информационный дуализм задачи оптимального терминального управления динамическим объектом // Информатизация и связь. – № 2. – 2021. – С. 85–90.
12. Иванов В.П. Информационный дуализм в нелинейной дифференциальной игре «преследование – уклонение» // Информатизация и связь. – 2021. – № 5. – С. 111–116.
13. Габбасов Р., Кириллова Ф.М. Особое оптимальное управление. – М.: Наука, 1973. – 253 с.
14. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. – М.: Наука, 1976. – 327 с.

References

1. Aleksandrov A.G. Optimal'nyye i adaptivnyye sistemy [Optimal and adaptive systems]. Moscow, *Vysshaya shkola*, 1989, 263 p.
2. V.V. Salmin, Yu.N. Lazarev, O.L. Starinova. Metody optimalnogo upravleniya i chislennyye metody v zadachakh sinteza tekhnicheskikh sistem [Methods of optimal control and numerical methods in the problems of synthesis of technical systems], [textbook]. Samara, Publishing House of Samara State Aerospace University, 2007, 82 p.
3. Izmylov A.F., Solodov M.V. Chislennyye metody optimizatsii [Numerical optimization methods]. Moscow, FIZMATLIT, 2005, 304 p.
4. Batenko A.P. Sistemy terminalnogo upravleniya [Terminal management systems]. Moscow, *Radio i svyaz*, 1984, 160 p.
5. Krasovskiy N.N. Teoriya upravleniya dvizheniyem [Theory of motion control]. Moscow: Nauka, 1968, 476 p.
6. Boltyanskiy V.G. Matematicheskiye metody optimalnogo upravleniya [Mathematical methods of optimal control]. Moscow, *Nauka*, 1969, 408 p.
7. Seydzh E.P., Uayt Ch.S. Optimalnoye upravleniye sistemami [Optimal systems management]. Moscow, *Radio i svyaz*, 1982, 389 p.
8. Ivanov V.P. Optimizatsiya vyrozhdennogo upravleniya dinamicheskimi sistemami metodom ogibayushchikh [Optimization of degenerate control of dynamical systems by the envelope method]. SPIIRAS Proceedings, no. 3, vol. 2, SPb, Nauka, 2006, pp. 358-365.
9. Ivanov V.P. Optimizatsiya upravleniya dinamicheskimi sistemami na granitse dopustimogo mnozhestva upravleniy metodom ogibayushchikh [Optimization of the control of dynamic systems on the boundary of the admissible set of controls by the envelope method]. SPIIRAS Proceedings, no. 4, SPb, Nauka, 2007, pp. 270-276.
10. Anodina-Andrievskaja E.M., Ivanov V.P. New Methods of Synthesis and Calculation of Optimal Terminal Control. 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF), 2021. URL: <http://dx.doi.org/10.1109/weconf51603.2021.9470551> (Date of access: 15.01.2023).
11. Ivanov V.P. Informatsionnyy dualizm zadachi optimalnogo terminalnogo upravleniya dinamicheskim obyektom [Information dualism of the problem of optimal terminal control of a dynamic object]. *Informatizatsiya i svyaz*, no. 2, 2021, pp. 85-90.
12. Ivanov V.P. Informatsionnyy dualizm v nelineynoy differentsialnoy igre «presledovaniye-ukloneniye» [Information dualism in the non-linear differential game "pursuit-evasion"]. *Informatizatsiya i svyaz*, 2021, no. 5, pp. 111-116.
13. Gabbasov R., Kirillova F.M. Osoboye optimalnoye upravleniye [Special optimal control]. Moscow, *Nauka*, 1973, 253 p.
14. Germeyyer Yu.B. Igry s neprotivopolozhnymi interesami [Games with non-opposing interests]. Moscow, *Nauka*, 1976, 327 p.

Об авторе

Иванов Владимир Петрович (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент, Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр Российской академии наук (199178, Санкт-Петербург, 14-я линия, 39, e-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com).

About the author

Vladimir P. Ivanov (St. Petersburg, Russian Federation) – CSc in Technical Sciences, Senior Researcher, Associate Professor, St. Petersburg Federal Research Center of Russian Academy of Sciences (39, line 14, 199178, St. Petersburg, e-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com).

Финансирование. Исследование не имело спонсорской поддержки.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Вклад 100 %.

Поступила: 18.01.2023

Одобрена: 20.01.2023

Принята к публикации: 28.02.2023

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом: Иванов, В.П. Построение оптимальных траекторий летательного аппарата на множестве сингулярных кривых / В.П. Иванов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. – 2023. – № 72. – С. 42–58. DOI: 10.15593/2224-9982/2023.72.04

Please cite this article in English as: Ivanov V.P. Method of synthesis of optimal terminal control of nonlinear dynamical systems using a set of singular curves. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2023, no. 72, pp. 42–58. DOI: 10.15593/2224-9982/2023.72.04