

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Соловьев М.Е., Раухваргер А.Б., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х., Мищенко В.И. Численное моделирование теплофизических свойств порошковых покрытий металлов // Вестник ПНИПУ. Машиностроение. Материаловедение. – 2023. – Т. 25, № 1 – С. 5–15. DOI: 10.15593/2224-9877/2023.1.01

Please cite this article in English as:

Soloviev M.E., Rauhvarger A.B., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh., Mishchenko V.I. Numerical modeling of thermophysical properties of metal powder coatings. *Bulletin of PNRPU. Mechanical engineering, materials science*. 2023, vol. 25, no. 1, pp. 5-15. DOI: 10.15593/2224-9877/2023.1.01

---

**ВЕСТНИК ПНИПУ. Машиностроение, материаловедение**  
**Т. 25, № 1, 2023**  
**Bulletin PNRPU. Mechanical engineering, materials science**  
<http://vestnik.pstu.ru/mm/about/inf/>

---

Научная статья

DOI: 10.15593/2224-9877/2023.1.01

УДК 621.793.74:536.521.2

**М.Е. Соловьев<sup>1</sup>, А.Б. Раухваргер<sup>1</sup>, С.Л. Балдаев<sup>2</sup>, Л.Х. Балдаев<sup>2</sup>, В.И. Мищенко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Ярославский государственный технический университет, Ярославль, Россия,

<sup>2</sup>ООО «Технологические системы защитных покрытий», Щербинка, Россия

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ  
ПОРОШКОВЫХ ПОКРЫТИЙ МЕТАЛЛОВ**

Технология нанесения специальных покрытий на металлы путем напыления порошков активно применяется в машиностроении и других областях. В настоящей работе рассмотрены различные варианты решения уравнения теплопроводности применительно к задачам, теплопередачи для порошковых покрытий с граничными условиями Ньютона – Рихмана на внешней поверхности изделия: аналитическое решение одномерной задачи для однослойного покрытия, численное решение одномерной задачи для многослойного покрытия, численное решение двумерной задачи для композиционного материала покрытия с включениями различной формы и ориентацией относительно направления теплового потока. Полученное аналитическое выражение для решения одномерной задачи для однослойного покрытия использовано для разработки методики численной оценки коэффициента теплопроводности композиционного материала. Сравнение результатов численной оценки эффективных коэффициентов теплопроводности композиционных материалов с приближенными аналитическими формулами по линейной модели и по логарифмическому правилу смесей показало, что значения численных оценок располагаются между верхней и нижней аналитическими оценками. При отсутствии анизотропии формы частиц включений форма частиц и их расположение в расчетной ячейке композита (регулярное или случайное) не оказывает существенного влияния на величину эффективного коэффициента теплопроводности. Для включений, имеющих анизотропию формы, эффективный коэффициент теплопроводности зависит от их ориентации относительно направления теплового потока в расчетной ячейке. При ориентации частиц с меньшим коэффициентом теплопроводности по сравнению с коэффициентом теплопроводности матрицы вдоль направления теплового потока эффективный коэффициент теплопроводности выше, по сравнению со случаем ориентации частиц поперек направления теплового потока в расчетной ячейке. Результаты численной оценки эффективных коэффициентов теплопроводности композиционных материалов могут быть использованы при решении задач теплопередачи многослойных композиционных покрытий с помощью предложенного численного алгоритма.

**Ключевые слова:** порошковые покрытия, композиционный материал, уравнение теплопроводности, граничные условия Ньютона – Рихмана, эффективный коэффициент теплопроводности композиционного материала.

M.E. Soloviev<sup>1</sup>, A.B. Raukhvarger<sup>1</sup>, S.L. Baldaev<sup>2</sup>, L.Kh. Baldaev<sup>2</sup>, V.I. Mishchenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, Russia

<sup>2</sup>LLC "Technological systems of protective coatings", Moscow, Shcherbinka, Russia

## NUMERICAL MODELING OF THERMOPHYSICAL PROPERTIES OF METAL POWDER COATINGS

The technology of applying special coatings to metals by spraying powders is actively used in mechanical engineering and other fields. In this paper, we consider various options for solving the heat equation in relation to problems of heat transfer for powder coatings with Newton – Richmann boundary conditions on the outer surface of the product: analytical solution of a one-dimensional problem for a single-layer coating, numerical solution of a one-dimensional problem for a multilayer coating, numerical solution of a two-dimensional problem for a compositional coating material with inclusions of various shapes and orientation relative to the direction of the heat flow. The resulting analytical expression for solving an one-dimensional problem for a single-layer coating is used to develop a method for numerically estimating the thermal conductivity of a composite material. Comparison of the results of a numerical assessment of the effective thermal conductivity coefficients of composite materials with approximate analytical formulas according to the linear model and according to the logarithmic rule of mixtures showed that the values of the numerical estimates are located between the upper and lower analytical estimates. In the absence of particle shape anisotropy in inclusions, the shape of the particles and their arrangement in the computational cell of the composite (regular or random) do not significantly affect the value of the effective thermal conductivity. For inclusions with shape anisotropy, the effective thermal conductivity depends on their orientation relative to the direction of the heat flow in the computational cell. When particles are oriented with a lower thermal conductivity compared to the thermal conductivity of the matrix along the direction of the heat flow, the effective thermal conductivity is higher compared to the case when particles are oriented across the direction of the heat flow in the computational cell. The results of numerical estimation of the effective thermal conductivity coefficients of composite materials can be used in solving problems of heat transfer of multilayer composite coatings using the proposed numerical algorithm.

**Keywords:** powder coatings, composite material, heat equation, Newton – Richmann boundary conditions, effective thermal conductivity of composite material.

### Введение

Создание на поверхности металлических деталей специальных покрытий методом газотермического напыления порошков является современной технологией, обеспечивающей антикоррозионные свойства деталям в машиностроении, восстановление поверхностей изношенных изделий, а также придание им многих функциональных свойств: повышенной износостойкости, твердости, теплостойкости [1–4]. Нанесение покрытия заключается в нагреве, диспергировании и переносе частиц распыляемого материала высокоскоростным газовым потоком и формировании на подложке компактного слоя.

Одним из важных специальных свойств, придаваемых поверхности деталей за счет нанесения покрытий, является их стойкость к повышенным температурам. Например, слои с уменьшенным коэффициентом теплопроводности могут составлять внешнюю часть покрытий лопаток турбин авиационных газотурбинных двигателей [5–7]. Защитное покрытие лопаток турбин представляет собой сложную структуру, состоящую из нескольких слоев, каждый из которых является композиционным материалом. Для прогнозирования эксплуатационных свойств такой детали необходимо знать параметры теплофизических свойств покрытия.

Существует большое количество методов определения теплофизических свойств материалов, которые можно разделить на две группы – стационарные и нестационарные, в зависимости от нали-

чия или отсутствия в эксперименте стационарного теплового потока в измерительной ячейке [8–12]. К традиционным способам измерения температуры в ходе эксперимента относится использование датчиков, непосредственно встраиваемых в образец или крепящихся к его поверхности. Вместе с тем в настоящее время широко применяются методы измерения температуры поверхности образцов с использованием инфракрасных термометров [13–17]. Следует отметить, что стандартизованные методы измерения теплофизических свойств композитов [18; 19] не пригодны для измерения свойств тонких покрытий. В связи с этим актуальными являются исследования, посвященные расчетной оценке коэффициентов теплопроводности и температуропроводности композитов на основании их структуры и свойств составляющих ее материалов.

Авторами классических монографий, посвященных расчетной оценке теплофизических свойств смесей и композитов [20; 21], предложены простые формулы для вычисления эффективных теплофизических коэффициентов материалов, содержащих включения правильной геометрической формы. Замечено, что аналогичные соотношения выполняются и для многих других физических свойств композитов, в том числе электрических, механических и магнитных. Поэтому появился термин «обобщенная проводимость», объединяющий целый ряд структурно чувствительных свойств физико-механических смесей, т.е. свойств, величина которых для смеси в целом зависит не только от концентраций компонентов в смеси (таких, например, как плотность или удельный объ-

ем), но и от структуры смеси и ориентации границ раздела компонентов в силовом поле [22].

Необходимо отметить, что простые формулы обобщенной проводимости смесей получены на основе ряда приближений, справедливость которых требует отдельной оценки, а условия правильной геометрической формы и регулярного расположения включений, положенные в основу большинства теорий, на практике выполняются достаточно редко. В связи с этим в настоящей работе предпринята попытка численной оценки эффективных теплофизических характеристик композиционных материалов, моделирующих применяемые при газотермическом напылении порошковые покрытия. В работе исследованы как композиты, содержащих регулярные включения правильной геометрической формы, так и случайные дискретные включения.

### 1. Одномерное уравнение теплопроводности со смешанными граничными условиями

В настоящем разделе рассмотрим задачу об остывании слоя материала, температура на нижней поверхности которого поддерживается постоянной, что моделирует массивную металлическую деталь основы, а на верхней границе слоя заданы условия теплоотдачи в воздух по закону Ньютона – Рихмана. Рассматриваемая задача сводится к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (1)$$

на отрезке  $x \in (0, l]$  при граничных условиях

$$T(t, 0) = T_1, \quad (2)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = \beta(T(t, l) - T_2) \quad (3)$$

и начальном условии

$$T(0, x) = T_2. \quad (4)$$

В формулах (1)–(4):  $T(t, x)$  – температура в момент времени  $t$  для координаты  $x$ ;  $T_1$  – температура постоянного источника тепла на левой поверхности;  $T_2$  – постоянная температура среды, с которой граничит правая поверхность;  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\beta$  – коэффициенты теплопроводности, теплопроводности и теплоотдачи соответственно.

Рассмотрим сначала решение для установившегося режима  $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$ . В этом случае решение представляет собой линейную функцию

$T_\infty = kx + b$ , коэффициенты которой определяются из граничных условий (2) и (3), что дает

$$T_\infty = T_1 - \frac{\beta(T_1 - T_2)}{\beta l + \lambda} x. \quad (5)$$

Для произвольного момента времени  $t > 0$  представим в виде

$$T(t, x) = T_\infty + \tilde{T}(t, x). \quad (6)$$

Поскольку  $T_\infty$  удовлетворяет уравнению (1), ему должна удовлетворять и функция  $\tilde{T}(t, x)$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Граничные условия для  $\tilde{T}(t, x)$  определяются подстановкой (6) с учетом (5) в (2) и (3), что дает

$$\tilde{T}(t, 0) = 0, \quad (8)$$

$$-\lambda \left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} \right|_{x=l} = \beta \tilde{T}(t, l). \quad (9)$$

Найдем возможные частные решения (7), удовлетворяющие граничным условиям (8) и (9) и представимые в виде произведения функций, одна из которых зависит только от  $t$ , другая – только от  $x$  (метод разделения переменных)

$$\tilde{T}(t, x) = V(t)R(x). \quad (10)$$

Функция  $R(x)$  должна обеспечивать выполнение граничных условий (8) и (9), следовательно, удовлетворять условиям

$$R(0) = 0, \quad (11)$$

$$-\lambda R'(l) = \beta R(l), \quad (12)$$

Подстановка (10) в (7) дает

$$\frac{V'(t)}{V(t)} = \alpha \frac{R''(x)}{R(x)}. \quad (13)$$

Левая часть этого уравнения зависит только от  $t$ , а правая только от  $x$ . Их равенство при любых значениях  $t$  и  $x$  возможно, только если оба выражения равны одной и той же константе, которую мы для удобства выразим в виде  $\alpha\gamma$ , где  $\gamma$  – вспомогательная константа. Это приводит к отдельным уравнениям для  $V(t)$  и  $R(x)$

$$V' = -\alpha\gamma V, \quad (14)$$

$$R'' = -\gamma R. \quad (15)$$

Решение (14) с точностью до постоянного множителя имеет вид

$$V = e^{-\alpha t}. \quad (16)$$

Конечному при любом  $t > 0$  решению (а только такие имеют физический смысл) соответствуют только неотрицательные  $\gamma$ . Отобразим этот факт в явном виде, выражая  $\gamma$  как квадрат некоторой другой константы  $\gamma = q^2$ . Тогда (16) и (15) примут вид

$$V = e^{-\alpha q^2 t}, \quad (17)$$

$$R'' = -q^2 R. \quad (18)$$

Общее решение уравнения (18)

$$R = g_0 \cos(qx) + g \sin(qx), \quad (19)$$

где  $g_0$  и  $g$  – произвольные константы. Наложение на (19) граничного условия (11) дает  $g_0 = 0$ , что упрощает (19)

$$R = g \sin(qx). \quad (20)$$

Наложение на (20) граничного условия (12) приводит к уравнению для возможных значений  $q$  (собственные значения краевой задачи)

$$\sin(ql) = \frac{-\lambda}{\beta} q \cos(ql). \quad (21)$$

Вводя вспомогательную величину

$$\xi = ql \quad (22)$$

и приводя (20) к более компактной форме, получим трансцендентное уравнение для  $\xi$

$$\operatorname{tg}(\xi) = \frac{-\lambda}{\beta l} \xi. \quad (23)$$

Так как обе части уравнения представляют собой нечетные функции, то любому положительному корню соответствует отрицательный корень, равный ему по модулю. Но изменение знака  $\xi$  не породит новой функции (20), поскольку функции определены с точностью до произвольного множества, а данная операция сведется к изменению знака функции.

Тривиальный корень  $\xi = 0$  тоже не имеет смысла рассматривать, так как это приведет при подстановке в (20) к постоянной функции, равной 0. Таким образом, нас будут интересовать только положительные корни уравнения (23).

Имеется бесконечный дискретный набор корней, которые мы пронумеруем, начиная с нуля, в порядке возрастания корня. При увеличении номе-

ра значения корней приближаются к координатам вертикальных асимптот тангенса  $\xi \rightarrow \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi$ .

В соответствии с (17), (20) и (22) получим общий вид частного решения (7) с граничными условиями (8) и (9), соответствующего корню уравнения (23) с номером  $k$  с точностью до неопределенного множителя

$$\tilde{T}_k = e^{-\frac{\xi_k^2}{l^2} \alpha t} \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right). \quad (24)$$

Общее решение получим в виде произвольной линейной комбинации собственных функций (24)

$$\tilde{T} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-\frac{\xi_k^2}{l^2} \alpha t} \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right). \quad (25)$$

В соответствии с (6) и (5) решение исходной задачи представим в виде

$$T = T_1 - \frac{\beta(T_1 - T_2)}{\beta l + \lambda} x + \sum_{k=0}^{\infty} g_k e^{-\frac{\xi_k^2}{l^2} \alpha t} \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right). \quad (26)$$

Коэффициенты  $g_k$  должны быть определены из начального условия (4), что приводит к соотношению

$$-(T_1 - T_2) \left(1 - \frac{\beta(T_1 - T_2)}{\beta l + \lambda} x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right). \quad (27)$$

Это равенство означает, что коэффициенты  $g_k$  представляют собой коэффициенты разложения функции  $f(x) = -(T_1 - T_2) \left(1 - \frac{\beta(T_1 - T_2)}{\beta l + \lambda} x\right)$

в ряд по собственным функциям рассмотренной краевой задачи  $\sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right)$ . Для получения формулы такого разложения получим условие ортогональности и норму собственных функций  $\sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right)$ .

Рассмотрим интеграл вида

$$G_{kj} = \int_0^l \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right) \sin\left(\frac{\xi_j}{l} x\right) dx \quad \text{при } j \neq k. \quad \text{Элементарные аналитические выкладки приводят к выражению}$$

$$G_{kj} = \frac{l}{\xi_k^2 - \xi_j^2} \left( \sin(\xi_k) \cos(\xi_j) \xi_j - \sin(\xi_j) \cos(\xi_k) \xi_k \right) = \frac{l \cos(\xi_j) \cos(\xi_k)}{\xi_k^2 - \xi_j^2} \left( \operatorname{tg}(\xi_k) \xi_j - \operatorname{tg}(\xi_j) \xi_k \right).$$

Заменяя тангенсы в последнем выражении на правую часть (23), получим

$$G_{kj} = \frac{-\lambda}{\beta l} \frac{l \cos(\xi_j) \cos(\xi_k)}{\xi_k^2 - \xi_j^2} (\xi_k \xi_j - \xi_j \xi_k) = 0.$$

Это и есть условие ортогональности. Для определения нормы вычислим рассматриваемый интеграл при  $j = k$ :

$$G_{kk} = \int_0^l \sin^2\left(\frac{\xi_k}{l} x\right) dx = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\cos(\xi_k) \sin(\xi_k)}{\xi_k}\right) = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}(\xi_k)}{(1 + \operatorname{tg}^2(\xi_k)) \xi_k}\right).$$

Заменяя тангенс на правую часть (23), получим

$$G_{kk} = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{\beta \lambda}{\beta^2 l^2 + \lambda^2 \xi_k^2}\right).$$

Таким образом,

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right) \sin\left(\frac{\xi_j}{l} x\right) dx = \frac{l}{2} \left(1 + \frac{\beta \lambda}{\beta^2 l^2 + \lambda^2 \xi_k^2}\right) \delta_{kj}, \quad (28)$$

где  $\delta_{kj}$  – символ Кронекера  $\delta_{kj} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$ .

Условие ортогональности и нормировки (28) позволяет получить формулу для определения коэффициентов разложения произвольной функции в ряд по функциям  $\sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right)$ . Пусть некоторый ряд по этим функциям сворачивается к функции  $f(x)$

$$\sum_{j=0}^{\infty} g_j \sin\left(\frac{\xi_j}{l} x\right) = f(x). \quad (29)$$

Умножим обе части равенства (29) на  $\sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right)$  и проинтегрируем на отрезке  $[0, l]$ .

В соответствии с (28) в сумме левой части только член с  $j = k$  будет отличным от нуля, в результате получим

$$g_k = \frac{2}{l \left(1 + \frac{\beta \lambda}{\beta^2 l^2 + \lambda^2 \xi_k^2}\right)} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right) dx. \quad (30)$$

Для левой части (27) это дает

$$g_k = \frac{-2(T_1 - T_2)}{\beta \lambda} \frac{1}{\beta^2 l^2 + \lambda^2 \xi_k^2}. \quad (31)$$

Подстановка (31) в (26) дает окончательное решение поставленной задачи

$$T = T_1 - \frac{\beta(T_1 - T_2)}{\beta l + \lambda} x - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_1 - T_2)}{1 + \frac{\beta \lambda}{\beta^2 l^2 + \lambda^2 \xi_k^2}} \frac{1}{\xi_k} e^{-\frac{\xi_k^2}{l^2} \alpha t} \sin\left(\frac{\xi_k}{l} x\right). \quad (32)$$

В частности, для температуры на правой границе, получим

$$T = T_1 - \frac{\beta(T_1 - T_2)}{\beta l + \lambda} l - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(T_1 - T_2)}{1 + \frac{\beta \lambda}{\beta^2 l^2 + \lambda^2 \xi_k^2}} \frac{1}{\xi_k} e^{-\frac{\xi_k^2}{l^2} \alpha t} \sin(\xi_k). \quad (33)$$

На практике уравнение (33) может быть использовано в методиках определения теплофизических свойств материалов покрытий по зависимости температуры от времени на внешней поверхности покрытия при заданной постоянной температуре основы детали. В качестве иллюстрации на рис.1 приведены зависимости температуры на внешней поверхности покрытия от времени при нагревании на воздухе слоя материала с различными параметрами теплофизических свойств. Как видно, для всех трех типов материалов максимальные значения температуры на внешней поверхности покрытия различаются незначительно, тогда как сами температурные кривые различаются существенно. Поэтому для определения теплофизических свойств таких материалов целесообразно использовать нестационарные методы, а, учитывая малое время прогрева внешней поверхности покрытия, в качестве измерительного устройства могут быть использованы инфракрасные термометры с высокой частотой дискретизации по времени.

## 2. Одномерное уравнение теплопроводности для многослойного покрытия

Для многослойного покрытия с различающимися параметрами теплофизических свойств отдельных слоев задача (1) с граничными условиями (2), (3) может быть решена только численно. В данном случае целесообразно использовать разностные аппроксимации для производных температуры по времени и координатам. Существует достаточно большое количество различных вариантов численного решения уравнения теплопроводности, построенных на основе явных и неявных разностных схем [23–26].

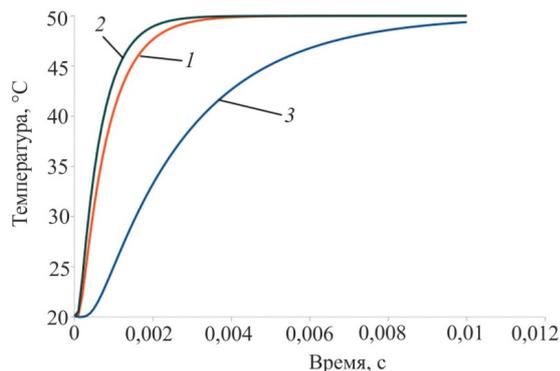


Рис. 1. Зависимости температуры на внешней стороне покрытия от времени по уравнению (33) при нагревании на воздухе однослойных покрытий толщиной 0,2 мм с различными параметрами теплофизических свойств, соответствующими покрытиям на основе металлического сплава Cr20Ni80 (1), нитрида бора (2) и оксида алюминия (3). Значение коэффициента теплоотдачи в воздух принято  $\beta = 0,01 \text{ Н}/(\text{с} \cdot \text{мм} \cdot \text{К})$

В настоящей работе предлагается достаточно простой вариант, позволяющий учесть неоднородность распределения теплофизических свойств по толщине материала и удобный для реализации в программных пакетах автоматизации вычислений.

Разобьем отрезок  $[0, l]$ , на котором рассматривается процесс теплопередачи, на участки достаточно малой длины  $h_x$  точками  $x_j = jh_x$ . Заменим вторую производную температуры по координате разностным соотношением

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{h_x^2} (T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}). \quad (34)$$

Для многослойной задачи в соседних точках, принадлежащих разным слоям, в выражениях для тепловых потоков должны фигурировать разные значения теплофизических коэффициентов.

Будем считать все параметры материала, в том числе теплопроводность и температуропроводность, функциями координаты, определенными, так, чтобы в пределах каждого слоя в точках дискретизации они имели заданные значения  $\lambda_j = \lambda(x_j)$ ,  $a_j = a(x_j)$ . Тогда из условия равенства тепловых потоков на границах смежных слоев уравнение теплопроводности в точках  $x_j$  может быть записано в виде

$$\frac{dT_j}{dT} = \frac{a_j}{\lambda_j h_x^2} (\lambda_{j+1} T_{j+1} - (\lambda_{j+1} + \lambda_j) T_j + \lambda_j T_{j-1}). \quad (35)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (35) должна решаться численно. В настоящей работе использовался метод Рунге – Кутты

четвертого порядка [27; 28]. При этом на каждом шаге по времени будет определяться для каждой внутренней точки последующее значение температуры  $T_j^{(1)}$  на основе предыдущих значений  $T_j^{(0)}$ ,  $T_{j+1}^{(0)}$ ,  $T_{j-1}^{(0)}$ . Это, однако, имеет место только для внутренних точек ( $0 < j < n$ ).

Значения температуры в граничных точках на каждом шаге должны определяться в соответствии с граничными условиями:

при граничных условиях (2)

$$T_0^{(1)} = T_1 \quad (36)$$

на левой границе,

при граничных условиях (3)

$$T_n^{(1)} = \frac{\beta h_x T_2 + \lambda_n T_{n-1}^{(1)}}{\beta h_x + \lambda_n} \quad (37)$$

на правой границе.

На рис. 2 в качестве примера приведены графики распределения температуры по толщине двухслойного покрытия в различные моменты времени, рассчитанные по описанному алгоритму. Нижний слой покрытия толщиной 0,09 мм, примыкающий к основе, состоял из сплава Cr20Ni80, наружный, толщиной 0,235 мм, – из  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . На левой границе значение температуры составляло 50 °С, начальные температуры слоев были приняты равными 100 °С и 1000 °С соответственно. Параметры теплоотдачи (2) на правой границе были приняты следующими:  $\beta = 0,01 \text{ Н}/(\text{с} \cdot \text{мм} \cdot \text{К})$ ,  $T_2 = 20 \text{ °С}$ .

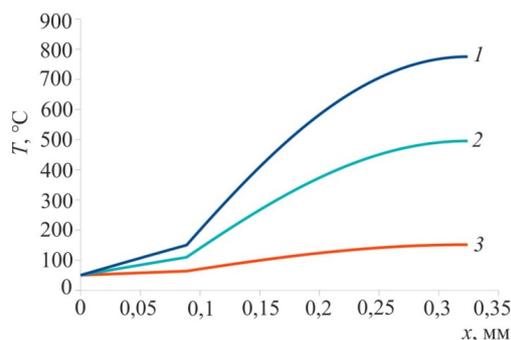


Рис. 2. Распределение температуры по сечению двухслойного покрытия в моменты времени: 1 – 0,01 с; 2 – 0,02 с; 3 – 0,05 с (пояснения в тексте)

В данном примере моделировалась ситуация охлаждения двухслойного покрытия при последовательном нанесении металлического и керамического слоев. Как видно, в металлическом подслое быстро устанавливается равновесное линейное распределение температуры, тогда как внешний керамический слой, выполняющий в данной системе функцию теплоизолирующего, остывает су-

щественно медленнее, и распределение температуры в нем большую часть времени имеет нелинейный характер.

### 3. Оценка теплофизических свойств композиционного материала на основе численного моделирования

Метод, используемый при численной оценке физических характеристик композиционных материалов [21; 22], основан на идее введения элементарной ячейки материала с выделенным элементом неоднородной структуры композита. В элементарной ячейке решается соответствующая граничная задача механики сплошной среды, термо- или электродинамики, в зависимости от конкретного физического свойства, значение которого требуется оценить. Полученные в результате численного решения поля целевой функции усредняются по объему элементарной ячейки, и средние значения сопоставляются со значениями, полученными при известном решении для соответствующего однородного материала. При численном решении задачи в ячейке периодичности в настоящее время используется, главным образом, метод конечных элементов [29].

В настоящей работе при численной оценке коэффициента теплопроводности композиционного материала методом конечных элементов решалось уравнение теплопроводности для элементарной ячейки материала с неоднородной структурой в варианте постановки задачи, аналогичной рассмотренной в разделе 1. В качестве элементарной ячейки материала рассматривалась двумерная область  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , содержащая включения различной геометрической формы. Пример элементарной ячейки с включением круговой формы показан на рис. 3. Были рассмотрены также варианты эллиптических включений и включений в форме нерегулярных многогранников. Было проведено сравнение вариантов расположения включений в центре области  $\Omega_1$ , а также их случайного расположения в данной области.

На границе  $\partial\Omega_1$  задавалась постоянная температура

$$T(x, t) = \mu(t) = T_1, \quad T_1 = 50 \text{ }^\circ\text{C}. \quad (38)$$

На границе  $\partial\Omega_2$  задавалось условие теплоотдачи Ньютона – Рихмана

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{y=1} = \beta(T(t, y=l) - T_2). \quad (39)$$

На боковых границах ячейки периодичности задавалось условие симметрии  $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ . Начальные

температуры в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  были приняты постоянными и равными  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ .

При дискретизации производной по времени конечной разностью первого порядка уравнение теплопроводности принимает вид

$$c_i \rho_i \frac{T^{m+1} - T^m}{\tau} = \lambda_i \Delta T^{m+1} \text{ в } \Omega, \quad (40)$$

где  $\tau$  – шаг дискретизации по времени.

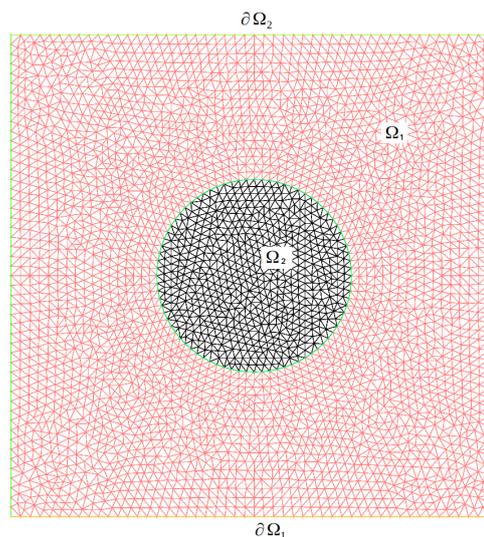


Рис. 3. Пример элементарной ячейки материала с включением круговой формы, разбитой на сетку конечных элементов

С учетом принятых граничных условий (38), (39) уравнение теплопроводности можно представить в вариационной постановке

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{T^{m+1} - T^m}{\tau} v + a_i \nabla T^{m+1} \cdot \nabla v \right\} + \int_{\partial\Omega_1} \mu^{m+1} v + \int_{\partial\Omega_2} \alpha (T^{m+1} - T_2) v = 0, \quad (41)$$

где  $v \in H^1(\Omega)$  – некоторая произвольная функция.

Решение задачи (41) осуществлялось методом конечных элементов. Программный код для этого был написан в специализированном программном пакете FreeFEM [30]. В качестве примера на рис. 4 показаны рассчитанные распределения температуры для элементарных ячеек размером  $2 \times 2 \text{ мм}$  с включениями различной формы.

Для вычисления эффективного значения коэффициента теплопроводности в элементарной ячейке композиционного материала полученное в результате численного решения распределение температуры по границе  $\partial\Omega_2$  в заданные моменты времени усреднялось по узлам сетки конечных

элементов на данной границе. Таким образом, результат численного решения двумерной задачи (41) можно было сопоставить с аналитическим решением одномерной задачи (33). Проверка точности численного алгоритма путем сравнения аналитического и численного решений для элементарной ячейки, не содержащей включения, показала, что разница между средним значением температуры по границе  $\partial\Omega_2$  в заданные моменты времени при численном решении и значениями температуры в эти же моменты времени при аналитическом решении не превышала 0,01 °С, что свидетельствует о хорошей точности использованного численного алгоритма. Это позволяет использовать среднее значение температуры на верхней границе ячейки периодичности для оценки эффективного коэффициента теплопроводности композиционного материала.

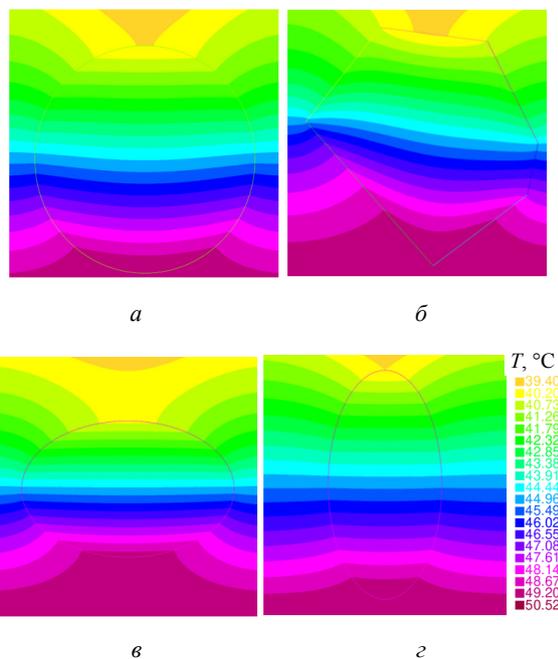


Рис. 4. Примеры рассчитанного распределения температуры в момент времени 0,5 с для элементарных ячеек с включениями различной формы с объемным содержанием  $\phi$ : *a* – круговое включение,  $\phi = 0,44$ ; *б* – включение в форме неправильного шестигранника  $\phi = 0,42$ ; *в* – эллиптическое включение с главной осью эллипса поперек направления теплового потока  $\phi = 0,29$ ; *г* – эллиптическое включение с главной осью эллипса вдоль направления теплового потока  $\phi = 0,28$ . Коэффициенты теплопроводности среды и частицы 100 и 1 Вт/(м·К) соответственно

В соответствии с решением (33) максимальное значение температуры в установившемся режиме выражается соотношением

$$T_{\max}(l) = T_1 - \frac{\beta l}{\beta l + \lambda} (T_1 - T_2). \quad (42)$$

Используя в качестве максимальной температуры максимальную среднюю температуру по верхней границе элементарной ячейки  $T_{\max}^{avg}(l)$ , полученную в результате численного решения задач (41), можно вычислить эффективный коэффициент теплопроводности композиционного материала

$$\lambda_{eff} = \beta l \frac{T_{\max}^{avg}(l) - T_2}{T_1 - T_{\max}^{avg}(l)}. \quad (43)$$

Известно достаточно много приближенных аналитических формул, которые дают оценки эффективного коэффициента теплопроводности смесей в рамках тех или иных допущений [22]. В частности, в качестве верхней оценки коэффициента теплопроводности композита может быть принята линейная функция объемных долей компонентов  $\phi_i$

$$\lambda_{eff}^1 = \sum_i \lambda_i \phi_i. \quad (44)$$

Для оценки снизу имеется несколько вариантов, предложенных разными авторами, среди которых наиболее реалистичной представляется оценка, названная «логарифмическим законом смешения»

$$\lambda_{eff}^2 = \sum_i \lambda_i^{\phi_i}. \quad (45)$$

Представляло интерес сопоставить оценки (44)–(45) с результатами численного расчета для различных объемных долей включений, а также разной их формы и расположения в расчетной ячейке (рис. 5). Как видно из представленных данных, для частиц эллиптической формы, имеющих анизотропию размеров, эффективный коэффициент теплопроводности существенно зависит от характера ориентации частиц вдоль или поперек направления теплового потока. При ориентации большей главной оси частицы вдоль направления теплового потока эффективный коэффициент теплопроводности приближается к верхней теоретической оценке (44), тогда как при ориентации большей главной оси эллипса поперек направления теплового потока значения эффективного коэффициента теплопроводности располагаются ближе к нижней теоретической оценке (45). Значения эффективного коэффициента теплопроводности для частиц, не имеющих анизотропии размеров, располагаются приблизительно между верхней и нижней теоретическими оценками. При этом форма частиц при отсутствии их анизотропии, а также случайное или регулярное (в центре ячейки) их расположение не играют существенной роли.

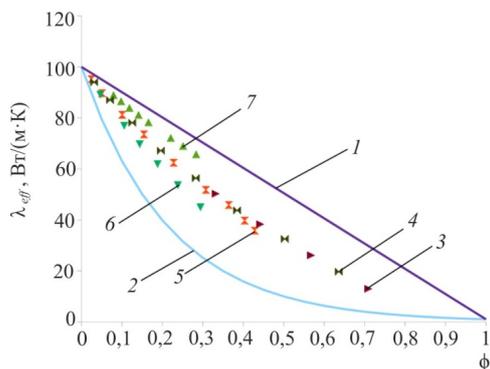


Рис. 5. Зависимости эффективного коэффициента теплопроводности композита от объемной доли включений: 1 – по уравнению (44); 2 – по уравнению (45); 3 – численный расчет для круговых включений, расположенных в центре ячейки; 4 – численный расчет для круговых включений, расположенных случайно в ячейке; 5 – численный расчет для включений в форме не регулярного многогранника; 6 – численный расчет для эллиптических включений с главной осью поперек направления теплового потока; 7 – численный расчет для эллиптических включений с главной осью вдоль направления теплового потока. Коэффициенты теплопроводности среды и частицы 100 и 1 Вт/(м·К) соответственно

### Заключение

В настоящей работе на основе аналитического решения одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями Ньютона – Рихмана предложена методика численной оценки эффективного коэффициента теплопроводности композиционного материала с включениями различной формы. По результатам расчетов численные оценки коэффициента теплопроводности композиционных материалов располагаются между оценкой по линейной модели смешения (сверху) и оценкой снизу по логарифмическому закону смешения.

Для включений, имеющих анизотропию размеров частиц, эффективный коэффициент теплопроводности при направлении оси анизотропии поперек направления теплового потока ближе к нижней теоретической оценке по правилу логарифмического закона смешения, а при ориентации вдоль направления теплового потока – ближе к верхней теоретической оценке по линейной модели смешения.

Для включений, не имеющих анизотропии формы, численные оценки эффективного коэффициента теплопроводности располагаются приблизительно между верхней и нижней теоретическими оценками. При этом форма частиц включения, а также регулярный или случайный характер расположения частицы в расчетной ячейке не играют существенной роли.

Расчетные значения эффективных коэффициентов теплопроводности могут быть использованы при решении граничных задач теплопередачи многослойных покрытий с использованием предложенного в работе алгоритма численного решения одномерного уравнения теплопроводности многослойного покрытия.

### Библиографический список

1. Кудинов В.В., Бобров Г.В. Нанесение покрытий напылением. Теория, технология и оборудование. – М.: Металлургия, 1992. – 432 с.
2. Газотермическое напыление / под общей ред. Л.Х. Балдаева. – М.: Маркет ДС, 2007. – 344 с.
3. Davis J.R. Handbook of thermal spray technology. – ASM International, 2004. – 338 p.
4. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Development of micro-plasma transferred arc ( $\mu$ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications // Journal of Materials Processing Technology. 2014. V.214. P.1102–1110. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2013.12.016
5. Гецов Л.Б. Детали газовых турбин. – Л.: Машиностроение, 1982. – 296 с.
6. Коломыцев П.Т. Высокотемпературные защитные покрытия для никелевых сплавов. – М.: Металлургия, 1991. – 239 с.
7. Теплозащитные покрытия лопаток турбин авиационных газотурбинных двигателей / В.П. Панков, А.Л. Бабаян, М.В. Куликов [и др.] // Ползуновский вестник. – 2021. – № 1. – С. 161–172. DOI: 10.25712/ASTU.2072-8921.2021.01.023
8. Теплофизические измерения и приборы / Е.С. Платунов, С.Е. Буравой, В.В. Куренин, Г.С. Петров. – Л.: Машиностроение, 1986. – 256 с.
9. Коротких А.Г. Теплопроводность материалов: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 97 с.
10. Дорохин М.В., Здоровейцев А.В., Кузнецов Ю.М. Измерение коэффициента теплопроводности методом стационарного теплового потока. – Н. Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. – 45 с.
11. Гусейнов Г.Г. Устройство для определения коэффициента теплопроводности методом пластины // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2010. – № 17. – С. 29–38.
12. Подледнева Н.А., Краснов В.А., Магомедов Р.С. Определение коэффициентов теплопроводности и температуропроводности за один опыт методом линейного источника теплоты постоянной мощности // Вестник АГТУ. – 2013. – № 2. – С. 50–55.
13. Measurement of thin film isotropic and anisotropic thermal conductivity using  $3\omega$  and thermoreflectance imaging / K. Maize, Y. Ezzahri, X. Wang, S. Singer, A. Majumdar, A. Shakouri // 2008 Twenty-fourth Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium. – 2008. – P. 185–190. DOI: 10.1109/STHERM.2008.4509388
14. Evaluation of the fused silica thermal conductivity by comparing infrared thermometry measurements with two-

dimensional simulations / P. Combis, P. Cormont, L. Gallais, D. Hebert, L. Robin, J.-L. Rullier // *Applied Physics Letters*. – 2012. – Vol. 101. – P. 211908–211912. DOI: 10.1063/1.4764904

15. Boué C., Holé S. Infrared thermography protocol for simple measurements of thermal diffusivity and conductivity // *Infrared Physics & Technology*. – 2012. – Vol. 55. – P. 376–379. DOI: 10.1016/j.infrared.2012.02.002

16. Thermal conductivity measurements of high and low thermal conductivity films using a scanning hot probe method in the  $3\omega$  mode and novel calibration strategies / A.A. Wilson, M.M. Rojo, B. Abad, J.A. Perez, J. Maiz, J. Schomacker, Marisol. S. Martín-González, D. Borca-Tasciuc, T. Borca-Tasciuc // *Nanoscale*. – 2015. – № 37. – P. 15404–15412. DOI: 10.1039/C5NR03274A

17. A universal method for thermal conductivity measurements on micro-/nano-films with and without substrates using micro-Raman spectroscopy / N.M. Wight, E. Acosta, R.K. Vijayaraghavan, P.J. McNally, V. Smirnov, N.S. Bennett // *Thermal Science and Engineering Progress*. – 2017. – Vol. 3. – P. 95–101. DOI: 10.1016/j.tsep.2017.06.009

18. ГОСТ Р 57830–2017. Композиты. Определение теплопроводности и температуропроводности методом дифференциальной сканирующей калориметрии с температурной модуляцией. – М.: Стандартинформ, 2019. – 12 с.

19. ГОСТ Р 57967–2017. Композиты. Определение теплопроводности твердых тел методом стационарного одномерного теплового потока с охраняемым нагревателем. – М.: Стандартинформ, 2017. – 19 с.

20. Миснар А. Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций / пер. с франц. М.Г. Беды, А.Н. Вишнякова, Ю.Б. Воронова. – М.: Мир, 1968. – 460 с.

21. Дульнев Г.Н., Заричняк Ю.П. Теплопроводность смесей и композиционных материалов. – Л.: Энергия, 1974. – 264 с.

22. Эдвабник В.Г. К теории обобщенной проводимости смесей [Электронный ресурс] // *Современные проблемы науки и образования*. – 2015. – № 1–2. – С. 50. – URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=19855>

23. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

24. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 388 с.

25. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

26. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло-, массообмена. – М.: Наука, 1984. – 288 с.

27. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.

28. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.

29. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Метод конечных элементов для решения локальных задач механики композиционных материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 66 с.

30. Hecht F. Free FEM Documentation. Release 4.6. – Paris: Sorbonne University, 2021. – 673 p.

## References

1. Kudinov V.V., Bobrov G.V. Nanesenie pokrytii napyleniem. Teoriia, tekhnologiia i oborudovanie [Spray coating. Theory, technology and equipment]. Moscow: Metallurgii, 1992, 432 p.

2. Gazotermicheskoe napylenie [Gas thermal spraying]. Ed. L.Kh. Baldaeva. Moscow: Market DS, 2007, 344 p.

3. Davis J.R. Handbook of thermal spray technology. ASM International, 2004, 338 p.

4. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Development of micro-plasma transferred arc ( $\mu$ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications. *Journal of Materials Processing Technology*, 2014, vol. 214, pp. 1102–1110. DOI: 10.1016/j.jmatprotec.2013.12.016

5. Getsov L.B. Detali gazovykh turbin [Gas turbine parts]. Leningrad: Mashinostroenie, 1982, 296 p.

6. Kolomytsev P.T. Vysokotemperaturnye zashchitnye pokrytiia dlia nikelovykh splavov [High-temperature protective coatings for nickel alloys]. Moscow: Metallurgii, 1991, 239 p.

7. Pankov V.P., Babaian A.L., Kulikov M.V. et al. Teplozashchitnye pokrytiia lopatok turbin avia-tsionnykh gazoturbinnnykh dvigatelei [Thermal protection coatings of turbine blades of aviation gas turbine engines]. *Polzunovskii vestnik*, 2021, no. 1, pp. 161–172. DOI: 10.25712/ASTU.2072-8921.2021.01.023

8. Platonov E.S., Buravoi S.E., Kurenin V.V., Petrov G.S. Teplofizicheskie izmereniia i pribory [Thermophysical measurements and instruments]. Leningrad: Mashinostroenie, 1986, 256 p.

9. Korotkikh A.G. Teploprovodnost' materialov: uchebnoe posobie [Thermal conductivity of materials:]. Izdatelstvo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2011, 97 p.

10. Dorokhin M.V., Zdoroveishchev A.V., Kuznetsov Iu.M. Izmerenie koeffitsienta teploprovodnosti metodom stacionarnogo teplovogo potoka [Measurement of heat transfer coefficient by steady-state heat flow method]. *Nizhnii Novgorod: Nizhegorodskii gosuniversitet*, 2019, 45 p.

11. Guseinov G.G. Ustroistvo dlia opredeleniia koeffitsienta teploprovodnosti metodom plastiny [Device for determining the thermal conductivity coefficient by the plate method]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Tekhnicheskie nauki*, 2010, no. 17, pp. 29–38.

12. Podledneva N.A., Krasnov V.A., Magomadov R.S. Opredelenie koeffitsientov teploprovodnosti i temperaturoprovodnosti za odin opyt metodom lineinogo istochnika teploty postoiannoi moshchnosti [Determination of coefficients of thermal conductivity and thermal diffusivity in one experiment by the method of linear heat source of constant power]. *Vestnik AGTU*, 2013, no. 2, pp. 50–55.

13. Maize K., Ezzahri Y., Wang X., Singer S., Majumdar A., Shakouri A. Measurement of thin film isotropic and anisotropic thermal conductivity using  $3\omega$  and thermoreflectance imaging. *2008 Twenty-fourth Annual IEEE Semiconductor Thermal Measurement and Management Symposium*, 2008, pp. 185–190. DOI: 10.1109/STHERM.2008.4509388

14. Combis P., Cormont P., Gallais L., Hebert D., Robin L., Rullier J.-L. Evaluation of the fused silica thermal conductivity by comparing infrared thermometry measurements with two-dimensional simulations. *Applied Physics Letters*, 2012, vol. 101, pp. 211908–211912. DOI: 10.1063/1.4764904

15. Boué C., Holé S. Infrared thermography protocol for simple measurements of thermal diffusivity and conduc-

tivity. *Infrared Physics & Technology*, 2012, vol. 55, pp. 376–379. DOI: 10.1016/j.infrared.2012.02.002

16. Wilson A.A., Rojo M.M., Abad B., Perez J.A., Maiz J., Schomacker J., Martín-González Marisol. S., Borca-Tasciuc D., Borca-Tasciuc T. Thermal conductivity measurements of high and low thermal conductivity films using a scanning hot probe method in the  $3\omega$  mode and novel calibration strategies. *Nanoscale*, 2015, no. 37, pp. 15404–15412. DOI: 10.1039/C5NR03274A

17. Wight N.M., Acosta E., Vijayaraghavan R.K., McNally P.J., Smirnov V., Bennett N.S. A universal method for thermal conductivity measurements on micro-/nano-films with and without sub-strates using micro-raman spectroscopy. *Thermal Science and Engineering Progress*, 2017, vol. 3, pp. 95–101. DOI: 10.1016/j.tsep.2017.06.009

18. GOST R 57830–2017. Kompozity. Opredelenie teploprovodnosti i temperaturoprovodnosti metodom differentsial'noi skaniruiushchei kalorimetrii s temperaturnoi moduliatsiei. Moscow: Standartinform, 2019, 12 p.

19. GOST R 57967–2017. Kompozity. Opredelenie teploprovodnosti tverdykh tel metodom statsionarnogo odnomernogo teplovogo potoka s okhrannym nagrevatelem. Moscow: Standartinform. 2017, 19 p.

20. Misnar A. Teploprovodnost' tverdykh tel, zhidkosti, gazov i ikh kompozitsii [Thermal conductivity of solids, liquids, gases and their compositions]. Ed. M.G. Bedy, A.N. Vishniakova, Iu.B. Voronova. Moscow: Mir, 1968, 460 p.

21. Dul'nev G.N., Zarichniak Iu.P. Teploprovodnost' smesei i kompozitsionnykh materialov [Thermal conductivity of mixtures and composites]. Leningrad: Energiia, 1974, 264 p.

22. Edvabnik V.G. K teorii obobshchennoi provodi-mosti smesei [To the theory of generalized conductivity of mixtures]. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniia*, 2015, no. 1–2, p. 50. URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=19855>

23. Samarskii A.A. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [Introduction to the theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1971, 552 p.

24. Samarskii A.A. Teoriia raznostnykh skhem [Theory of difference schemes]. Moscow: Nauka, 1977, 388 p.

25. Patankar S. Chislennyye metody resheniia zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti [Numerical methods for solving heat exchange and fluid dynamics problems]. Moscow: Ergoatomizdat, 1984, 152 p.

26. Paskonov V.M., Polezhaev V.I., Chudov L.A. Chislennoe modelirovanie protsessov teplo-, masso-obmena [Numerical modeling of heat and mass transfer processes]. Moscow: Nauka, 1984, 288 p.

27. Verzhbitskii V.M. Osnovy chislennykh metodov [Fundamentals of numerical methods]. Moscow: Vysshaya shkola, 2002, 840 p.

28. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1987, 598 p.

29. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. Metod ko-nechnykh elementov dlia resheniia lokal'nykh zadach mekhaniki kompozitsionnykh materialov [Finite element method for solving local problems of composite mechanics]. Moscow: Izdatelstvo MG TU imeni N.E. Bauman, 2010, 66 p.

30. Hecht F. Free FEM Documentation. Release 4.6. Paris: Sorbonne University, 2021, 673 p.

Поступила: 18.01.2023

Одобрена: 09.02.2023

Принята к публикации: 15.02.2023

## Сведения об авторах

**Соловьев Михаил Евгеньевич** (Ярославль, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Информационные системы и технологии» Ярославского государственного технического университета (Россия, 150023, Ярославль, Московский пр., 88, e-mail: soloviev56@gmail.com).

**Раухваргер Алексей Борисович** (Ярославль, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Информационные системы и технологии» Ярославского государственного технического университета (Россия, 150023, Ярославль, Московский пр., 88, e-mail: ABRRS@yandex.ru).

**Балдаев Сергей Львович** (Щербинка, Россия) – заместитель генерального директора по технологиям ООО «Технологические системы защитных покрытий» (Россия, 108851, г. Щербинка, ул. Южная 9А, e-mail: s.baldaev@tspc.ru).

**Балдаев Лев Христофорович** (Щербинка, Россия) – генеральный директор ООО «Технологические системы защитных покрытий» (Россия, 108851, г. Щербинка, ул. Южная 9А, e-mail: l.baldaev@tspc.ru).

**Мищенко Виктория Игоревна** (Щербинка, Россия) – заместитель генерального директора по качеству ООО «Технологические системы защитных покрытий» (Россия, 108851, г. Щербинка, ул. Южная 9А, e-mail: v.mishchenko@tspc.ru).

## About the authors

**Mikhail E. Soloviev** (Yaroslavl, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovsky Ave., Yaroslavl, 150023, Russian Federation, e-mail: soloviev56@gmail.com).

**Aleksey B. Rauhvarger** (Yaroslavl, Russian Federation) – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Information Systems and Technologies, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovsky Ave., Yaroslavl, 150023, Russian Federation, e-mail: ABRRS@yandex.ru).

**Sergey L. Baldaev** (Shcherbinka, Russian Federation) – Candidate of Technical Sciences, Deputy General Director for Technologies of Technological Systems of Protective Coatings LLC (9A Yuzhnaya st., Shcherbinka, 108851, Russian Federation, e-mail: s.baldaev@tspc.ru).

**Lev Kh. Baldaev** (Shcherbinka, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, General Director of Technological Systems of Protective Coatings LLC (9A Yuzhnaya st., Shcherbinka, 108851, Russian Federation, e-mail: l.baldaev@tspc.ru).

**Viktoriya I. Mishchenko** (Shcherbinka, Russian Federation) – Deputy General Director for Quality, Technological Systems of Protective Coatings LLC (9A Yuzhnaya st., Shcherbinka, 108851, Russian Federation, e-mail: v.mishchenko@tspc.ru).

**Финансирование.** Исследование не имело спонсорской поддержки.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов** равноценен.