



Научная статья

DOI: 10.15593/RZhBiomech/2023.1.03

УДК 531/534: [57+61]

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА СНИЖЕНИЯ ПЛОТНОСТИ МИНЕРАЛИЗАЦИИ ЭМАЛИ В ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ ФИССУРЫ

Е.В. Садырин

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 13 февраля 2023
Одобрена: 20 марта 2023
Принята к публикации: 27 марта 2023

Ключевые слова:

окклюзионная поверхность, фиссура, эмаль, математическое моделирование, клин.

АННОТАЦИЯ

Отличительной особенностью поверхности эмали моляров и премоляров является наличие определённого количества фиссур – клиновидных (V-образных) выемок, вершины которых являются естественными концентраторами напряжений в эмали коронки зуба. Для определения степени концентрации механических напряжений в окрестности вершины фиссуры рассматривается задача о напряжённо-деформированном состоянии эмали в виде упругого клина, имитирующего фиссуру. Сила прикуса, воздействуя на пищу, расклинивает фиссуру и вызывает напряжённо-деформированное состояние в окрестности её вершины. Полученные формулы позволили оценить напряжённо-деформированное состояние в окрестности вершины фиссуры в зависимости от угла раствора фиссуры, диаметра пищи и относительной деформации боковой поверхности фиссуры.

© ПНИПУ

Введение

Основная функция зубочелюстной системы заключается в пережёвывании пищи, выполнение которой возможно благодаря особой анатомической форме зубов жевательной группы, а именно моляров и премоляров. Элементы окклюзионной поверхности ежедневно испытывают значительные нагрузки при функциональных жевательных движениях. Хрупкость и высокая подверженность механическим повреждениям эмали представляют серьёзную опасность при расклинивании пищей фиссур – клиновидных (V-образных) выемок, формирующихся в глубине борозд зуба в результате срастания долей коронок. Глубокая фиссура часто образуется в результате неполного срастания долей бугорковой эмали в развивающихся зубах и может доходить почти до дентиноэмалевой границы. Фиссуры подразделяют на центральные (срединные), проходящие через всю окклюзионную поверхность, и дополнительные (радиальные),

пересекающие центральную поверхность в лингвальном или вестибулярном направлении [3; 5].

Исследования геометрии окклюзионной поверхности зубов получили развитие, начиная с работ [12; 14]. В более поздней работе [13] была проведена классификация видов износа окклюзионной поверхности, в то время как в [15] было выполнено клиническое *in vivo* исследование анатомии моляров и премоляров двухсот пациентов с установлением корреляции между глубиной центральных ямок и подверженности элементов окклюзионной поверхности к разрушению. В [9] была изучена подвижность элементов окклюзионной поверхности зубов, а в [29] использовался метод конечных элементов (МКЭ) для численного исследования распространения напряжений на контакте поверхности жевательных бугров. МКЭ использовался также в [19] для исследования горизонтальной составляющей силы надавливания, вызывающей изгиб жевательного бугра, и расклинивания,

© Садырин Евгений Валерьевич – младший научный сотрудник, e-mail: e.sadyrin@sci.donstu.ru
ID: 0000-0002-5395-3310



Эта статья доступна в соответствии с условиями лицензии Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)
This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License (CC BY-NC 4.0)

приводящего к значительному растяжению в области центральной ямки. В статье [17] рассмотрены механизмы взаимодействия пищи и окклюзионной поверхности зуба человека. Работа [26] посвящена анализу характера разрушения эмали в вершинах фиссур 126 интактных премоляров человека. Математическое моделирование процесса разрушения эмали в вершине фиссуры зуба проведено в работах [27; 28]. В исследовании [20] предложен подход к расчету предела прочности керамической коронки зуба с использованием МКЭ. Работы [31; 32] посвящены исследованию процесса распространения трещин в керамических зубных коронках и в окрестностях фиссур с использованием расширенного МКЭ. В [11] был экспериментально воссоздан процесс расклинивания фиссуры пищей путем нагружения её боковых граней индентором. В статье [6] проведено исследование поведения цельнокерамических элементов зубных протезов при квазистатических механических испытаниях с непрерывной регистрацией сигналов акустической эмиссии. В работе [4] проведено исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) элементов протезной конструкции при функциональных нагрузках с использованием МКЭ.

В стоматологической практике на поверхности эмали в вершинах фиссур может происходить накопление кариесогенных бактерий (в первую очередь групп *Streptococcus mutans* и *Lactobacillus*), что ведет к локальному снижению pH , деминерализации эмали, развитию кариеса и снижению механических свойств ткани [1; 2; 24; 25]. Появление трещины в вершине фиссуры приводит к синдрому треснувшего зуба, при этом трещина возникает либо в продольном направлении по фиссуре вглубь зуба, либо отсекает один из жевательных бугров [18, 21]. Если трещина пересекает дентиноэмалевую границу, происходит обнажение дентинных трубочек [7; 22; 23], содержащих окончания нервных волокон [10; 16], что приводит к болевым ощущениям пациента при надавливании на зуб [8].

Подводя итоги краткого обзора современного состояния исследований, можно сделать вывод, что наиболее уязвимым элементом окклюзионной поверхности эмали с точки зрения прочности эмали коронки являются фиссуры, изломы которых являются естественными концентраторами напряжений эмали. Концентрация напряжений эмали в окрестности вершины фиссур во время их расклинивания продуктами питания в процессе пережевывания пищи создаёт условие для понижения плотности минерализации эмали и повышает риски возникновения кариеса. Для оценки возможности возникновения вышеуказанных рисков следует осуществить математическое моделирование фиссуры для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) эмали в окрестности вершины фиссуры. С этой целью строится аналитическое решение задачи о НДС эмали с V-образной выемкой в виде развернутого клина. Новизна работы состоит в том, что сила прикуса моделируется путем задания распределенных по отрезкам на гранях фиссуры

сил, ортогональных граням, и сил, действующих вдоль граней, препятствующих проникновению пищи вглубь фиссуру.

Моделирование фиссуры и схема её расклинивания

Эмаль фиссуры моделируется развернутым клином $AA'MOLA'A$ с углом раствора $MOL=360^\circ-\varphi$, представленным на рис. 1, боковые стороны которого имитируют геометрию межбугоркового пространства фиссуры. Фиссура образована радиус-векторами, проведенными из вершины фиссуры – точки O – по касательным к поверхности бугров, её образующих, в точках E и F . Угол $EOF=2\varphi$ в вершине клина характеризует раствор фиссуры. Элемент пищи схематично представляется в виде круглого жёсткого диска с центром в точке O' , который под действием силы прикуса Q опирается на боковые грани фиссуры в окрестности точек E и F . Обозначив расстояния $EF=b$, $EO=FO=a$, угол φ определяется формулой $\arcsin(b/2a)$.

Для определения НДС эмали и степени концентрации напряжений в окрестности вершины фиссуры точки O рассматривается задача о раскрытии бесконечного упругого клина $AA'MOLA'A$ с углом раствора $2\alpha=360^\circ-2\varphi$ из эмали круглым жёстким диском, имитирующим пищу, с центром в точке O' под действием силы прикуса Q , коллинеарной биссектрисе OO' . Диск передает воздействие силы Q на грани OM и OL в виде распределённых по отрезку $[c,d]$ сил $f(r)$, ортогональных OM и OL , и распределённых сил $g(r)$, действующих вдоль граней OM и OL , препятствующих проникновению пищи глубже в фиссуру. Описанная нагрузка на клин $AA'MOLA'A$ симметрична относительно оси симметрии OO' – биссектрисы угла MOL . Действие распределённых сил $f(r)$ и $g(r)$ приводит к возникновению НДС в клине $AA'MOLA'A$ с

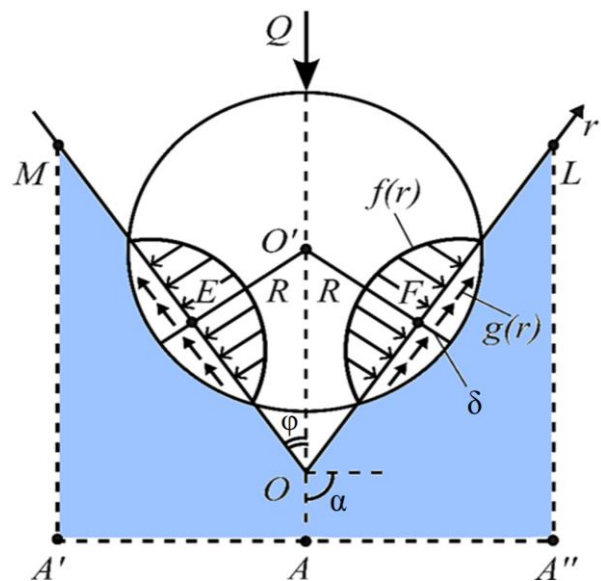


Рис. 1. Схема нагружения упругого клина $AA'MOLA'A$, имитирующего фиссуру

концентрацией в вершине клина O . Решение поставленной задачи состоит в определении НДС эмали в окрестности вершины фиссуры точки O и степени концентрации напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ при приближении к этой точке изнутри эмали, где $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ – нормальные, а $\sigma_{r\theta}$ – касательные напряжения в эмали зуба.

НДС бесконечного клина $AA'MOLA'A$ в условиях плоской деформации описывается дифференциальными уравнениями теории упругости в напряжениях [30].

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho F_r &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho F_\theta &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ – напряжения в полярной системе координат (r, θ) с центром в точке $O, F_{r\theta}$ – массовые силы.

Граничные условия на боковых гранях клина $\theta = \pm \alpha$ представляются равенствами

$$\begin{aligned} \theta = \pm \alpha \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \pm \alpha) &= \mp f(r)h(r), \quad 0 < r < \infty, \\ \sigma_{r\theta}(r, \pm \alpha) &= g(r)h(r), \quad 0 < r < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где $h(r) = H(r-c) - H(r-d)$, $0 < c < d$, где $H(r)$ – функция Хевисайда. За счет симметрии задачи граничные условия можно задать на одной грани клина

$$\begin{aligned} \theta = \alpha \quad \sigma_{\theta\theta}(r, \alpha) &= -f(r)h(r), \quad 0 < r < \infty; \\ \sigma_{r\theta}(r, \alpha) &= g(r)h(r), \quad 0 < r < \infty. \end{aligned} \quad (3)$$

Считается, что при неограниченном возрастании $r (r \rightarrow \infty, |\theta| < \alpha)$ напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ в клине $AA'MOLA'A$ исчезают. Для получения конечного результата решения задачи – распределения НДС в окрестности вершины фиссуры в виде напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ – необходима конкретизация функций $f(r)$ и $g(r)$ в граничных условиях (3), так как функции $f(r)$ и $g(r)$ должны описывать распределенные усилия, передаваемые жёстким диском с центром O' (рис. 2), на боковую поверхность фиссуры OL . Исходя из опыта решения контактных задач, функцию $f(r)$ – вертикальное распределения усилия (напряжения) – можно аппроксимировать параболой следующего вида

$$\begin{aligned} f(r) &= -\tau_0 (r-a)^2 + \sigma_0, \\ a-b \leq r \leq a+b, \end{aligned} \quad (4)$$

параметры τ_0, σ_0 которой определяются из дополнительных на $f(r)$ условий

$$f(a \pm b) = 0, \quad (5)$$

$$\int_{a-b}^{a+b} f(r) dr = P. \quad (6)$$

Суммарное усилие P , создаваемое функцией $f(r)$, получается после выполнения условий статики

$$P \cos(90^\circ - \varphi) = 2^{-1} Q, \quad (7)$$

в котором Q является силой прикуса (см. рис. 1). На Рисунке 2 введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= R(1-e) \operatorname{ctg} \varphi, \\ b &= R \sqrt{e(2-e)}, \\ e &= \delta R^{-1}, \end{aligned}$$

где δ – наибольшее заглабление диска в боковую поверхность фиссуры (FC),

e – относительное заглабление диска,

b – полуширина параболы $f(r)$, $cF = Fd$,

a – расстояние от середины (c, d) до точки O, OF .

Реализация дополнительных условий на $f(r)$ вида (5), (6) приводит к формулам для τ_0 и σ_0

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{b^2}, \sigma_0 = \frac{3P}{4b}. \quad (8)$$

В результате этого $f(r)$ принимает вид

$$f(r) = \frac{3P}{4b} \left(1 - \frac{(r-a)^2}{b^2} \right) \quad c \leq r \leq d, \quad (9)$$

где $c = a-b, d = a+b$

Из естественного условия $a-b \geq 0$ следует ограничение на угол φ раствора фиссуры

$$0 < \varphi < \operatorname{arctg} \left(\frac{1-e}{\sqrt{e(2-e)}} \right) < \frac{\pi}{2}. \quad (10)$$

Функция $g(r)$, характеризующая трение между диском O' и боковой стороной фиссуры, определяется законом Амонтона – Кулона

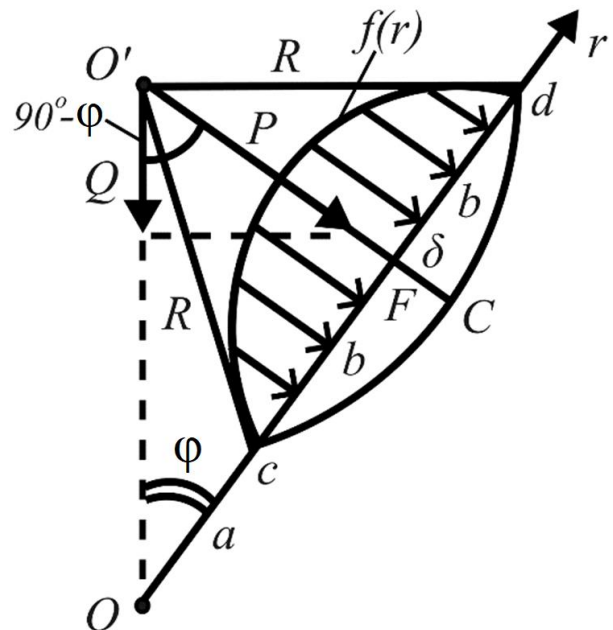


Рис. 2. Схема нагружения боковой поверхности параболой $f(r)$

$$g(r) = kf(r), \quad (11)$$

где k – коэффициент трения между пищей в виде диска и боковой поверхностью фиссуры.

Решение задачи для клина

Основными неизвестными поставленной задачи об определении НДС клина AA'MOLA'A из эмали при его раскрытии распределенными усилиями $f(r)$ и $g(r)$, $r \in [c, d]$, являются смещения u_r, u_θ и напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$. Для их определения, кроме использования уравнений равновесия клина (1), воспользуемся соотношениями закона Гука [30], связывающих напряжения с деформациями

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{2G}{1-2\nu} \left((1-\nu) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{2G}{1-2\nu} \left(\nu \frac{\partial u_r}{\partial r} + (1-\nu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right), \\ \sigma_{r\theta} &= G \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив соотношения (12) в уравнения равновесия (1), в отсутствие массовых сил $F_r = F_\theta = 0$, получим уравнения равновесия упругого клина ($|\theta| < \alpha, 0 < r < \infty$) в смещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + (1-2\nu) \left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{r \partial \theta} + (1-2\nu) \left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varepsilon = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta}$ – объёмная деформация,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа.

Для решения поставленной задачи (1), (3) об определении НДС клина AA'MOLA'A применяется интегральное преобразование Меллина. Для реализации метода каждое из уравнений (1) умножается на r^{p+1} и интегрируется по r от 0 до ∞ , при этом вводятся обозначения для трансформант смещений

$$u_\gamma^\mu(p, \theta) = \int_0^\infty u_\gamma(r, \theta) r^{p-1} dr \quad |\theta| < \alpha, \quad (14)$$

где γ обозначает либо r , либо θ .

В результате получим обыкновенные дифференциальные уравнения равновесия упругой среды относительно трансформант смещений u_r^μ, u_θ^μ (6) вида

$$\begin{aligned} (\kappa-1) \frac{d^2 u_r^\mu}{d\theta^2} - 2(p+\kappa) \frac{du_\theta^\mu}{d\theta} + (\kappa+1)(p^2-1) \frac{du_r^\mu}{d\theta} &= 0, \\ (\kappa+1) \frac{d^2 u_\theta^\mu}{d\theta^2} - 2(p-\kappa) \frac{du_r^\mu}{d\theta} + (\kappa-1)(p^2-1) \frac{du_\theta^\mu}{d\theta} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$, а штрихи над u_γ^μ означают производные по θ .

Для установления связи между трансформантами смещений $u_{r,\theta}^\mu(p, \theta)$ и трансформантами напряжений $\sigma_{rr,\theta\theta,r\theta}^\mu(p, \theta)$ воспользуемся соотношениями закона Гука (12). С этой целью каждое из соотношений (12) умножается на r^p с последующим интегрированием по r от 0 до ∞ . Введя обозначения для трансформант напряжений

$$\sigma_{\delta\gamma}^\mu(p, \theta) = \int_0^\infty \sigma_{\delta\gamma}(r, \theta) r^p dr \quad |\theta| < \alpha, \quad (16)$$

где $\delta\gamma$ обозначает поочередно $rr, \theta\theta, r\theta$, получим равенства

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^\mu &= \frac{2G}{1-2\nu} \left((\nu(p+1)-p) u_r^\mu + \nu \frac{du_\theta^\mu}{d\theta} \right), \\ \sigma_{\theta\theta}^\mu &= \frac{2G}{1-2\nu} \left((1-(p+1)\nu) u_r^\mu + (1-\nu) \frac{du_\theta^\mu}{d\theta} \right), \\ \sigma_{r\theta}^\mu &= G \left(\frac{du_r^\mu}{d\theta} - (1+p) u_\theta^\mu \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15) в случае симметрии задачи по θ записывается в виде

$$\begin{aligned} u_r^\mu(p, \theta) &= A_1(p+k) \cos(p+1)\theta + \\ &+ A_2(p-1) \cos(p-1)\theta, \\ u_\theta^\mu(p, \theta) &= A_1(p-k) \sin(p+1)\theta + \\ &+ A_2(p-1) \sin(p-1)\theta, \end{aligned} \quad (18)$$

где $A_k = A_k(p)$, $k=1,2$ являются постоянными, которые определяются из граничных условий.

В предположении, что интегралы Меллина от функций $f(r)$ и $g(r)$ существуют в обычном смысле, граничные условия (3) после применения преобразования Меллина переходят в граничные условия для соответствующих трансформант

$$\begin{aligned} \theta = \alpha \quad \sigma_{\theta\theta}^\mu(p, \alpha) &= -f^\mu(p), \quad f^\mu(p) = \int_c^d f(r) r^p dr, \\ \sigma_{r\theta}^\mu(p, \alpha) &= g^\mu(p), \quad g^\mu(p) = \int_c^d g(r) r^p dr. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив соотношения (18) в равенства (17), получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{\mu}(p, \theta) &= -2Gp \times \\ &\times [(p+3)A_1 \cos(p+1)\theta + (p-1)A_2 \cos(p-1)\theta] \\ \sigma_{\theta\theta}^{\mu}(p, \theta) &= 2Gp(p-1) \times \\ &\times [A_1 \cos(p+1)\theta + A_2 \cos(p-1)\theta] \\ \sigma_{r\theta}^{\mu}(p, \theta) &= -2Gp \times \\ &\times [(p+1)A_1 \sin(p+1)\theta + (p-1)A_2 \sin(p-1)\theta]. \end{aligned} \quad (20)$$

Постоянные $A_k = A_k(p), k=1,2$ определяются из граничных условий для трансформант (19) после подстановки в (19) соотношений (20). В результате этого получается система линейных алгебраических уравнений относительно $A_k, k=1,2$:

$$\begin{aligned} 2Gp(p-1)[A_1 \cos(p+1)\theta + A_2 \cos(p-1)\theta] &= \\ &= -f^{\mu}(p), \\ -2Gp[(p+1)A_1 \sin(p+1)\theta + (p-1)A_2 \sin(p-1)\theta] &= \\ &= g^{\mu}(p), \end{aligned} \quad (21)$$

решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} A_1 &= (-f^{\mu}(p) \sin(p-1)\alpha - \\ &- g^{\mu}(p) \cos(p-1)\alpha) (2GR(p))^{-1}. \\ A_2 &= (g^{\mu}(p)(p-1) \cos(p+1)\alpha + \\ &+ f^{\mu}(p)(p+1) \sin(p+1)\alpha) \cdot \\ &\cdot (2G(p-1)R(p))^{-1}. \\ R(p) &= \sin(2\alpha p) + p \sin(2\alpha). \end{aligned} \quad (22)$$

Подстановкой A_1 и A_2 из (14) в (18) и (20) определяются трансформанты смещений u_r^{μ} , u_{θ}^{μ} и напряжений σ_{rr}^{μ} , $\sigma_{\theta\theta}^{\mu}$, $\sigma_{r\theta}^{\mu}$. После обращения трансформант смещений u_r^{μ} и u_{θ}^{μ} с помощью формул обратного преобразования Меллина получим

$$\begin{aligned} u_{\gamma}(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} u_{\gamma}^{\mu}(p, \theta) r^{-p} dp, \\ |\theta| < \alpha, \quad 0 < r < \infty, \end{aligned} \quad (23)$$

где γ обозначает r и θ . Формулы для смещений упругой среды $u_r(r, \theta)$ и $u_{\theta}(r, \theta)$ записываются в виде контурных квадратур обратного преобразования Меллина (23), где контур Γ совпадает с мнимой осью комплексной плоскости переменной интегрирования p

$$\begin{aligned} u_{\gamma}(r, \theta) &= -\frac{1}{4G\pi i} \int_{\Gamma} \frac{H_{\gamma}^{+}(p, \theta)}{R_u(p)} \left(\frac{1}{r}\right)^p f^{\mu}(p) dp + \\ &+ \frac{1}{4G\pi i} \int_{\Gamma} \frac{H_{\gamma}^{-}(p, \theta)}{R_u(p)} \left(\frac{1}{r}\right)^p g^{\mu}(p) dp. \end{aligned} \quad (24)$$

Нижний символ γ обозначает θ или r . Подынтегральные функции в (24) даются формулами

$$\begin{aligned} H_r^{+} &= -(p+\kappa) \cos(p+1)\theta \sin(p-1)\alpha + \\ &+ (p+1) \cos(p-1)\theta \sin(p+1)\alpha; \\ H_r^{-} &= (p-1) \cos(p-1)\theta \cos(p+1)\alpha - \\ &- (p+\kappa) \cos(p+1)\theta \cos(p-1)\alpha; \\ H_{\theta}^{+} &= -(p-\kappa) \sin(p-1)\theta \sin(p-1)\alpha + \\ &+ (p+1) \sin(p-1)\theta \sin(p+1)\alpha; \\ H_{\theta}^{-} &= (p-1) \sin(p-1)\theta \cos(p+1)\alpha - \\ &- (p-\kappa) \sin(p-1)\theta \cos(p-1)\alpha; \end{aligned} \quad (25)$$

$$R_u(p) = p(\sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha), \quad (26)$$

в которых κ дана после формулы (15).

Формулы для напряжений $\sigma_{rr, \theta\theta, r\theta}(r, \theta)$ получаются с помощью обратного преобразования Меллина в форме

$$\begin{aligned} \sigma_{\delta\gamma}(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sigma_{\delta\gamma}^{\mu}(p, \theta) r^{-p-1} dp, \\ |\theta| < \alpha, \quad 0 < r < \infty, \end{aligned} \quad (27)$$

где $\delta\gamma$ обозначает поочередно $rr, \theta\theta, r\theta$. После подстановки $\sigma_{\delta\gamma}^{\mu}$ формулы (27) записываются в виде контурных квадратур обратного преобразования Меллина с контуром Γ , описанным после (23)

$$\begin{aligned} \sigma_{\delta\gamma}(r, \theta) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{L_{\delta\gamma}^{+}(p, \theta)}{R_{\sigma}(p)} \left(\frac{1}{r}\right)^p f^{\mu}(p) dp + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{L_{\delta\gamma}^{-}(p, \theta)}{R_{\sigma}(p)} \left(\frac{1}{r}\right)^p g^{\mu}(p) dp, \end{aligned} \quad (28)$$

в которых подынтегральные функции даются формулами

$$\begin{aligned} L_{rr}^{+} &= -4 \sin(1-p)\alpha \cos(1+p)\theta + l(1-p, 1+p) - \\ &- l(1+p, 1-p), \quad l(u, v) = u \sin u\alpha \cos v\theta, \\ L_{rr}^{-} &= 2 \cos(1-p)\alpha \cos(1+p)\theta + n(1+p, 1-p) + \\ &+ n(1-p, 1+p), \quad n(u, v) = u \cos v\alpha \cos u\theta, \\ L_{\theta\theta}^{+} &= l(1+p, 1-p) - l(1-p, 1+p), \\ L_{\theta\theta}^{-} &= -(p-1)(m(1-p, 1+p) - m(1+p, 1-p)), \\ m(u, v) &= \cos u\alpha \cos v\theta, \\ L_{r\theta}^{+} &= -(p+1)(h(1-p, 1+p) + h(1+p, 1-p)), \\ h(u, v) &= \sin u\alpha \sin v\theta, \\ L_{r\theta}^{-} &= g(1+p, 1-p) - g(1-p, 1+p), \quad g(u, v) = \\ &= u \cos v\alpha \sin u\theta, \\ R_{\sigma}(p) &= R(p), \end{aligned} \quad (29)$$

где $R(p)$ дана в (22).

Исследования подынтегральных функций в (24), (28) показали, что они являются функциями p и на бесконечности при:

$$|p| \rightarrow \infty, \quad \frac{\pi}{2} \leq |\arg(p)| \leq \pi.$$

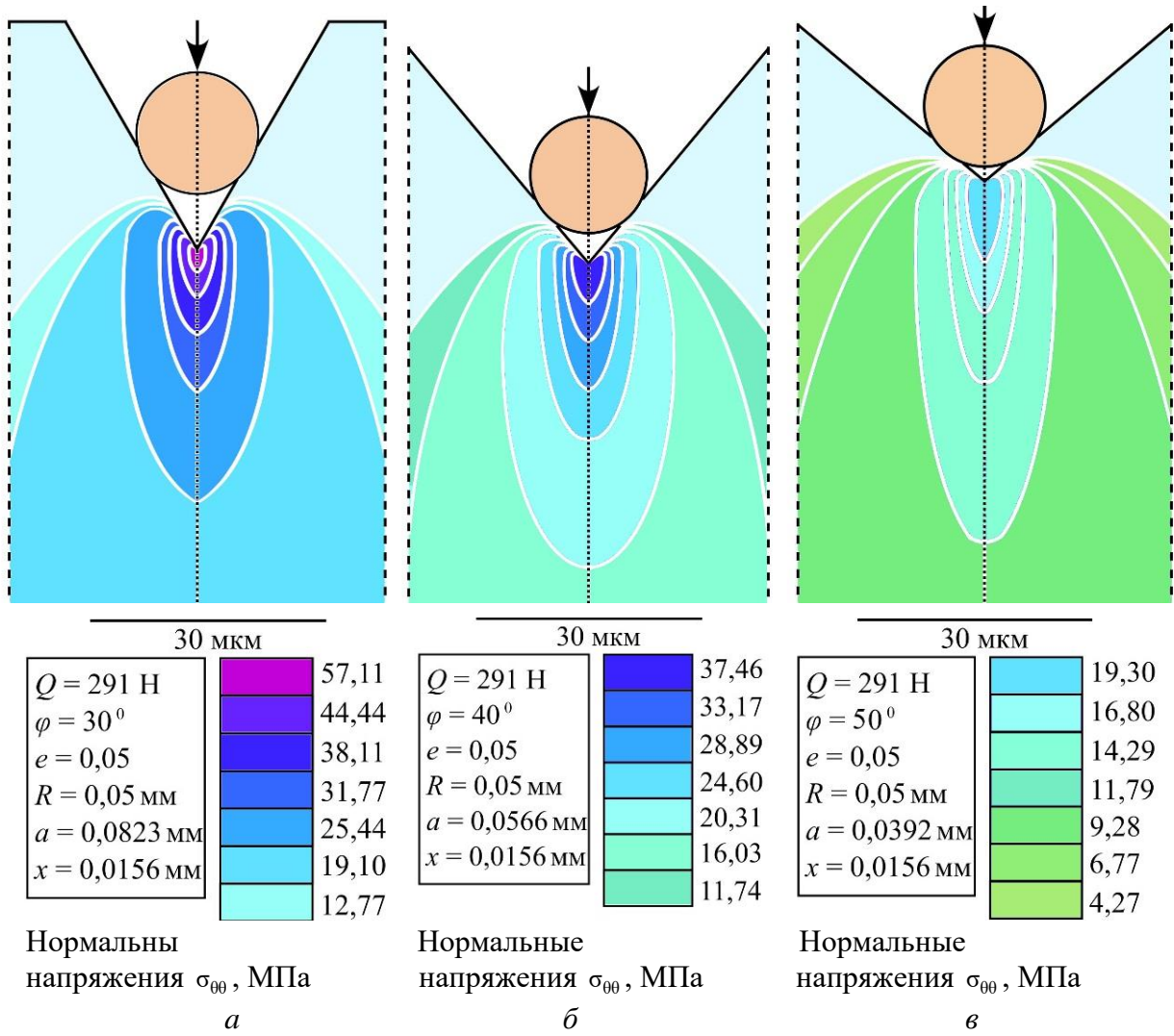


Рис. 3. Области равновеликих напряжений σ_{00} в окрестности вершин фиссур с углами раствора $2\varphi = 60^\circ$ (а), 80° (б), 100° (в)

Значения полюса p_0 и показателя степени $\gamma_0 = p_0 + 1$ в формулах (33)

φ	89,5°	84°	78,5°	78°	67,5°	62°	56,5°	51°	45,5°
p_0	-0,989011	-0,882438	-0,797285	-0,728745	-0,673583	-0,629430	-0,594437	-0,567093	-0,546115
γ_0	0,010989	0,117562	0,202715	0,271255	0,326417	0,370570	0,405563	0,432907	0,453885
φ	40,0°	34,5°	29°	23,5°	18,0°	12,5°	7,0°	45,5°	0°
p_0	-0,530396	-0,518970	-0,510993	-0,505727	-0,502590	-0,500837	-0,500146	-0,500001	-0,500000
γ_0	0,469604	0,481030	0,489007	0,494273	0,497471	0,499163	0,499854	0,499999	0,5

$$H_\gamma^\pm(p, \theta) R_u^{-1}(p) = O(p^{-1}), \quad \gamma \leq r, \theta, \quad (31)$$

$$L_{\gamma\delta}^\pm(p, \theta) R_\sigma^{-1}(p) = O(1), \quad \gamma\delta \leq rr, \theta\theta, r\theta,$$

при этом интегралы в (24), (28) существуют в обычном смысле.

Для численной реализации полученных формул для u_r, u_θ и $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$ необходимо в повторных интегралах (24) и (28) поменять порядок интегрирования, учитывая, что внешний материал берётся по контуру в

комплексной плоскости. После преобразований формула для смещений (24) приобретает вид

$$u_\gamma(r, \theta) = -\frac{1}{G} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_\gamma^+(p_k, \theta)}{R_u'(p_k)} \int_{a-b}^{a+b} f(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{p_k} d\xi + \frac{1}{G} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_\gamma^-(p_k, \theta)}{R_u'(p_k)} \int_{a-b}^{a+b} g(\xi) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{p_k} d\xi, \quad (32)$$

$$0 \leq \theta \leq \alpha, 0 < r < a + b,$$

в которых двукратный полюс $p=0$ отбрасывается из физических ограничений, p_k ($k=1,2,\dots$) – полюсы подынтегральных функций или нули функции $R_u(p)$ за исключением устранимых особых точек, a, b определены в (9), $f(\xi), g(\xi)$ даны в (9), (11) соответственно. Формула для $\sigma_{\delta\gamma}(r, \theta)$ принимает следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\delta\gamma}(r, \theta) = & - \int_{a-b}^{a+b} \frac{f(\xi) L_{\delta\gamma}^+(p_0, \theta) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{p_0+1}}{\xi R_{\sigma'}(p_0)} d\xi + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{L_{\delta\gamma}^+(p_k, \theta) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{p_k+1}}{R_{\sigma'}(p_k)} \right] d\xi + \\ & + \int_{a-b}^{a+b} \frac{g(\xi) L_{\delta\gamma}^-(p_0, \theta) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{p_0+1}}{\xi R_{\sigma'}(p_0)} d\xi + \\ & + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{L_{\delta\gamma}^-(p_k, \theta) \left(\frac{\xi}{r}\right)^{p_k+1}}{R_{\sigma'}(p_k)} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\gamma\delta \leq r, \theta, r\theta, 0 \leq \theta \leq \alpha, 0 < r < a+b,$$

где p_k – полюса подынтегральных функций или нули функции $R_{\sigma}(p)$, за исключением устранимых особых точек. Формула (33) показывает, что напряжения имеют при $r=0$ особенности по r порядка $\gamma_0 = p_0 + 1$, т.е. $r^{-\gamma_0}$ (при $r \rightarrow 0$). В таблице приведены значения первого слева от начала координат полюса p_0 и показателя степени γ_0 в формулах (33) для различных полууглов раствора фиссуры φ .

Расчёты напряженности в окрестности вершины фиссуры

Полученные формулы (32), (33) дают возможность изучить НДС в окрестности вершины фиссуры. Напряжения $\sigma_{\theta\theta}$, рассчитанные по формулам (33) в окрестности вершины фиссуры, представлены на рис. 3 для трёх различных углов раствора $2\varphi=60^\circ, 80^\circ, 100^\circ$ вместе с

Список литературы

1. Беляев А.Ю., Гилева О.С., Муравьева М.А., Свистков А.Л., Скачков А.П. Исследование механических свойств здоровой и поврежденной кариесом зубной эмали с помощью микроиндентирования // Российский журнал биомеханики. – 2012, № 3. – С. 57–64.
2. Левицкая А.Д., Сюткина Е.С., Гилева О.С., Галкин С.В., Ефимов А.А., Савицкий Я.В. Оценка микроструктуры и минеральной плотности очага искусственного кариеса эмали по данным рентгеновской компьютерной микротомографии // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 4. – С. 485–502.
3. Линченко И.В., Стекольников Н.В., Машков А.В., Пчелин И.Ю., Буянов Е.А. Современные методы изучения биометрических характеристик окклюзионной поверхности боковых зубов // Фундаментальные исследования. – 2014. – Т. 10, № 7 – С. 1346–1350.
4. Олесова В.Н., Бронштейн Д.А., Лернер А.Я., Олесов Е.Е., Бобер С.А., Узунян Н.А. Напряженно-деформированное состояние в протезной конструкции на дентальном имплантате при цементной фиксации искусственной коронки // Российский журнал биомеханики. – 2016. – Т. 20, № 4. – С. 311–315.
5. Петрикас А.Ж., Смирнова М.А., Баженов Д.В., Эхте А.А., Петрикас О.А. Частная анатомия зубов в рисунках и цифрах: учеб. пособие. – Тверь: Тверская государственная медицинская академия, 2013. – 45 с.
6. Рогожников А.Г., Вильдеман В.Э., Биккулова А.В., Зубова Е.М., Рогожников Г.И., Шулятникова, О.А. Экспериментальное исследование процессов разрушения полунатурных керамических элементов зубных протезов методом регистрации сигналов акустической эмиссии // Российский журнал биомеханики. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 230–240.

величиной параметров, указанных на рис. 2 и в формулах (9) – (10).

Анализ НДС в окрестности вершины фиссуры показывает, что фиссуры с меньшим углом раствора 2φ (60° , случай *a*) имеют большую по площади область с высокими $\sigma_{\theta\theta}$ напряжениями, тогда как фиссуры с большим углом раствора (100° , случай *в*) имеют меньшую как по площади, так и по величине напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ область по сравнению со случаем (*a*). Отсюда следует, что фиссуры с меньшими углами раствора могут иметь большие по площади области пониженной минерализации, что повышает возможность возникновения кариеса.

Заключение

В настоящей работе в ходе построения аналитического решения задачи о НДС эмали с V-образной выемкой в виде развернутого клина получены формулы для исследования степени концентрации напряжений в окрестности вершины фиссуры зуба человека. Математическое моделирование силы прикуса проведено путем задания распределенных по отрезкам на гранях фиссуры сил, ортогональных граням. Теоретические исследования, проведенные по изучению окклюзионной поверхности моляров и премоляров показывают, что фиссуры с меньшими углами раствора с большей вероятностью могут спровоцировать возникновение кариеса при одной и той же силе прикуса, отсюда следует вывод: при изготовлении искусственных коронок необходимо избегать создания фиссур с малыми углами раствора. Процесс дробления и перетирания пищи приводит к существенным механическим воздействиям на окклюзионную поверхность моляров и премоляров. При этом математическое моделирование продемонстрировало возникновение существенного механического напряжения, приводящее со временем к снижению плотности её минерализации и риску возникновения кариеса в эмали коронки зуба.

7. Садырин Е.В., Ёгина Д.В., Волков С.С., Айзикович С.М. Оценка плотности и микрогеометрических характеристик пломб из стеклоиономерного цемента и композитного материала: биомеханическое *ex vivo* исследование // Российский журнал биомеханики. – 2022. – Т. 26, № 2. – С. 67–73.
8. Симановская Е.Ю., Еловицова А.Н., Тверье В.М., Няшин Ю.И. Биомеханическое описание особенностей функций жевательного аппарата у человека в норме и при различных патологических процессах // Российский журнал биомеханики. – 2004, № 4. – С. 15–26.
9. Borcic J. Anic, I., Smojver I., Catic A., Miletic I., Ribaric S.P. 3D finite element model and cervical lesion formation in normal occlusion and in malocclusion // Journal of oral rehabilitation. – 2005. – Vol. 32, № 7. – P. 504–510.
10. Carda C., Peydro A. Ultrastructural patterns of human dentinal tubules, odontoblasts processes and nerve fibres // Tissue and Cell. – 2006. – Vol. 38, № 2. – P. 141–150.
11. Constantino P.J., Bush, M.B., Barani, A., Lawn, B.R. On the evolutionary advantage of multi-cusped teeth // Journal of The Royal Society Interface. – 2016. – Vol. 13, № 121. – P. 20160374.
12. Crompton A.W., Parker P. Evolution of the mammalian masticatory apparatus: the fossil record shows how mammals evolved both complex chewing mechanisms and an effective middle ear, two structures that distinguish them from reptiles // American Scientist. – 1978. – Vol. 66 – № 2 – P. 192–201.
13. Dahl B.Ö.R.L., Carlsson G.E., Ekfeldt A. Occlusal wear of teeth and restorative materials: a review of classification, etiology, mechanisms of wear, and some aspects of restorative procedures // Acta Odontologica Scandinavica. – 1993. – Vol. 51, № 5. – P. 299–311.
14. Kay R.F. The functional adaptations of primate molar teeth // American journal of physical anthropology. – 1975. – Vol. 43, № 2. – P. 195–215.
15. Lagouvardos P., Sourai P., Douvitsas G. Coronal fractures in posterior teeth // Oper Dent. – 1989. – Vol. 14, № 1. – P. 28–32.
16. Longridge N.N., Youngson C.C. Dental pain: dentine sensitivity, hypersensitivity and cracked tooth syndrome // Primary dental journal. – 2019. – Vol. 8, № 1. – P. 44–51.
17. Lucas P.W., Peters C.R., Arrandale S.R. Seed-breaking forces exerted by orangutans with their teeth in captivity and a new technique for estimating forces produced in the wild // American Journal of Physical Anthropology. – 1994. – Vol. 94, № 3. – P. 365–378.
18. Lynch C.D., McConnell R.J. The cracked tooth syndrome // Journal–Canadian Dental Association. – 2002. – Vol. 68, № 8. – P. 470–475.
19. Magne P., Belser U.C. Porcelain versus composite inlays/onlays: effects of mechanical loads on stress distribution, adhesion, and crown flexure // International Journal of Periodontics & Restorative Dentistry. – 2003. – Vol. 23, № 6.
20. Pegorin F., Kotousov, A., Berto, F., Swain, M.V., Sornsuwan, T. Strain energy density approach for failure evaluation of occlusal loaded ceramic tooth crowns // Theoretical and applied fracture mechanics. – 2012. – Vol. 58, № 1. – P. 44–50.
21. Saatwika L., Prakash V., Malarvizhi D., Subbiya A.A Review on Cracked Tooth Syndrome // Indian Journal of Forensic Medicine & Toxicology. – 2020. – Vol. 14, № 4. – P. 1119–1122.
22. Sadyrin E.V. Correlating the Mechanical Properties to the Mineral Density of Brown Spot Lesion in Dentine Using Nanoindentation and X-ray Micro-tomography // Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications. – Springer, Cham, 2022. – P. 389–398.
23. Sadyrin E.V., Mitrin B.I., Yogina D.V., Swain M.V. Preliminary study of distribution of mechanical properties and mineral density by depth of liquid saturated carious dentine // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2021. – Vol. 1029, № 1. – P. 012056.
24. Sadyrin E.V., Yogina D.V., Swain M.V., Maksyukov S.Y., Vasiliev A.S. Efficacy of dental materials in terms of apparent mineral density restoration: Composite resin, glass ionomer cement and infiltrant // Composites Part C: Open Access. – 2021. – Vol. 6. – P. 100192.
25. Sadyrin E., Swain M., Mitrin B., Rzhepakovsky I., Nikolaev A., Irkha V., Yogina D., Lyanguzov N., Maksyukov S., Aizikovich S. Characterization of enamel and dentine about a white spot lesion: mechanical properties, mineral density, microstructure and molecular composition // Nanomaterials. – 2020. – Vol. 10, № 9. – P. 1889.
26. Salis S.G., Hood, J.A., Stokes, A.N., Kirk, E.E. Patterns of indirect fracture in intact and restored human premolar teeth // Dental Traumatology. – 1987. – Vol. 3, № 1. – P. 10–14.
27. Sornsuwan T., Ellakwa A., Swain M.V. Occlusal geometrical considerations in all-ceramic pre-molar crown failure testing // Dental Materials. – 2011. – Vol. 27, № 11. – P. 1127–1134.
28. Sornsuwan T., Swain M.V. Influence of occlusal geometry on ceramic crown fracture; role of cusp angle and fissure radius // Journal of the mechanical behavior of biomedical materials. – 2011. – Vol. 4, № 7. – P. 1057–1066.
29. Spears I.R., Crompton R.H. The mechanical significance of the occlusal geometry of great ape molars in food breakdown // Journal of Human Evolution. – 1996. – Vol. 31, № 6. – P. 517–535.
30. Timoshenko S., Goodyear J.N. Theory of Elasticity. – New York: Mc Graw–Hill Book Company Inc., 1970. – 608 P.
31. Wan B., Shahmoradi M., Zhang Z., Shibata Y., Sarrafpour B., Swain M., Li Q. Modelling of stress distribution and fracture in dental occlusal fissures // Scientific reports. – 2019. – Vol. 9, № 1. – P. 1–10.
32. Zhang Y., Mai, Z., Barani, A., Bush, M., Lawn, B. Fracture-resistant monolithic dental crowns // Dental Materials. – 2016. – Vol. 32, № 3. – P. 442–449.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант № 22-19-00732.

Благодарность. Автор благодарит руководителя РЦКП НОЦ «Материаль» Зеленцова В.Б. (Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону) и профессора Свэйна М.В. (Сиднейский университет, г. Сидней, Австралия) за помощь в постановке задачи, а также Бардакову Р.А. (Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону) за помощь в проведении численного исследования.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MODELING THE MECHANISM OF REDUCING ENAMEL MINERAL DENSITY IN THE VICINITY OF THE FISSURE TIP

E.V. Sadyrin

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

ARTICLE INFO

Received: 13 February 2023

Approved: 20 March 2023

Accepted for publication: 27 March 2023

Key words:

occlusal surface, fissure, enamel,
mathematical modeling, wedge.

ABSTRACT

A distinctive feature of the enamel surface of molars and premolars is the presence of a certain number of fissures - wedge-shaped (V-shaped) notches, the tops of which are natural stress concentrators in the enamel of the tooth crown. To determine the degree of concentration of mechanical stresses in the vicinity of the fissure tip, the problem of the stress-strain state of enamel in the form of an elastic wedge imitating a fissure is considered. The bite force, acting on the food, wedges the fissure and causes a stress-strain state in the vicinity of its tip. The resulting formulas made it possible to estimate the stress-strain state in the vicinity of the fissure tip depending on the fissure opening angle, food diameter, and relative deformation of the lateral surface of the fissure.

© PNRPU