

УДК 629.7.01

DOI: 10.15593/2224-9982/2022.70.02

**Е.А. Михайлов, В.Б. Федоров**

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

## **ВНЕШНЯЯ И ВНУТРЕННЯЯ МЕХАНИКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА С СИСТЕМОЙ СМЕЩЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС**

Осесимметричные летательные аппараты могут испытывать негативное влияние асимметрий различных типов, таких как массовая асимметрия, аэродинамическая и их комбинации. Это влияние может проявляться в нерасчетных режимах движения, повышенных перегрузках, отклонении траектории. С другой стороны, умышленное введение асимметрии, в частности массовой может скомпенсировать негативное влияние как массово-инерционных, так и аэродинамических асимметрий, а также позволит создавать составляющие аэродинамической силы для осуществления пространственного маневрирования. Это можно реализовать с помощью системы смещения центра масс, установленной на борту изделия.

В работе представлены результаты исследования движения летательных аппаратов с системой смещения центра масс. Данная система реализована в виде балансировочного груза, закрепленного на подвижной платформе с приводом на основе механизма с параллельной кинематикой типа гексапод. Рассматриваемая конструкция в общем случае обеспечивает шесть степеней свободы балансировочного груза – три линейных перемещения центра масс балансировочного груза относительно корпуса и три угла поворота балансировочного груза вокруг его центра масс. Это позволяет сместить центр массы летательного аппарата и скомпенсировать три центробежных момента. Представлена математическая модель для определения массово-инерционных характеристик летательного аппарата, описывающая конструкцию как систему двух твердых тел: корпус – балансировочный груз. Предложена схема изменения положения балансировочного груза для смещения центра масс системы и компенсации центробежных моментов. Рассмотрен случай поперечного смещения центра масс летательного аппарата вдоль оси системы координат, связанной с корпусом, по закону позволяющему устанавливать летательного аппарата в положении равновесия на необходимом угле атаки. Определены массово-инерционные характеристики летательных аппаратов на всем промежутке времени процесса смещения центра масс. Решена обратная задача кинематики для определения длин штанг подвижной платформы.

**Ключевые слова:** осесимметричный летательный аппарат, асимметрия, угол атаки, смещение центра масс, модель движения, массово-инерционные характеристики, балансировка, механизм с параллельной кинематикой, гексапод, обратная задача кинематики.

**E.A. Mikhailov, V.B. Fedorov**

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

## **EXTERNAL AND INTERNAL MECHANICS OF THE AIRCRAFT WITH THE SYSTEM OF DISPLACEMENT OF THE CENTER OF MASS**

Axisymmetric aircraft can be adversely affected by asymmetries of various types, such as mass asymmetry, aerodynamic and combinations thereof. This influence can manifest itself in off-design modes of motion, increased overloads, and trajectory deviation. On the other hand, the deliberate introduction of asymmetry, in particular mass asymmetry, can compensate for the negative impact of both mass-inertial and aerodynamic asymmetries, and will also allow the creation of aerodynamic forces for spatial maneuvering. This can be implemented using the center of mass displacement system installed on board the product.

The paper presents the results of a study of the motion of an aircraft with a center-of-mass displacement system. This system is implemented in the form of a balancing load fixed on a movable platform with a drive based on a mechanism with parallel kinematics of the hexapod type. The considered design generally provides 6 degrees of freedom of the balancer – three linear movements of the center of mass relative to the aircraft frame and three angles of rotation of the balancer around its center of mass. This allows displacement the center of mass of the aircraft and compensating for three centrifugal moments. A mathematical model for determining the mass-inertial characteristics of an aircraft is presented, describing the structure as a system of two solids: the body is a balancer. A scheme is proposed for changing the position of the balancer to displacement the center of mass of the system and compensate for centrifugal moments. The case of a transverse displacement of the center of mass of the aircraft along the axis of the coordinate system associated with the aircraft frame according to the law, allows the aircraft to be installed in the equilibrium position at the required angle of attack is considered. The mass-inertial characteristics of the aircraft over the entire period of time of the displacement of the center of mass are determined. The inverse kinematics problem for determining the lengths of the rods of a movable platform is solved.

**Keywords:** axisymmetric aircraft, asymmetry, angle of attack, displacement of the center of mass, motion model, mass-inertial characteristics, balancing, mechanism with parallel kinematics, hexapod, inverse kinematics problem.

Летательные аппараты (ЛА) осесимметричной формы чувствительны к асимметриям, способным оказывать негативное влияние на параметры движения таких изделий. Асимметрии могут быть различных типов, например массовые, аэродинамические, возникающие как в процессе изготовления конструкции [1], так и в процессе эксплуатации. Наличие асимметрий может негативно сказаться на характеристиках движения ЛА: увеличение углов атаки, отклонение от расчетной траектории, нестабильность вращательного движения [2, 3]. Одним из наиболее негативно влияющих факторов является асимметрия формы наружной поверхности [4]. Но в то же время асимметрии можно использовать для взаимной компенсации. В исследовании [5], управляя асимметрией формы, удалось предотвратить резонансные явления и снизить угловую скорость вращения вокруг продольной оси. Смещая центр масс (ЦМ) ЛА, т.е. создавая асимметрию массы, можно не только компенсировать асимметрии различного типа, но и создавать составляющую подъемной силы, устанавливая ЛА на требуемый угол атаки [6]. Реализовать смещение ЦМ аппарата можно с помощью специальной системы, перемещающей некий балансировочный груз (БГ) относительно корпуса. В качестве БГ могут выступать элементы конструкции и отдельные узлы. Так, в работе [7] предлагается перемещать БГ по направляющей, либо поворачивая его на специальной штанге с целью изменения балансировки атмосферного ЛА на этапе посадки. В исследованиях [8, 9] описываются системы балансировки квадрокоптеров, в которых центровка обеспечивается взаимным смещением частей аппарата (шасси, аккумулятор). В целом в технике для обеспечения балансировки и компенсации массовой асимметрии роторов применяются автоматические балансирующие устройства, большинство из них не имеют системы управления, некоторые имеют активную систему управления [10]. Однако эти системы могут работать только в закритических частотах вращения роторов, следовательно, их невозможно применить на стабилизированных вращением ЛА, и тем более в ЛА без стабилизации вращением вокруг продольной оси. В данной работе предлагается использовать подвижную платформу, построенную на основе механизма с параллельной кинематикой типа гексапод, на которой установлен БГ. Перемещая груз по требуемому закону, можно обеспечить необходимое смещение ЦМ всего ЛА, а также поворачивая груз относительно осей системы координат, связанной с его ЦМ, можно скомпенсировать центробежные моменты инерции. Механизм типа гексапод обладает шестью степенями свободы, позволяет перемещать груз по трем координатам и осуществить поворот вокруг трех осей системы координат, связанной с грузом. Такие устройства позволяют обеспечить высокую точность и скорость перемещения платформы, обладают высокой несущей способностью, в статическом положении становятся пространственными фермами [11–14]. Однако механизмы с параллельной кинематикой требуют больших математических вычислений для решения задач кинематики, но это в значительной степени касается прямой задачи. Предлагаемая в работе система смещения центра масс требует решения обратной задачи кинематики, т.е. по известному положению рабочего органа (БГ) необходимо найти величины длин штанг. В свою очередь, положение ЦМ БГ и углы его поворота определяются из условия обеспечения необходимого смещения ЦМ и требуемых массово-инерционных характеристик с целью компенсации массово-инерционных и аэродинамических асимметрий, а также создания составляющей подъемной силы для осуществления пространственного маневрирования.

**Цель исследования:** формирование математической модели массово-инерционных характеристик ЛА как системы двух твердых тел «корпус – БГ»; формирование уравнений для определения геометрических параметров системы смещения ЦМ на основе механизма с параллельной кинематикой; определение параметров движения ЛА с системой смещения ЦМ в процессе ее функционирования; решение обратной задачи кинематики для определения длин штанг механизма смещения ЦМ в процессе установки ЛА на требуемый угол атаки.

### Математическая модель движения летательного аппарата

В исследовании используется математическая модель, представленная в работе [6]. Действуют следующие системы координат (СК): инерциальная СК  $O'x_n y_n z_n$ , в которой описывается движение ЦМ ЛА; вспомогательная конструкторская система координат (КСК)  $O_k x_k y_k z_k$  с нача-

лом в некоторой точке  $0_k$ ; связанная система координат (ССК)  $0_c x_c y_c z_c$  с началом в ЦМ и осями, параллельными осям  $0_k x_k y_k z_k$ . Для ориентации ЛА используются 9 коэффициентов ориентации  $A_{ij}$ . На рис. 1 показаны: используемые СК; составляющие аэродинамической силы  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$ ;  $cd - cm$  – расстояние от ЦМ до центра давления (ЦД) в  $0_k x_k y_k z_k$ ;  $\Delta y_i, \Delta z_i$  – смещения ЦМ от ЦД в  $0_k x_k y_k z_k$ ; угол атаки  $\alpha$ , скольжения  $\beta$ , полный угол атаки  $\alpha_n$ .

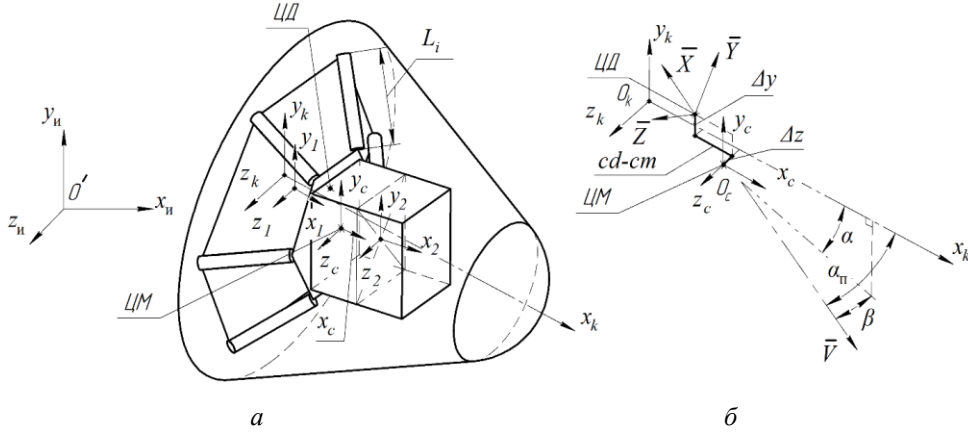


Рис. 1. а – расчетная схема ЛА с системой смещения ЦМ и б – используемые системы координат

В модели используются два типа коэффициентов:  $A_{ij}^i$  – для ориентации по потоку;  $A_{ij_n}^i$  – для ориентации относительно  $0' x_n y_n z_n$ , определяемые из уравнений:

$$\begin{cases} \dot{A}_{11} = \omega_z A_{21} - \omega_y A_{31}; & \dot{A}_{21} = -\omega_z A_{11} + \omega_x A_{31}; & \dot{A}_{31} = \omega_y A_{11} - \omega_x A_{21}, \\ \dot{A}_{12} = \omega_z A_{22} - \omega_y A_{32}; & \dot{A}_{22} = -\omega_z A_{12} + \omega_x A_{32}; & \dot{A}_{32} = \omega_y A_{12} - \omega_x A_{22}, \\ \dot{A}_{13} = \omega_z A_{23} - \omega_y A_{33}; & \dot{A}_{23} = -\omega_z A_{13} + \omega_x A_{33}; & \dot{A}_{33} = \omega_y A_{13} - \omega_x A_{22}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – угловые скорости в  $0_c x_c y_c z_c$ . Индекс  $i$  – ось  $0_c x_c y_c z_c$ . ( $1 - x_c, 2 - y_c, 3 - z_c$ ); индекс  $j$  – ось  $0' x_n y_n z_n$  ( $1 - x_n, 2 - y_n, 3 - z_n$ ).

Ускорения ЦМ ЛА в ССК  $0_c x_c y_c z_c$  определяются по выражениям:

$$\begin{cases} a_x^i = -\left(A_{11_n}^i \cdot dU_i / dx_i + A_{12_n}^i \cdot dU_i / dy_i + A_{13_n}^i \cdot dU_i / dz_i\right) - F_x^i / m; \\ a_y^i = -\left(A_{21_n}^i \cdot dU_i / dx_i + A_{22_n}^i \cdot dU_i / dy_i + A_{23_n}^i \cdot dU_i / dz_i\right) - F_y^i / m; \\ a_z^i = -\left(A_{31_n}^i \cdot dU_i / dx_i + A_{32_n}^i \cdot dU_i / dy_i + A_{33_n}^i \cdot dU_i / dz_i\right) - F_z^i / m, \end{cases} \quad (2)$$

где составляющие ускорений от силы гравитации  $dU_i / dx_i, dU_i / dy_i, dU_i / dz_i$  заданы по зависимостям, представленным в [15]. Аэродинамические силы  $F_x^i, F_y^i, F_z^i$  в ССК  $0_c x_c y_c z_c$  определяются по выражениям (принимается линейные функции для аэродинамических коэффициентов в зависимости от  $\alpha$  и  $\beta$ ):

$$\begin{cases} F_x^i = \left[ C_y^\alpha |\alpha_i| \cdot \sin \alpha_i + C_z^\beta |\alpha_i| \cdot \sin \beta_i - C_x^i \cdot A_{11}^i \right] \cdot q_i \cdot S; \\ F_y^i = \left[ C_y^\alpha \alpha_i \cdot \cos \alpha_i + C_x^i \cdot (-A_{21}^i) \right] \cdot q_i \cdot S; \\ F_z^i = \left[ C_z^\beta \beta_i \cdot \cos \beta_i + C_x^i \cdot (-A_{31}^i) \right] \cdot q_i \cdot S, \end{cases} \quad (3)$$

где  $q_i$  – скоростной напор;  $S$  – площадь миделя;  $C_x^i$  – коэффициент лобового сопротивления;  $C_y^\alpha$ ,  $C_z^\beta$  – производные коэффициентов подъемной и боковой силы.

Систему уравнений вращательного движения ЛА относительно осей ССК  $0_c x_c y_c z_c$  можно представить как систему уравнений [16]:

$$\begin{cases} I_x \varepsilon_x = -\left(\sum M_x - (I_z - I_y)\omega_y \omega_z + I_{xy}(\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + I_{xz}(\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - I_{yz}(\omega_z^2 - \omega_y^2)\right); \\ I_y \varepsilon_y = -\left(\sum M_y - (I_x - I_z)\omega_x \omega_z + I_{xy}(\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) - I_{xz}(\omega_x^2 - \omega_z^2) + I_{yz}(\varepsilon_z - \omega_x \omega_y)\right); \\ I_z \varepsilon_z = -\left(\sum M_z - (I_y - I_x)\omega_x \omega_y + I_{xz}(\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) + I_{yz}(\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - I_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2)\right), \end{cases} \quad (4)$$

где суммы моментов внешних сил относительно ССК  $0_c x_c y_c z_c$  представляются в виде:

$$\begin{cases} \sum M_x^i = F_y^i \cdot \Delta z_i - F_z^i \cdot \Delta y_i + m_{\omega x} \omega_x^i / V_i \cdot q_i \cdot S - m_x^i q_i \cdot S; \\ \sum M_y^i = -(cd - cm)F_z^i + F_x^i \cdot \Delta z_i - F_z^i \cdot \Delta y_i + m_{\omega y} \omega_y^i / V_i \cdot q_i \cdot S - m_y^i q_i \cdot S; \\ \sum M_z^i = (cd - cm)F_y^i - F_x^i \cdot \Delta y_i + m_{\omega z} \omega_z^i / V_i \cdot q_i \cdot S - m_z^i q_i \cdot S, \end{cases} \quad (5)$$

где  $m_x^i$ ,  $m_y^i$ ,  $m_z^i$  – коэффициенты аэродинамических моментов,  $m_{\omega x}$ ,  $m_{\omega y}$ ,  $m_{\omega z}$  – коэффициенты демпфирующих аэродинамических моментов в ССК  $0_c x_c y_c z_c$ .

### Определение массово-инерционных характеристик летательного аппарата как системы двух твердых тел

Для изменения массово-инерционных характеристик ЛА предлагается смещать БГ относительно связанной с корпусом СК. В качестве БГ можно использовать элементы конструкции, отдельные узлы и агрегаты. Как было показано в работе [6], смещением ЦМ вдоль поперечных осей можно создавать составляющую подъемной силы, устанавливать ЛА на требуемые углы атаки и скольжения. Смещение БГ, помимо смещения положения ЦМ, будет неизбежно приводить к изменению осевых и центробежных моментов инерции. Моменты инерции ЛА в главной центральной СК (ГЦСК)  $0_c x_c y_c z_c$  ЛА будем считать как суммарные моменты системы «корпус – БГ»:

$$\begin{cases} I_{x_c z_c} = I_{x_{c1}} + I_{x_{c2}}; & I_{y_c z_c} = I_{y_{c1}} + I_{y_{c2}}; \\ I_{z_c z_c} = I_{z_{c1}} + I_{z_{c2}}; & \begin{cases} I_{x_c y_c z_c} = I_{x_{c1} y_{c1}} + I_{x_{c2} y_{c2}}; & I_{y_c z_c z_c} = I_{y_{c1} z_{c1}} + I_{y_{c2} z_{c2}}; \\ I_{z_c x_c z_c} = I_{z_{c1} x_{c1}} + I_{z_{c2} x_{c2}}, \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

где индекс «1» означает соответствующие характеристики для корпуса, «2» – для БГ.

Моменты инерции корпуса в СК  $0_c x_c y_c z_c$  можно определить по зависимостям [17]:

$$\begin{cases} I_{x_{c1}} = I_{x_1} + m_1(\Delta y^2 + \Delta z^2); & I_{x_{c1} y_{c1}} = I_{x_1 y_1} + m_1 \Delta x_1 \Delta y; \\ I_{y_{c1}} = I_{y_1} + m_1(\Delta x_1^2 + \Delta z^2); & I_{y_{c1} z_{c1}} = I_{y_1 z_1} + m_1 \Delta z \Delta y; \\ I_{z_{c1}} = I_{z_1} + m_1(\Delta x_1^2 + \Delta y^2); & I_{z_{c1} x_{c1}} = I_{z_1 x_1} + m_1 \Delta x_1 \Delta z, \end{cases} \quad (7)$$

где  $m_1$  – масса корпуса;  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  – величины смещения ЦМ ЛА,  $x_1$  – координата ЦМ корпуса,  $x_2$  – координата ЦМ БГ,  $\Delta x_1 = x_1 - x_c$  – расстояние между ЦМ корпуса и ЦМ ЛА в КСК  $0_k x_k y_k z_k$ ;  $x_c = (m_1 x_1 + m_2(x_2 - \Delta x)) / (m_1 + m_2)$ ;  $m_2$  – масса БГ;  $I_{x_1}$ ,  $I_{y_1}$ ,  $I_{z_1}$ ,  $I_{x_1 y_1}$ ,  $I_{y_1 z_1}$ ,  $I_{z_1 x_1}$  – осевые и центробежные моменты инерции корпуса в ГЦСК  $0_1 x_1 y_1 z_1$ .

Так как необходимо обеспечить параллельность осей ГЦСК  $0_c x_c y_c z_c$  осям КСК  $0_k x_k y_k z_k$  после смещения ЦМ ЛА, центробежные моменты должны быть равны нулю  $I_{x_c y_c z_c} = 0$ ,  $I_{y_c z_c z_c} = 0$ ,

$I_{z_c x_c} = 0$ . Это условие можно выполнить путем последовательных поворотов БГ вокруг осей, связанных с конструкцией и с началом в ЦМ БГ ( $O_2$ ). Так, для компенсации  $I_{y_c z_c}$  необходимо повернуть БГ вокруг оси  $x_2$  на угол  $\varphi_1$ . В этом случае инерционные характеристики БГ в СК  $O_2 x'_2 y'_2 z'_2$  с центром в ЦМ БГ и осями, параллельными осям КСК  $O_k x_k y_k z_k$ , будут определяться по выражениям [17]:

$$\begin{cases} I_{x'_2} = I_{x_2}; \\ I_{y'_2} = I_{y_2} \cdot \cos^2 \varphi_1 + I_{z_2} \cdot \sin^2 \varphi_1 - I_{y_2 z_2} \cdot \sin 2\varphi_1; \\ I_{z'_2} = I_{y_2} \cdot \sin^2 \varphi_1 + I_{z_2} \cdot \cos^2 \varphi_1 + I_{y_2 z_2} \cdot \sin 2\varphi_1; \end{cases} \begin{cases} I_{y'_2 z'_2} = 0,5(I_{y_2} - I_{z_2}) \cdot \sin 2\varphi_1 + I_{y_2 z_2} \cos 2\varphi_1; \\ I_{z'_2 x'_2} = I_{z_2 x_2} \cdot \cos \varphi_1 - I_{x_2 y_2} \cdot \sin \varphi_1; \\ I_{x'_2 y'_2} = I_{z_2 x_2} \cdot \sin \varphi_1 + I_{x_2 y_2} \cdot \cos \varphi_1, \end{cases} \quad (8)$$

где  $I_{x_2}$ ,  $I_{y_2}$ ,  $I_{z_2}$ ,  $I_{x_2 y_2}$ ,  $I_{y_2 z_2}$ ,  $I_{z_2 x_2}$  – осевые и центробежные моменты инерции БГ в ГЦСК  $O_2 x_2 y_2 z_2$ .

Далее для компенсации  $I_{z_c x_c}$  необходимо произвести поворот вокруг оси  $y_2$  на угол  $\varphi_2$ . Инерционные характеристики БГ в СК  $O_2 x'_2 y'_2 z'_2$  определяются по выражениям [17]:

$$\begin{cases} I_{x'_2} = I_{z'_2} \sin^2 \varphi_2 + I_{x'_2} \cos^2 \varphi_2 + I_{z'_2 x'_2} \sin 2\varphi_2; \\ I_{y'_2} = I_{y_2}; \\ I_{z'_2} = I_{z'_2} \cos^2 \varphi_2 + I_{x'_2} \sin^2 \varphi_2 - I_{z'_2 x'_2} \sin 2\varphi_2; \end{cases} \begin{cases} I_{y'_2 z'_2} = I_{y_2 z_2} \cos \varphi_2 + I_{x'_2 y'_2} \sin \varphi_2; \\ I_{z'_2 x'_2} = 0,5(I_{z'_2} - I_{x'_2}) \sin 2\varphi_2 + I_{z'_2 x'_2} \cos 2\varphi_2; \\ I_{x'_2 y'_2} = -I_{y'_2 z'_2} \sin \varphi_2 + I_{x'_2 y'_2} \cos \varphi_2. \end{cases} \quad (9)$$

Заключительным поворотом вокруг оси  $z_2$  на угол  $\varphi_3$  можно скомпенсировать  $I_{x_c y_c}$ . Инерционные характеристики БГ в СК  $O_2 x'_2 y'_2 z'_2$  определяются по выражениям [17]:

$$\begin{cases} I_{x''_2} = I_{x'_2} \cos^2 \varphi_3 + I_{y'_2} \sin^2 \varphi_3 - I_{x'_2 y'_2} \sin 2\varphi_3; \\ I_{y''_2} = I_{x'_2} \sin^2 \varphi_3 + I_{y'_2} \cos^2 \varphi_3 + I_{x'_2 y'_2} \sin 2\varphi_3; \\ I_{z''_2} = I_{z'_2}; \end{cases} \begin{cases} I_{y''_2 z''_2} = I_{y'_2 z'_2} \cos \varphi_3 - I_{x''_2 y''_2} \sin \varphi_3; \\ I_{z''_2 x''_2} = I_{y'_2 z'_2} \sin \varphi_3 + I_{x''_2 y''_2} \cos \varphi_3; \\ I_{x''_2 y''_2} = 0,5(I_{x''_2} - I_{y''_2}) \sin 2\varphi_3 + I_{x''_2 y''_2} \cos 2\varphi_3. \end{cases} \quad (10)$$

Инерционные характеристики БГ в ГЦСК  $O_c x_c y_c z_c$  после трех поворотов и с учетом смещения относительно осей КСК  $O_k x_k y_k z_k$  определяются по зависимостям:

$$\begin{cases} I_{x_c} = I_{x''_2} + m_2 \left( (k\Delta y)^2 + (k\Delta z)^2 \right); \\ I_{y_c} = I_{y''_2} + m_2 \left( \Delta x_2^2 + (k\Delta z)^2 \right); \\ I_{z_c} = I_{z''_2} + m_2 \left( \Delta x_2^2 + (k\Delta y)^2 \right); \end{cases} \begin{cases} I_{x_c y_c} = I_{x''_2 y''_2} + m_2 \Delta x_2 k \Delta y; \\ I_{y_c z_c} = I_{y''_2 z''_2} + m_2 k^2 \Delta y \Delta z; \\ I_{z_c x_c} = I_{z''_2 x''_2} + m_2 \Delta x_2 k \Delta z, \end{cases} \quad (11)$$

где  $k = m_1 / m_2$ ;  $\Delta x_2 = x_2 - x_c + \Delta x$  – расстояние между ЦМ БГ и ЛА в  $O_k x_k y_k z_k$ .

Анализируя выражения (6) – (11), можно заключить, что после устранения путем серии поворотов БГ центробежных моментов инерции в СК  $O_c x_c y_c z_c$  (после этого  $O_c x_c y_c z_c$  преобразуется в ГЦСК), ЛА становится инерционно анизотропным. Таким образом, моменты инерции относительно поперечных осей не будут равны  $I_{y_c} \neq I_{z_c}$ , такое же явление описано в работе [18] по изучению автобалансируемых систем роторов. Достоверность полученной модели массово-инерционных характеристик ЛА как системы двух тел «корпус – БГ» подтверждена твердотельным моделированием в SolidWorks, где задавались необходимые смещения и углы поворота БГ и измерялись все массово-инерционные характеристики.

**Анализ соотношения массово-инерционных характеристик элементов системы для определения требуемых параметров балансирующего груза**

В рассматриваемой задаче производится смещение БГ вдоль поперечной оси на величину  $\Delta y$ , что приводит к появлению центробежного момента  $I_{x_2 y_2} \neq 0$ . Компенсация производится поворотом БГ на угол  $\varphi_3$ . Так как  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ , получаем уравнение:

$$I_{x_2 y_2} = I_{x_1 y_1} + m_1 \Delta x_1 \Delta y + 0,5(I_{x_2} - I_{y_2}) \sin 2\varphi_3 + I_{x_2 y_2} \cos 2\varphi_3 + m_2 \Delta x_2 k \Delta y = 0. \quad (12)$$

Принимая, что  $I_{x_1 y_1} = 0, I_{x_2 y_2} = 0, \Delta x = 0$ , и подставляя выражение для  $k, \Delta x_1, \Delta x_2$ , получаем выражения для потребного угла поворота БГ ( $\varphi_3$ ):

$$\varphi_3 = 0,5 \cdot \arcsin \left( -2\Delta y \cdot (x_2 - x_1) \cdot \frac{(m_1^2 - m_1 m_2)}{m_1 + m_2} / (I_{x_2} - I_{y_2}) \right). \quad (13)$$

Анализируя полученное выражение, можно заключить, что для уменьшения потребного угла поворота БГ для компенсации центробежного момента нужно уменьшать  $m_1$  и минимизировать расстояние между ЦМ корпуса и БГ, а также увеличивать разницу между осевыми моментами инерции БГ  $I_{x_2}$  и  $I_{y_2}$ .

**Решение обратной задачи кинематики гексапода для смещения балансирующего груза**

Для механизма с параллельной кинематикой с шестью штангами переменной длины обратная задача кинематики, т.е. задача по определению длин каждой штанги по известным данным о положении рабочего органа (в данном случае платформы с закрепленным на ней БГ), является гораздо более простой задачей в сравнении с прямой задачей [8]. Определить длины стержней можно путем решения системы из шести нелинейных уравнений [19]:

$$L_i^2 = (x_{A_i} - l_1 x'_{B_i} - l_2 y'_{B_i} - l_3 z'_{B_i} - x_{0_2})^2 + (y_{A_i} - m_1 x'_{B_i} - m_2 y'_{B_i} - m_3 z'_{B_i} - y_{0_2})^2 + (z_{A_i} - n_1 x'_{B_i} - n_2 y'_{B_i} - n_3 z'_{B_i} - z_{0_2})^2, \quad (14)$$

где  $x_{0_2}, y_{0_2}, z_{0_2}$  – координаты ЦМ БГ в КСК  $0_k x_k y_k z_k$ ;  $x_{A_i}, y_{A_i}, z_{A_i}$  – координаты точек крепления стержней к корпусу в КСК  $0_k x_k y_k z_k$ ;  $x'_{B_i}, y'_{B_i}, z'_{B_i}$  – координаты точек крепления стержней к платформе БГ в СК  $0_2 x_2 y_2 z_2$ . Коэффициенты ориентации определяются с использованием углов Эйлера [14, 20] или Крылова [19], которые будут равняться необходимым углам поворота БГ, т.е.  $\psi = \varphi_1, \upsilon = \varphi_3, \gamma = \varphi_2$  (рис. 2):

$$\begin{cases} l_1 = \cos \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma; \\ l_2 = \sin \psi \cos \vartheta; \\ l_3 = -\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma; \end{cases} \begin{cases} m_1 = -\sin \psi \cos \gamma + \sin \vartheta \cos \psi \sin \gamma; \\ m_2 = \cos \psi \cos \vartheta; \\ m_3 = \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma; \end{cases} \begin{cases} n_1 = \cos \vartheta \sin \gamma; \\ n_2 = -\sin \vartheta; \\ n_3 = \cos \vartheta \cos \gamma. \end{cases} \quad (15)$$

Для отладки модели кинематики в [13, 21] предлагалось создавать твердотельную модель механизма (цифровой двойник). Для проверки выражений (14) была создана 3D-модель ЛА с подвижной платформой и проведена серия замеров длин штанг гексапода при различных вариантах смещения и углов поворота БГ, которые подтвердили достоверность модели.

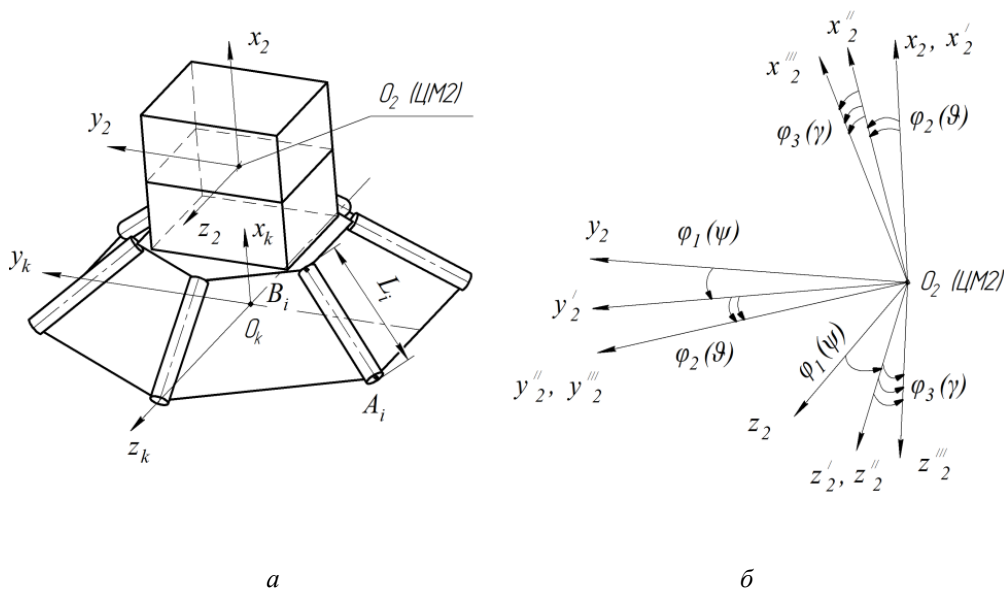


Рис. 2. Углы поворота: *a* – системы координат и *б* – углы поворота БГ, закрепленного на подвижной платформе

### Результаты

После моделирования вращательного движения (скорость и скоростной напор принимался постоянным, уравнения (1) в расчет не принимались) для случая смещения ЦМ вдоль оси  $y_k$  по закону, полученному в работе [6], были вычислены все параметры движения ЛА, инерционные характеристики системы, необходимые величины смещения БГ и угол его поворота для компенсации центробежного момента. Закон смещения ЦМ позволяет устанавливать ЛА на требуемый угол атаки без колебаний и имеет вид:

$$\Delta y_i = V_{\Delta y}^{\max} t + k' \omega_z^i / V_i, t \in [0, t_{\text{уст}}], \Delta y_i = \Delta y_{\max} + k' \omega_z^i / V_i, t \in [t_{\text{уст}}, \infty], \quad (16)$$

где  $k'$  подбирается итерационно,  $V_{\Delta y}^{\max}$  – максимальная скорость смещения,  $t_{\text{уст}}$  – время смещения до величины  $\Delta y_{\max}$  при линейном законе смещения, т.е. при  $k' = 0$ .

На рис. 3 показаны изменения параметров вращательного движения ЛА: угловой скорости  $\omega_z$ , ускорения  $\varepsilon_z$  и угла атаки  $\alpha$ . Как видно на рис. 3, в, ЛА установится в положении равновесия на балансировочном угле атаки  $\alpha_6 = 1,66^\circ$ . В результате решения обратной задачи кинематики были вычислены длины штанг платформы для смещения БГ и его поворота. Так как смещение производилось только вдоль одной оси ( $y_k$ ) и ЛА совершал вращательное движение вокруг оси  $z_c$ , то необходимо было скомпенсировать только один центробежный момент  $I_{x_c y_c}$ . Полученный угол поворота  $\varphi_3$  обеспечивает компенсацию, и при этом БГ не выходит за габариты внутреннего пространства корпуса. Изменение инерционных характеристик ( $I_{x_c}$  – рис. 4, а), угла поворота БГ  $\varphi_3$  (рис. 4, б) и длин штанг имеет нелинейный характер и картину, схожую с законом смещения ЦМ ЛА  $\Delta y(t)$  вдоль оси  $y_k$  (рис. 4, в). Анализ инерционных характеристик показывает, что моменты инерции меняются в диапазонах (от исходного значения до значения в момент  $\alpha = \alpha_6$ ): для

$I_{x_c} - 0,16, I_{y_c} - 0,01, I_{z_c} - 0,13$  %. Инерционная анизотропия, задаваемая как отношение  $I_{y_c} / I_{z_c}$ , уменьшилась на 0,14 %.

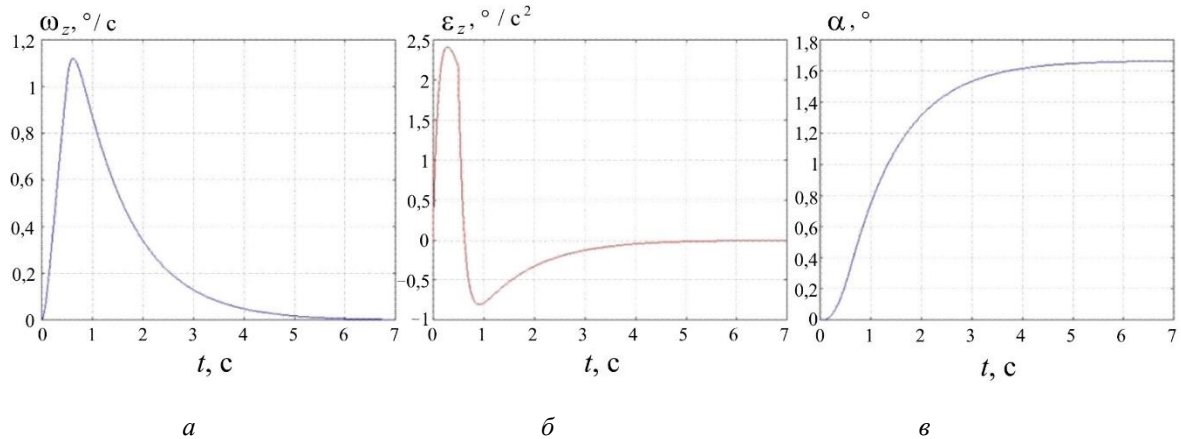


Рис. 3. а – угловая скорость ЛА  $\omega_z$ ; б – угловое ускорение  $\varepsilon_z$ ; в – угол атаки  $\alpha$

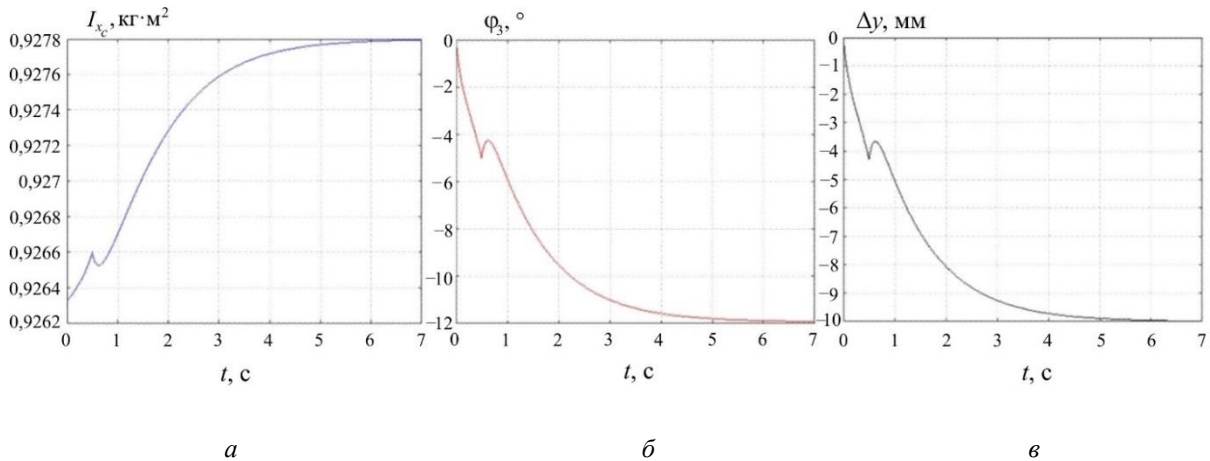


Рис. 4. а – момент инерции ЛА  $I_{x_c}$ ; б – угол поворота БГ  $\varphi_3$ ; в – смещение ЦМ ЛА  $\Delta y(t)$

### Выводы

Была получена математическая модель массово-инерционных характеристик ЛА с системой смещения ЦМ. ЛА представлен как система двух твердых тел «корпус – БГ». Полученные выражения позволяют определить необходимые величины перемещений БГ для обеспечения потребного смещения ЦМ ЛА, а также необходимые углы поворота БГ вокруг его ЦМ для компенсации возникающих центробежных моментов. Было выявлено, что после балансировки путем смещения и поворотов БГ симметричный ЛА становится инерционно анизотропным, т.е. его моменты инерции относительно поперечных осей не равны:  $I_{y_{c2}} \neq I_{z_{c2}}$ . Получено выражение для определения потребного угла поворота БГ с целью компенсации центробежного момента, после анализа которого выявлено, что для снижения угла поворота БГ нужно уменьшать массу корпуса и расстояние между ЦМ корпуса и БГ, а также увеличивать разницу между осевыми моментами инерции БГ. Для реализации необходимых смещений и поворотов БГ предложено использовать механизм с параллельной кинематикой типа гексапод, обеспечивающий шесть степеней свободы. Были получены выражения для определения необходимых длин штанг гексапода для обеспечения потребных величин смещения и углов поворота БГ, т.е. решена обратная задача кинематики. Полученные выражения для определения массово-инерционных характеристик ЛА как системы двух твердых тел «корпус – БГ» и длин штанг механизма с параллельной кинематикой были провере-



ны путем твердотельного моделирования системы с подтверждением их достоверности. По результатам тестового моделирования вращательного движения ЛА с системой смещения ЦМ при установке его на балансировочный угол атаки без совершения колебаний были определены массово-инерционные характеристики системы, необходимые величины смещения и углов поворота БГ, а также изменение длин штанг механизма с параллельной кинематикой. Полученные графики изменения расчетных величин имеют нелинейный характер и близки по форме к закону изменения величины смещения ЦМ ЛА. Изменение величин моментов инерции и инерционной анизотропии в процессе установки ЛА на балансировочный угол атаки не превысили 1 %. Полученные результаты позволяют сделать вывод о принципиальной возможности реализации системы смещения ЦМ ЛА на основе механизма с параллельной кинематикой.

#### Библиографический список

1. Kurkina E.V. Acceptable range parameters of asymmetry of spacecraft descending in the Martian atmosphere // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 868. – Art. 012036. DOI: 10.1088/1757-899X/868/1/012036
2. Lyubimov V.V., Kurkina E.V. Mathematical Simulation of Perturbations of Attack Angle of Asymmetric Nanosatellite Passing through Resonance // International Conference on Information Technologiess in Business and Industry 2018. Journal of Physics: ConferenceSeries. – 2018. – Vol. 1015. – Art. 032089. – DOI: 10.1088/1742-6596/1015/3/032089
3. Фёдоров В.Б. Математическая модель баллистического летательного аппарата с переменными массогометрическими характеристиками // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2013. – Т. 13, №2. – С. 68–74.
4. Kurkina E.V., Lyubimov V.V. Estimation of the Probability of Capture into Resonance and Parametric Analysis in the Descent of an Asymmetric Spacecraft in an Atmosphere // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2018. – Vol. 125. – P. 492–500. DOI: 10.1134/S1990478918030092
5. Lyubimov V.V., Kurkina E.V. Application of the dynamic programming method to obtain of the angular velocity control law of a spacecraft with a small geometric asymmetry in the atmosphere // 12th International Scientific and Technical Conference on Applied Mechanics and Systems Dynamics. Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1210. – Art. 012088. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012088
6. Михайлов Е.А., Федоров В.Б. Динамика летательного аппарата с системой смещения центра масс // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2022. – Т. 22, №1. – С. 71–82. DOI: 10.14529/engin220106
7. Карташев А.Л., Пантिलеев А.С. Определение конструктивных параметров беспилотного летательного аппарата с изменяемой в полете структурой с использованием математического моделирования // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2016. – Т. 16, №2. – С. 33–42. DOI: 10.14529/engin160204
8. Chaisena K., Chamniprasart K., Tantrairatn S. An Automatic stabilizing system for balancing a multi-rotor subject to variations in center of gravity and mass // 2018 Third International Conference on Engineering Science and Innovative Technology (ESIT). – 2019. – Art. 8665339. – DOI:10.1109/esit.2018.8665339
9. Chaisena K., Nenchoo B., Tantrairatn S. Automatic balancing system in quadcopter with change in center of gravity // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 886. – Art. 012006. DOI:10.1088/1757-899x/886/1/012006
10. Dae Yi. A control strategy of actively actuated eccentric mass system for imbalance rotor vibration // Actuators. – 2020. – Vol. 9 (3). – Art. 69. DOI: 10.3390/ACT9030069
11. Yagur A.A., Belov A.A. Inverse kinematics analysis and path planning for 6DOFRSS parallel manipulator // 2018 22nd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). – 2018. – Art. 8540728. – P. 789–793. – DOI:10.1109/icstcc.2018.8540728
12. Alkhedher M., Ali U., Mohamad O. Modeling, simulation and design of adaptive 6DOF vehicle stabilizer // 2019 8th International Conference on Modeling Simulation and Applied Optimization (ICMSAO). – 2019. – Art. 8880417. – DOI:10.1109/icmsao.2019.8880417
13. An error identification and compensation method of a 6-DoF parallel kinematic machine / Z. He, B. Lian, Q. Li, Y. Zhang, Y. Song, Y. Yang, T. Sun // IEEE Access. – 2020. – Vol. 8. – Art. 9126790. – P. 119038–119047. DOI:10.1109/access.2020.3005141
14. Inverse kinematics analysis of 6 – DOF Stewart platform based on homogeneous coordinate transformation / W. Wei, Z. Xin, Han Li-li, W. Min, Z. You-bo // Ferroelectrics. – 2018. – Vol. 522 (1). – P. 108–121. DOI:10.1080/00150193.2018.1392755

15. Костров А.В. Движение асимметричных баллистических аппаратов. – М.: Машиностроение, 1984. – 272 с.
16. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика. – М.: Машиностроение, 1991. – 640 с.
17. Фаворин М.В. Моменты инерции тел: справочник. – М.: Машиностроение, 1977. – 511 с.
18. Горбенко А.Н. Влияние автобалансира на критические скорости вращения двухпорного ротора // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2016. – № 10. – С. 143–167. DOI: 10.7463/1016.0847756
19. Смирнов В.А. Научные основы и алгоритмы управления оборудованием с параллельными приводами: монография. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2009. – 163 с.
20. Datta S., Das A., Gayen Rintu Kumar. Kinematic Analysis of Stewart Platform using MATLAB // 5th International Conference on Electronics, Materials Engineering and Nano-Technology, IEMEN Tech. – 2021. – 4p. DOI: 10.1109/IEMENTech53263.2021.9614923
21. Camacho F.D., Medrano A.Q., Carvajal L.E. Validation through a digital twin of a Stewart platform with irregular geometry with 6 DOF for simulation of a transport vehicle // IEEE 16th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE). – 2021. – Vol. 2020, August. – Art. 9216995. – P. 1084–1089. DOI: 10.1109/case48305.2020.9216995

### References

1. Kurkina E.V. Acceptable range parameters of asymmetry of spacecraft descending in the Martian atmosphere. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, vol. 868, art. no. 012036. DOI: 10.1088/1757-899X/868/1/012036
2. Lyubimov V.V., Kurkina E.V. Mathematical simulation of perturbations of attack angle of asymmetric nanosatellite passing through resonance. International Conference on Information Technologiess in Business and Industry 2018. Journal of Physics: Conference Series, 2018, vol. 1015, art. no. 032089. DOI: 10.1088/1742-6596/1015/3/032089
3. Fedorov V.B. Matematicheskaya model ballisticheskogo letatel'nogo apparata s peremennymi masso-geometricheskimi karakteristikami [Mathematical model of ballistic vehicle with variable inertial parameters]. Bulletin of the SUSU, Series "Mechanical engineering industry", 2013, vol. 13, no. 2, pp. 68-74.
4. Kurkina E.V., Lyubimov V.V. Estimation of the probability of capture into resonance and parametric analysis in the descent of an asymmetric spacecraft in an atmosphere. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2018, vol. 125, pp. 492–500. DOI: 10.1134/S1990478918030092
5. Lyubimov V.V., Kurkina E.V. Application of the dynamic programming method to obtain of the angular velocity control law of a spacecraft with a small geometric asymmetry in the atmosphere. 12th International Scientific and Technical Conference on Applied Mechanics and Systems Dynamics. Journal of Physics: Conference Series, 2019, vol. 1210, art. no. 012088. DOI: 10.1088/1742-6596/1210/1/012088
6. Mikhailov E.A., Fedorov V.B. Dinamika letatel'nogo apparata s sistemoy smeshcheniya tsentra mass [Dynamics of the air-craft with the system of displacement of the center of mass]. Bulletin of the SUSU, Series "Mechanical engineering industry", 2022, vol. 22, no. 1, pp. 71-82. DOI: 10.14529/engin220106
7. Kartashev A.L., Pantileev A.S. Opredeleniye konstruktivnykh parametrov bespilotnogo letatel'nogo apparata s izmenyayemoy v poletestrukture s ispol'zovaniyem matematicheskogo modelirovaniya [Determination of Design Parameters Unmanned Aerial Vehicles with Variable Structure in Flight Using Mathematical Modeling]. Bulletin of the SUSU, Series "Mechanical engineering industry", 2016, vol. 16, no. 2, pp. 33-42. DOI: 10.14529/engin160204
8. Chaisena K., Chamniprasart K., Tantrairatn S. An Automatic stabilizing system for balancing a multi-rotor subject to variations in center of gravity and mass. 2018 Third International Conference on Engineering Science and Innovative Technology (ESIT), 2019, art. no. 8665339. DOI: 10.1109/esit.2018.8665339
9. Chaisena K., Nenchoo B., Tantrairatn S. Automatic balancing system in quadcopter with change in center of gravity. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2020, vol. 886, art. no. 012006. DOI: 10.1088/1757-899X/886/1/012006
10. Dae Yi. A control strategy of actively actuated eccentric mass system for imbalance rotor vibration. Actuators, 2020, vol. 9 (3), art. no. 69. DOI: 10.3390/ACT9030069
11. Yagur A.A., Belov A.A. Inverse kinematics analysis and path planning for 6DOF RSS parallel manipulator. 2018 22nd International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC), 2018, art. no. 8540728, pp. 789–793. DOI: 10.1109/icstcc.2018.8540728
12. Alkhedher M., Ali U., Mohamad O. Modeling, simulation and design of adaptive 6DOF vehicle stabilizer. 2019 8th International Conference on Modeling Simulation and Applied Optimization (ICMSAO), 2019, art. no. 8880417. DOI: 10.1109/icmsao.2019.8880417

13. He Z., Lian B., Li Q., Zhang Y., Song Y., Yang Y., Sun T. An error identification and compensation method of a 6-DoF parallel kinematic machine. *IEEE Access*, 2020, vol. 8, art. no. 9126790, pp. 119038–119047. DOI:10.1109/access.2020.3005141
14. Wei W., Xin Z., Li-li Han, Min W., You-bo, Z. Inverse kinematics analysis of 6 – DOF Stewart platform based on homogeneous coordinate transformation. *Ferroelectrics*, 2018, vol. 522 (1), pp. 108–121. DOI:10.1080/00150193.2018.1392755
15. Kostrov A.V. Dvizhenieasimmetrichnyhballisticheskikhapparatorov [Movement of asymmetric ballistic vehicles]. Moscow, Mashinostroeniye, 1984, 272 p.
16. Dmitrievskij A.A. Vneshnjajaballistika [External ballistics]. Moscow, Mashinostroeniye, 1991, 640 p.
17. Favorin M.V. Momentyinericii [Moments of inertia of bodies] Moscow, Mashinostroeniye, 1977, 511 p.
18. Gorbenko A.N. Vliyaniyeavtobalansiranakriticheskoyeskorostivrashcheniyadvukhopornogorotora [Autobalancer influence on the critical speeds of rotor on two supports]. *Science and Education of the Bauman MSTU*, 2016, no. 10, pp. 143–167. DOI: 10.7463/1016.0847756
19. Smirnov V.A. Nauchnye osnovy algoritmy upravleniya oborudovaniem s parallel'nymiprivodami [Scientific foundations and algorithms for controlling equipment with parallel drives]. Chelyabinsk, South Ural State University, 2009, 163 p.
20. Datta S., Das A., Gayen Rintu Kumar. Kinematic Analysis of Stewart Platform using MATLAB. 5th International Conference on Electronics, Materials Engineering and Nano-Technology, IEMENTech, 2021. DOI: 10.1109/IEMENTech53263.2021.9614923
21. Camacho F.D., Medrano A.Q., Carvajal L.E. Validation through a digital twin of a Stewart platform with irregular geometry with 6 DOF for simulation of a transport vehicle. *IEEE 16th International Conference on Automation Science and Engineering (CASE)*, 2021, vol. 2020-August, art. no. 9216995, pp. 1084–1089. DOI: 10.1109/case48305.2020.9216995

#### Об авторах

**Михайлов Евгений Александрович** (Челябинск, Россия) – аспирант кафедры «Летательные аппараты», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, 454080, пр. Ленина, 76, e-mail: evgeniy-mihaylov-09@mail.ru).

**Федоров Виктор Борисович** (Челябинск, Россия) – кандидат технических наук, доцент, заместитель заведующего кафедрой «Летательные аппараты», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, 454080, пр. Ленина, 76, e-mail: vbf64@mail.ru).

#### About the authors

**Evgenii A. Mikhailov** (Chelyabinsk, Russian Federation) – Postgraduate Student of the Department “Aircraft and Rockets”, South Ural State University (76, Lenin av., 454080, Chelyabinsk, e-mail: evgeniy-mihaylov-09@mail.ru).

**Viktor B. Fedorov** (Chelyabinsk, Russian Federation) – Ph. D. in Technical Sciences, Deputy Head of Department “Aircraft and Rockets”, South Ural State University (76, Lenin av., 454080, Chelyabinsk, e-mail: vbf64@mail.ru).

**Финансирование.** Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание #FENU-2021-0014).

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Вклад авторов.** Все авторы сделали равный вклад в подготовку публикации.

Поступила: 27.05.2022

Одобрена: 20.06.2022

Принята к публикации: 10.11.2022

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом: Михайлов, Е.А. Внешняя и внутренняя механика летательного аппарата с системой смещения центра масс / Е.А. Михайлов, В.Б. Федоров // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. – 2022. – № 70. – С. 18–28. DOI: 10.15593/2224-9982/2022.70.02

Please cite this article in English as: Mikhailov E.A., Fedorov V.B. External and internal mechanics of the aircraft with the system of displacement of the center of mass. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2022, no. 70, pp. 18-28. DOI: 10.15593/2224-9982/2022.70.02