

# КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ НА ПРИРОДНЫЕ СИСТЕМЫ

---

DOI: 10.15593/2409-5125/2022.1.08  
УДК 502.2,57.013,51-7

**Д.А. Тукмаков**

Казанский научный центр Российской академии наук

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ ВОДОТОКА ВЗВЕСЬЮ С ПОМОЩЬЮ СТАЦИОНАРНОЙ ДВУХМЕРНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Представлена математическая модель конвективной диффузии дисперсной взвеси в проточном водоеме, учитывающая седиментацию частиц. Необходимость исследования и моделирования течений дисперсных сред связана с экологическими проблемами углубления русла рек. Природные условия в водоемах подвергаются отрицательному воздействию в результате проведения дноуглубительных работ. Добыча песчано-гравийных смесей в руслах рек приводит к загрязнению водотоков взвешенными веществами, оказывающему отрицательное воздействие на водные экосистемы. Кормовая база рыб, места их нереста подрываются в результате изъятия песчано-гравиевых смесей из русел рек. На гидробионтах сказывается многократное увеличение мутности, вторичное загрязнение тяжелыми металлами, содержание которых может превышать предельно допустимую концентрацию для водоемов. В данной работе рассматриваются и сопоставляются различные методики математического моделирования динамики твердых взвесей в движущемся потоке воды. Уравнения двухмерной стационарной математической модели выведены из уравнения конвективной диффузии в трехмерном нестационарном виде. Совокупность уравнений диффузии для каждой фракции формирует математическую модель диффузии многофракционной твердой примеси с учетом различных скоростей седиментации фракций. Получено точное решение для уравнений математической модели диффузии нескольких фракций частиц. С помощью полученного решения проведены исследования влияния параметров моделируемого процесса на диффузию твердой примеси в проточном водоеме. В работе сопоставлены результаты различных подходов в расчетах скорости седиментации на процесс распространения твердых примесей в движущемся потоке. Также рассматривались различные методики вычисления коэффициента турбулентной диффузии. Выявленные закономерности возможно использовать для экологической оптимизации гидротехнических работ.

**Ключевые слова:** загрязнение окружающей среды, уравнение диффузии, математическое моделирование, осаждение частиц.

Моделирование движения примесей в жидкостях и газах связано с различными проблемами промышленной экологии. Необходимость исследования и моделирования диффузионных процессов дисперсных примесей в водотоках возникает по причине экологических проблем углубления русла рек. Природные условия в водоемах подвергаются отрицательному воздействию в результате проводимых гидротехнических работ. Добыча песчано-

гравийных смесей в руслах рек приводит к загрязнению водотоков взвешенными веществами и, соответственно, к повышению мутности, оказывающей отрицательное воздействие на водные экосистемы. В результате таких работ в биоценозах происходит снижение их продуктивности, истощаются запасы рыб, снижается их видовой состав. В данной работе представлены результаты теоретического исследования диффузии твердой примеси, оценивается влияние как различных подходов в моделировании, так и параметров дисперсных сред. В монографии [1] разработана методика получения точных решений уравнений в частных производных, описывающих различные процессы, в том числе процессы диффузии, также в монографии приведены некоторые частные решения уравнений. В статье [2] предложен метод оценки количества оседающей полидисперсной взвеси в отделах дыхательного тракта человека при использовании средств индивидуальной защиты органов дыхания. Работы [3–5] посвящены теоретическому исследованию массопереноса в неоднородных средах. В статье [6] моделируются процессы нестационарной сорбции, часто встречающиеся в процессах химического анализа почв, илов и донных отложений. В монографии [7] рассматриваются нестационарные процессы в различных неоднородных средах, разработаны модели динамики различных взвесей в газобразной среде. В работе [8] рассматривается влияние изменения гидрологического и гидрохимического режимов под действием антропогенных факторов на сообщества водных организмов. В исследовании [9] описывается ущерб водным биологическим ресурсам Краснодарского водохранилища от проведения работ по добыче песка на месторождении «Пишшское» в 2017 г. Рассчитан общий вред, наносимый водным биоресурсам Краснодарского водохранилища при осуществлении добычи песка. Публикация [10] посвящена расчету размера ущерба водным биоресурсам от эксплуатации каскада ГЭС на горных реках. Статья [11] посвящена исследованию влияния параметров частиц на скорости их седиментации. В публикации [12] предложена методика расчета скорости осаждения частиц в водной среде для моделирования динамики концентрации взвешенных веществ на примере проведения дноуглубительных работ. В публикации [13] получены аналитические выражения для двумерного и одномерного процессов диффузии примеси в движущемся потоке для стационарного приближения. Предложена модель горизонтального рассеивания загрязняющих веществ и методика расчета скорости осаждения частиц, в основу которой положены теоретические и эмпирические формулы. В исследовании [14] изучается влияние геометрии речного русла на процесс рассеяния примесей. В статье [15] с помощью метода конечных разностей разработана численная модель стационарной двумерной диффузии. В работе [16] численно моделируется

распространение мутности при дноуглублении. Публикация [17] посвящена разработке методики расчета диффузионных процессов в гидрологических объектах, представлены коэффициенты шероховатости дна различных проточных водоёмов. В монографии [18] изложены теоретические вопросы движения водного потока в естественных руслах, представлены основы теории моделирования гидравлических процессов, связанных с использованием водных ресурсов в лесном комплексе. В монографии [19] представлены теоретические основы и методики расчета концентрации веществ, взвешенных и растворенных в водоёмах. Работа [20] посвящена разработке методологии теоретического исследования процессов диффузии взвесей при дноуглубительных работах. В данной работе на основе математической модели двумерной стационарной диффузии получено решение уравнений диффузии, с помощью которого исследуется влияние параметров математической модели на результаты расчетов конвективной диффузии. Рассматривались различные формулы скорости седиментации частиц, различные коэффициенты турбулентной диффузии, сопоставлялись расчеты математической модели с учетом и без учета влияния осаждения частиц.

**Математическая модель.** Уравнение трехмерной нестационарной диффузии (1) имеет вид [1; 15]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + w \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_x \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D_z \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \frac{q}{H}. \quad (1)$$

Здесь  $C$  – концентрация;  $t$  – переменная времени;  $x, y, z$  – пространственные координаты;  $q$  – расход массы;  $u, v, w$  – скорости потока в пространственных направлениях  $x, y, z$  соответственно;  $D_x, D_y, D_z$  – коэффициенты диффузии для соответствующих пространственных направлений. В данной работе водоток предполагается прямолинейным, постоянной глубины  $H$ , со средней (по расходу) продольной скоростью  $U = \text{const}$ , поперечная и вертикальная осредненные скорости водотока считают равными нулю. Ось  $Ox$  направим вдоль берега в сторону течения, ось  $Oy$  – поперек потока, ось  $Oz$  – вертикально вверх. Рассматривается малоинерционная примесь, у которой  $u = U, v = 0, w = W$ , где  $W$  – скорость установившегося осаждения частиц. В предположении установившегося характера процесса – отсутствия зависимости концентрации от времени, а также в предположении отсутствия диффузии в продольном и вертикальном направлениях уравнение диффузии будет иметь вид [15]

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) - \frac{q}{H}. \quad (2)$$

Если пренебречь турбулентными пульсациями вертикальной составляющей скорости, то расход осаждения  $k$ -й фракции многофракционной примеси можно рассчитать по формуле [15]:

$$q_k = (C - C_b) \cdot W_k. \quad (3)$$

Распределение средних значений концентрации  $k$ -й фракции примеси на вертикали  $c_k(x, y)$  при указанных условиях описывается дифференциальным уравнением в частных производных:

$$U \frac{\partial C_k}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D_y \frac{\partial C_k}{\partial y} \right) - \frac{(C_k - C_b) \cdot W_k}{H}. \quad (4)$$

Здесь  $C_k$  – концентрация  $k$ -й фракции,  $C_b$  – фоновая концентрация,  $q_k$  – расход осаждения  $k$ -й фракции примеси. В случае если фоновая концентрация равна нулю, уравнение (4) при всех прочих допущениях может иметь вид (5):

$$U \frac{\partial C_k}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C_k}{\partial y^2} - C_k \frac{W_k}{H}. \quad (5)$$

Направление вертикального движения взвеси связано с её гравитационной седиментацией [20]. На процесс осаждения частиц взвеси оказывают влияние размер частиц и их геометрическая форма, скорость течения жидкости и такой физический параметр жидкости, как её вязкость, зависящая от в общем случае как от температуры жидкости, так и от её химического состава в случае, если жидкость не является химически однородной, при этом химически однородные среды не свойственны естественной природе [7]. В данной работе расчёт скорости осаждения был произведен по двум различным формулам, приведенным в статье [12]. Формула (6) учитывает вязкость жидкости:

$$W = \frac{g \cdot d^2}{18 \cdot \nu} \cdot \left( \frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right), \quad (6)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\rho_s$  – плотность частицы,  $\rho$  – плотность жидкости,  $d$  – диаметр частиц,  $\nu$  – кинематическая вязкость воды. В формуле (7) не учитывается кинематическая вязкость жидкости:

$$W = \sqrt{\frac{4gd\rho_s}{3C_R\rho}}, \quad (7)$$

где  $C_R$  – коэффициент сопротивления (для шарообразной частицы  $C_R \approx 0,45$ ). Турбулентная диффузия – параметр, определяющий интенсив-

ность распространения взвеси из одних частей водного потока в другие. Согласно действующей методике разработки нормативов допустимых сбросов загрязняющих веществ в водные объекты для водопользователей [17], коэффициент турбулентной диффузии для летнего времени рассчитывается по формуле

$$D = \frac{gUH}{31n_R C_C^2} \quad (8)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения, м / с;  $U$  – скорость течения реки, м/с;  $H$  – глубина реки, м;  $n_R$  – коэффициент шероховатости ложа реки, определяемый по справочным данным [18],  $C_C$  – коэффициент, определяемый по формуле

$$C_C = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n_R} - \frac{\sqrt{g}}{0,13} (1 - \log R) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{1}{n_R} - \sqrt{\frac{g}{0,13} \left( \frac{1}{n_R} + \sqrt{g \log R} \right)} \right)^2} \right], \quad (9)$$

где  $R$  – гидравлический радиус потока, м,  $R \approx H$ . В статье [14] применена формула расчета эффективного коэффициента диффузии, учитывающая конвективный перенос взвешенных частиц:

$$D = 0,15 \frac{UH \sqrt{g}}{C_C}. \quad (10)$$

Формула коэффициента диффузии, учитывающая извилистость реки, существенную ширину русла (здесь  $L$  – ширина реки) выведенная из анализа эмпирических данных [19] на основе формул из статьи [15] имеет вид [15; 20]

$$D = 3,65 \cdot 10^{-3} UH \sqrt{\frac{L}{H}}. \quad (11)$$

Формула коэффициента турбулентной диффузии [19], учитывающая дополнительный коэффициент  $M$ , зависящий от величины коэффициента  $C_C$  (9), записывается как:

$$D = \frac{gHU}{MC_C}. \quad (12)$$

При условии  $10 < C_C < 60$  параметр  $M = 0,7C_C + 6$ , при  $C_C \geq 60$  коэффициент  $M = 48 = \text{const}$ . Решение отыскивается в виде

$$C_k(x, y) = \begin{cases} f_{k0} e^{-\alpha_k x + \alpha_k (y - y_s)} = f_{k0} e^{-\alpha_k y_s} e^{-\alpha_k x + \alpha_k y}, & y \leq y_s, \\ f_{k0} e^{-\alpha_k x - \alpha_k (y - y_s)} = f_{k0} e^{\alpha_k y_s} e^{-\alpha_k x - \alpha_k y}, & y > y_s \end{cases}, \quad (13)$$

где величина  $\alpha_k > 0$ . При подстановке в уравнение (5) функции (13), вынеся множитель, получаем выражение относительно коэффициента  $\alpha_k$ :

$$\frac{D}{U} \alpha_k^2 + \alpha_k - \frac{W_k}{HU} = 0. \quad (14)$$

Решением квадратичного уравнения (14) для положительной величины  $\alpha_k$  является выражение (15):

$$\alpha_k = \frac{U}{2D} \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{4DW_k}{HU^2}} \right). \quad (15)$$

**Результаты расчетов.** По приведенным формулам был проведен расчет коэффициента турбулентной диффузии при следующих значениях параметров:  $n_r = 0,033$ ,  $U = 0,41$  м/с,  $H = 20$  м,  $L = 200$  м. Плотности несущей среды и дисперсной примеси соответственно  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_s = 2500$  кг/м<sup>3</sup>. Начальная концентрация в источнике  $f_{k0} = 10^{-3}$  кг/м<sup>3</sup>. На рис. 1 изображена общая схема течения. Поперечное распределение концентрации частиц каждой из фракций представлено на рис. 2.

Результаты расчетов демонстрируют, что в продольном направлении происходит постепенное уменьшение концентрации частиц – рис. 3. Недостатком решения (13) совокупности уравнений, описывающей диффузию полидисперсной взвеси (5), является то, что процесс диффузии происходит одинаково в обоих пространственных направлениях.

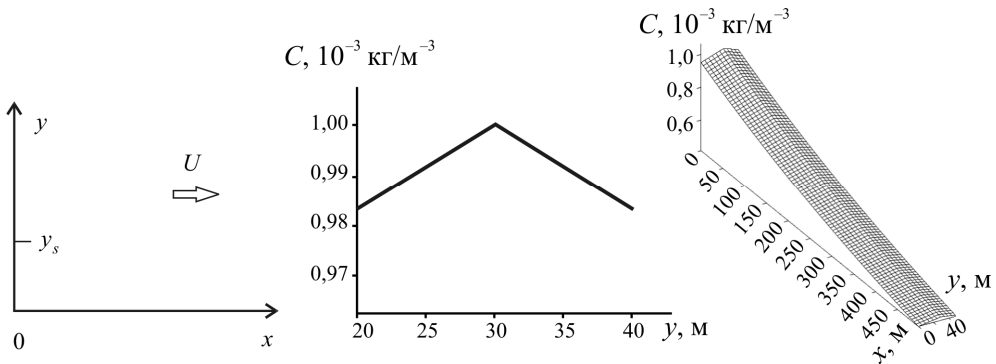


Рис. 1. Схематическое изображение течения

Рис. 2. Поперечное распределение начальной концентрации дисперсной примеси

Рис. 3. Пространственное распределение концентрации одной из фракций примеси

Сопоставление различных методик расчета скоростей седиментации демонстрирует, что для мелкодисперсных частиц влияние выбора формулы скорости осаждения не столь существенно, как для крупнодисперсных частиц – рис. 4, 5.

Для различных коэффициентов турбулентной диффузии (рис. 6) результаты расчетов наиболее близки для формул (9) – кривая 1 и (12) – кривая 2, меньшее значение концентрации наблюдается для коэффициента турбулентной диффузии (10) – кривая 3, наиболее интенсивное убывание концентрации по длине водотока наблюдается для коэффициента турбулентной диффузии (11) – кривая 4. Сопоставление расчетов по математическим моделям с учетом (13) и без учета осаждения частиц (16) [1] демонстрирует, что при учете осаждения частиц величина рассчитанной концентрации частиц убывает интенсивнее – рис. 7.

$$C(x,y) = f_{k0} e^{-\frac{D\pi^2}{4UL^2}x} \cos\left(\frac{\pi}{2L}y\right). \quad (16)$$

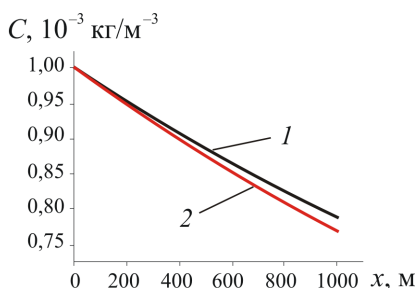


Рис. 4. Сопоставление продольных распределений концентрации частиц мелкодисперсной фракции для различных методик вычисления скоростей осаждения частиц ( $d = 0,1$  мм). Формула (8) – кривая 1 и формула (7) – кривая 2

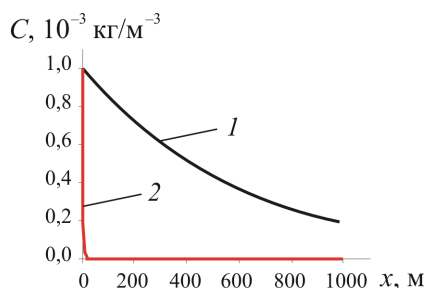


Рис. 5. Сопоставление продольных распределений концентрации частиц мелкодисперсной фракции для различных методик вычисления скоростей осаждения частиц ( $d = 4$  мм). Формула (8) – кривая 1 и формула (7) – кривая 2

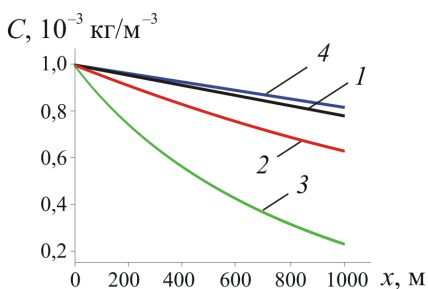


Рис. 6. Сопоставление продольных распределений концентрации частиц для различных методик вычисления коэффициента турбулентной диффузии

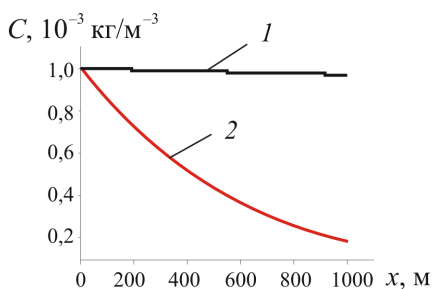


Рис. 7. Сопоставление продольных распределений концентрации частиц для математической модели, учитывающей осаждение частиц, – кривая 2 и однородного уравнения диффузии, не учитывающего осаждение частиц [1], – кривая 1 для фракции крупнодисперсных частиц,  $d = 4$  мм

**Выводы.** В работе представлена двухмерная стационарная математическая модель диффузии многофракционной твердой примеси в движущемся потоке. Для совокупности уравнений математической модели получено точное решение, реализованное в виде компьютерной программы. Сопоставлены результаты расчетов с различными формулами скорости осаждения частиц, определено, что для крупнодисперсных частиц выбор формулы скорости седиментации имеет большее влияние на результаты расчетов распространения примеси в водотоке. Проведены расчеты диффузии для различных коэффициентов турбулентной диффузии. Проведено сравнение расчетов диффузии для математических моделей с учетом и без учета осаждения частиц, выявлено влияние учета осаждения частиц на результаты расчетов.

#### Библиографический список

1. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
2. Осаждение мелкодисперсных пылевых частиц в дыхательном тракте с использованием средств индивидуальной защиты / Мухаметзанов И.Т., Зарипов Ш.Х., Фатхутдинова Л.М., Гриншпун С.А. // Медицина труда и промышленная экология. – 2017. – № 7. – С. 56–60.
3. Тукмаков А.Л. Распределение твердых частиц в акустическом поле резонансной трубы при различных режимах возбуждения колебаний // Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – № 2. – С. 219–227.
4. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially non-uniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state // High Temperature. – 2017. – № 4. – P. 491–495.
5. Тукмаков Д.А. Численная модель течения аэрозоля, обусловленного взаимодействием частиц и газа // Сложные системы. – 2021. – № 1. – С. 64–71.
6. Тукмаков Д.А. Математическая модель нестационарной сорбции в двухфазной среде, учитывающая пространственную неравномерность распределения концентрации микрокомпонента в фазе сорбента // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Химия. – 2019. – № 4. – С. 24–35.
7. Кутушев А.Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. – СПб.: Недра, 2003. – 284 с.
8. Заделенов В.А., Трофимова М.А., Космаков И.В. Основные виды техногенного воздействия на водные биоресурсы при освоении минерально-сырьевой базы // Вестник Томского государственного университета. – 2001. – № 274. – С. 133–135.
9. Денисенко О.С. Воздействие на основные компоненты биоты Краснодарского водохранилища добычи песка в границах месторождения строительных песков «Пишское» // Научное обозрение. – 2018. – № 6. – С. 15–19.
10. Григорян О.П., Магомедова М.Р. Имитационное математическое моделирование распространения взвешенных частиц для определения зон повышенной мутности при оценке ущерба водным биологическим ресурсам реки Черек // Вестник Дагестанского государственного технического университета. – 2016. – № 3. – С. 92–100.
11. Dietrich W.E. Settling Velocity of Natural Particles // Water Resources Research. – 1982. – № 6. – P. 1615–1626.
12. Студёнов И.И., Шилова Н.А. Расчет гидравлической крупности взвеси при моделировании динамики концентрации взвешенных веществ в приустьевых районах арктических морей на примере Белого моря // Научные исследования в Арктике. – 2015. – № 3. – С. 40–47.
13. Премахова Е.В. Моделирование распределения мутности воды вдоль участков рек ниже техногенных источников поступления взвешенных наносов // Эрозионные, русловые и устьевые процессы (исследования молодых ученых университетов): сб. ст. по материалам XI Семинара молодых ученых вузов, объединяемых советом по проблеме эрозионных, русловых и устьевых процессов. – Нижний Новгород, 2016. – С. 197–203.



14. Вольнов М.А. Влияние плановой геометрии речного русла на диффузию и дисперсию примеси // *Фундаментальные исследования*. – 2013. – № 6. – С. 535–540.

15. Наумов В.А. Математическое моделирование распространения взвешенных примесей от точечного источника и их осаждения в водотоке // *Известия Калининградского государственного технического университета*. – 2017. – № 44. – С. 46–58.

16. Альхименко А.И., Загрядская Н.Н., Калинин С.Г. Численное моделирование распространения взвесей при дноуглублении // *Ученые записки Российского государственного гидрометеорологического университета*. – 2014. – № 35. – С. 186–204.

17. Порядок проведения расчета условных фоновых концентраций химических веществ в воде водных объектов для установления нормативов допустимых сбросов сточных вод. – URL: <http://www.pfo.meteorf.ru/assets/files/56/52.24.622-2019.pdf> (дата обращения: 10.12.2021).

18. Корпачев В.П. Теоретические основы водного транспорта леса: учеб. пособие. – М., 2009. – URL: <https://monographies.ru/ru/book/view?id=52> (дата обращения: 10.12.2021).

19. Караушев А.В. Методические основы оценки антропогенного влияния на качество поверхностных вод. – Л.: Гидрометеоздат, 1981. – 176 с.

20. Аллагулова Е.Э. Расчет концентрации речной взвеси от дноуглубительных работ: выпускная квалификационная работа. – Казань, 2021. – 67 с.

### References

1. Polyanin A.D. *Spravochnik po linejnym uravneniyam matematicheskoj fiziki*. [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2001. 576 p.

2. Muhametzanov I.T., Zaripov SH.H., Fathutdinova L.M., Grinshpun S.A. Osazhdenie melkodiespersnyh pylevyh chastic v dyhatel'nom trakte s ispol'zovaniem sredstv individual'noj zashchity [Deposition of fine dust particles in the respiratory tract using personal protective equipment]. *Medicina truda i promyshlennaya ekologiya*, 2017, no 7, pp. 56-60.

3. Tukmakov A.L. Raspreделение tverdyh chastic v akusticheskom pole rezonansnoj trubyy pri razlichnyh rezhimakh vozbuzhdeniya kolebanij [Distribution of solid particles in the acoustic field of a resonant tube under different modes of oscillation excitation]. *Teplofizika i aeromekhanika*, 2005, no 2, pp. 219-227.

4. Tukmakov A.L., Tukmakov D.A. Dynamics of a charged gas suspension with an initial spatially nonuniform distribution of the average dispersed phase density during the transition to the equilibrium state. *High Temperature*, 2017, no 4, pp. 491-495.

5. Tukmakov D.A. Chislennaya model' techeniya aerozolya, obuslovlennogo vzaimodejstviem chastic i gaza [Numerical model of aerosol flow due to the interaction of particles and gas] *Slozhnye sistemy*, 2021, no 1, pp. 64-71.

6. Tukmakov D.A. Matematicheskaya model' nestacionarnoj sorbcii v dvuhfaznoj srede, uchityvayushchaya prostranstvennyuyu neravnomernost' raspredeleniya koncentracii mikrokomponenta v faze sorbenta [Mathematical model of non-stationary sorption in a two-phase medium, taking into account the spatial unevenness of the distribution of the concentration of the microcomponent in the sorbent phase] *Vestnik Tverskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Himiya*, 2019, no 4, pp. 24-35.

7. Kutushev A.G. Matematicheskoe modelirovanie volnovykh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah [Mathematical modeling of wave processes in aerodisperse and powder media]. Saint Petersburg: Nedra, 2003. 284 p.

8. Zadelenov V.A. Trofimova M.A., Kosmakov I.V. Osnovnye vidy tekhnogenno go vozdeystviya na vodnye bioresursy pri osvoenii mneral'no-syr'evoy bazy [The main types of technogenic impact on aquatic bioresources during the development of the raw material base] *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2001, no. 274, pp.133-135

9. Denisenko O.S. Vozdeystvie na osnovnye komponenty bioty Krasnodarskogo vodohranilishcha dobychi peska v granicah mestorozhdeniya stroitel'nyh peskov «Pshishskoe» [Impact on the main components of the biota of the Krasnodar reservoir of sand mining within the boundaries of the construction sand deposit "Pshishskoye"] *Nauchnoe obozrenie*, 2018, no 6, pp.15–19.

10. Grigoryan O.P., Magomedova M.R. Imitacionnoe matematicheskoe modelirovanie raspredeleniya vzveshennyh chastic dlya opredeleniya zon povyshennoj mutnosti pri ocenke ushcherba vodnym biologicheskim resursam reki Cherek [Simulation mathematical modeling of the distribution of suspended particles to determine areas of increased turbidity in assessing damage to water biological resources of the Cherek River]. *Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, 2016, no 3, pp.92–100.

11. Dietrich W.E. Settling Velocity of Natural Particles. *Water Resources Research*, 1982, no. 6, pp. 1615–1626.
12. Studyonov I.I., N.A. Shilova Raschet gidravlicheskoj krupnosti vzvesi pri modelirovanii dinamiki koncentracii vzveshennyh veshchestv v priust'evykh rajonah arkticheskikh morej na primere Belogo moray [Calculation of suspension hydraulic fineness in modeling the dynamics of suspended matter concentration in the mouth areas of the Arctic seas on the example of the White Sea]. *Nauchnye issledovaniya v Arktike*, 2015, no 3, pp.40–47.
13. Promahova E.V. Modelirovanie raspredeleniya mutnosti vody vdol' uchastkov rek nizhe tekhnogennyh istochnikov postupleniya vzveshennyh nanosov [Modeling the distribution of water turbidity along river sections downstream of technogenic sources of suspended sediments]. *Erosion, channel and estuarine processes. Nizhny Novgorod*, 2016. pp.197–203.
14. Volynov M. A. Vliyanie planovoj geometrii rechnogo rusla na diffuziyu i dispersiyu primesi [Influence of the planned geometry of the river channel on the diffusion and dispersion of impurities]. *Fundamental'nye issledovaniya*, 2013, no 6, pp. 535-540.
15. Naumov V. A. Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vzveshennyh primesej ot tochechnogo istochnika i ih osazhdeniya v vodotoke [Mathematical modeling of the distribution of suspended impurities from a point source and their deposition in a watercourse]. *Izvestiya KGTU*, 2017, no 44, pp.46–58.
16. Al'himenko A.I., Zagryadskaya N.N., Kalinin S.G. CHislennoe modelirovanie rasprostraneniya vzvesej pri dnouglublennii [Numerical modeling of the distribution of suspensions during dredging]. *Uchenye zapiski Rossijskogo gosudarstvennogo gidrometeorologicheskogo universiteta*, 2014, no 35, pp. 186-204.
17. Poryadok provedeniya rascheta uslovyh fonovyh koncentracij himicheskikh veshchestv v vode vodnyh ob'ektov dlya ustanovleniya normativov dopustimyh sbrosov stochnykh vod [The procedure for calculating the conditional background concentrations of chemicals in the water of water bodies to establish the standards for permissible wastewater discharges]. available at: <http://www.pfo.meteorf.ru/assets/files/56/52.24.622-2019.pdf> (accessed: 10.12.2021).
18. Korpachev V.P. Teoreticheskie osnovy vodnogo transporta lesa [Theoretical foundations of water transport of the forest: monograph]. Moscow, 2009. available at: <https://monographies.ru/ru/book/view?id=52> (accessed: 10.12.2021).
19. Karashev A.V. Metodicheskie osnovy ocenki antropogennogo vliyaniya na kachestvo poverhnostnykh vod [Methodological bases for assessing the anthropogenic influence on the quality of surface waters: monograph]. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1981. 176 p.
20. Allagulova E.E. Raschet koncentracii rechnoj vzvesi ot dnouglubitel'nykh rabot: vypusknaya kvalifikacionnaya rabota [Calculation of the concentration of river suspension from dredging: final qualifying work]. Bachelors thesis. Kazan, 2021. 67 p.

## D. Tukmakov

### STUDY OF WATERCOURSE POLLUTION WITH SUSPENSION USING A STATIONARY TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL

The paper presents a mathematical model of convective diffusion of a dispersed suspension in a flowing reservoir, which takes into account the sedimentation of particles. The need to study and model the flows of dispersed media is associated with the environmental problems of deepening the riverbeds. Natural conditions in reservoirs are adversely affected as a result of dredging. The extraction of sand and gravel mixtures in riverbeds leads to pollution of watercourses with suspended solids, which has a negative impact on aquatic ecosystems. The food bases of fish, their spawning grounds are deteriorated as a result of the removal of sand and gravel mixtures from river beds. Hydrobionts are affected by a multiple increase in turbidity, secondary pollution with heavy metals, the content of which may exceed the maximum allowable concentration for water bodies. In this study, various methods of mathematical modeling of the dynamics of solid suspensions in a moving water flow are examined and compared. The

equations of a two-dimensional stationary mathematical model are derived from the equation of convective diffusion in a three-dimensional non-stationary form. The set of diffusion equations for each fraction forms a mathematical model of diffusion of a multifractional solid impurity, taking into account different sedimentation rates of fractions. An exact solution is obtained for the equations of the mathematical model of diffusion of several fractions of particles. With the help of the obtained solution, studies of the influence of the parameters of the simulated process on the diffusion of a solid impurity in a flowing reservoir were carried out. The paper compares the results of different approaches in calculating the rate of sedimentation on the process of diffusion of solid impurities in a moving stream. Various methods for calculating the turbulent diffusion coefficient were also considered. The revealed regularities can be used for environmental optimization of hydrotechnical works.

**Keywords:** environmental pollution, diffusion equation, mathematical modeling, particles sedimentation.

**Тукмаков Дмитрий Алексеевич** (Казань, Россия) – кандидат физико-математических наук, Казанский научный центр Российской академии наук (420111, г. Казань, ул. Лобачевского, д. 2/31, e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru).

**Dmitry Tukmakov** (Kazan, Russian Federation) – candidate of physical and mathematical sciences, Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (420111, Kazan, Lobachevsky st., 2/31, e-mail: tukmakovda@imm.knc.ru).

**Финансирование.** Работа выполнялась в рамках государственного задания Федерально-го исследовательского центра Казанского научного центра Российской академии наук.

**Конфликт интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Поступила: 01.02.2022

Одобрена: 16.02.2022

Принята к публикации: 04.03.2022

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом: Тукмаков, Д.А. Исследование загрязнения водотока взвесью с помощью стационарной двухмерной математической модели / Д.А. Тукмаков // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная экология. Урбанистика. – 2022. – № 1. – С. 88–98. DOI: 10.15593/2409-5125/2022.1.08

Please cite this article in English as: Tukmakov D. Study of watercourse pollution with suspension using a stationary two-dimensional mathematical model. *PNRPU Bulletin. Applied ecology. Urban development*, 2022, no. 1, pp. 88-98. DOI: 10.15593/2409-5125/2022.1.08