

ПРОЦЕССЫ И АППАРАТЫ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

DOI: 10.15593/2224-9400/2021.4.09

УДК 66.023.2

**Л.Ю. Александрова, Л.Н. Рубцова, А.И. Мошинский,
П.Г. Ганин, А.В. Маркова, В.В. Сорокин**

Санкт-Петербургский государственный химико-фармацевтический
университет, Санкт-Петербург, Россия

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ КАСКАДА ХИМИЧЕСКИХ РЕАКТОРОВ В СТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ

Проблемы оптимизации являются важнейшими для функционирования технологических схем химической технологии и биотехнологий. Нередко именно цели оптимального управления процессами являются главными в постановке задач исследования. Известен широкий набор методов оптимизации различных проблем естествознания (метод множителей Лагранжа, вариационное исчисление, динамическое программирование, принцип максимума Понтрягина и др.). Однако в ряде примеров использование некоторых из перечисленных методов требует кропотливой, сложной работы, что может приводить к ошибкам и неверным выводам. Поэтому целесообразно при возможности проводить исследование как можно более простыми методами, когда выводы о правильности нахождения оптимума являются легко проверяемыми.

В данной работе показано, что в ряде задач весьма эффективным является метод, основанный на классическом неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим набора неотрицательных величин. Рассмотрены каскады химических реакторов, в которых протекает реакция первого порядка. В качестве критерия оптимальности выбраны случаи: максимальной степени превращения в каскаде при фиксированном суммарном объеме реактора; минимального суммарного объема аппаратов каскада при заданной степени превращения. В частности рассмотрены случаи, когда константы скорости реакции различны в каждом аппарате каскада. Отмечены случаи, когда использование классического неравенства заметно проще, чем применение более сложных методов, зачастую затрудняющие получение исчерпывающего решения задачи, как это имеет место в некоторых литературных источниках. Подробно рассмотрен пример двух реакторов при протекании в них реакции второго порядка. В этом варианте выяснено, что при оптимальной организации процесса объемы химических реакторов каскада не обязательно должны быть одинаковыми.

Ключевые слова: реактор, степень превращения, среднее арифметическое, оптимизация.

**L.Yu. Alexandrova, L.N. Rubtsova, A.I. Moshinsky,
P.G. Ganin, A.V. Markova, V.V. Sorokin**

Saint Petersburg State Chemical Pharmaceutical
University, Saint Petersburg, Russian Federation

SOME ISSUES OF OPTIMIZING THE CASCADE OF CHEMICAL REACTORS IN STATIONARY MODE

Optimization problems are essential for the functioning of technological schemes of chemical technology and biotechnology. It is not uncommon that the goals of optimal process control are the main ones in the formulation of research tasks. A wide range of optimization methods for various problems of natural science is known (the Lagrange multiplier method, calculus of variations, dynamic programming, Pontryagin's maximum principle, and others). However, in a number of examples, the use of some of the listed methods requires painstaking, complex work, which can lead to errors and incorrect conclusions. Therefore, it is advisable, if possible, to conduct research using as simple methods as possible, when conclusions about the correctness of finding the optimum are easily verifiable.

In this paper, it is shown that in a number of problems a method based on the classical inequality between the arithmetic mean and the geometric mean of a set of non-negative quantities is very effective. Cascades of chemical reactors in which a first-order reaction takes place are considered. Cases 1) were chosen as an optimality criterion. The maximum degree of conversion in the cascade at a fixed total volume of the reactor and 2) the minimum total volume of the apparatus of the cascade at a given degree of conversion. In particular, the cases were analyzed when the reaction rate constants are different in each apparatus of the cascade. Cases are noted when the use of the classical inequality is noticeably easier than the use of more complex methods, which often complicate the obtaining of an exhaustive solution to the problem, as is the case in some literary sources.

An example of two reactors with a second-order reaction proceeding in them is considered in detail. In this version, it was found that with the optimal organization of the process, the volumes of the chemical reactors of the cascade do not have to be the same.

Keywords: reactor, degree, transformation, average arithmetic, optimization.

В ряде ситуаций для химических реакций n -го порядка (и др.) проточный реактор идеального вытеснения (ИВ) более эффективен, чем проточный реактор идеального перемешивания (ИП). Также известно, что каскад одинаковых реакторов ИП в предельном варианте, когда число реакторов стремится к бесконечности, по своим характеристикам совпадает с характеристиками одного реактора ИВ. Это основная причина использования каскада реакторов ИП. Как правило, рассматривают каскады реакторов одинакового объема. При разных объемах реакторов нередко используют различные графические методы, впрочем, как и для одинаковых реакторов в каскаде [1–5].

При стационарных условиях концентрация целевого вещества C на выходе из реактора ИП подчиняется уравнению [6, 7]

$$C_{\text{вх}} - C = k\vartheta C^n, \quad \vartheta = G/V, \quad (1)$$

где $C_{\text{вх}}$ – концентрация на входе в аппарат; k – константа при скорости реакции n -го порядка kC^n ; G – объемный расход; V – объем реактора. Следовательно, ϑ можно назвать характерным временем переноса вещества через реактор (среднее время пребывания частиц в реакторе).

Для ряда задач оптимизации химической технологии удобно использовать простой метод, основанный на классическом неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим неотрицательных величин. В частности это следует из классического неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического неотрицательных величин

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}. \quad (2)$$

Вывод этого неравенства имеется, в частности, в монографиях [8, 9]. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда все величины a_j одинаковы.

Рассмотрим первый случай: последовательное соединение N реакторов идеального перемешивания, в которых протекает реакция первого порядка при стационарном режиме.

Степень превращения $X = 1 - C_{\text{вых}}/C_{\text{вх}}$ будет тем больше, чем больше отношение $C_{\text{вх}}/C_{\text{вых}}$, поэтому можно взять за основу анализа данную величину. Для одного реактора в стационарном режиме это отношение вытекает из безразмерного соотношения (1) при $n = 1$:

$$\frac{C_{\text{вх}}}{C_{\text{вых}}} = 1 + k\vartheta, \quad \vartheta = \frac{V}{G}, \quad (3)$$

здесь $C_{\text{вых}}$ – стационарное значение выходной концентрации.

Рассмотрим систему N последовательно соединенных реакторов (рис. 1) идеального перемешивания с суммарным объемом V , т.е.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_N.$$

Это соотношение после деления на постоянную для всех реакторов величину G приводит к выражению

$$\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \dots + \vartheta_N.$$

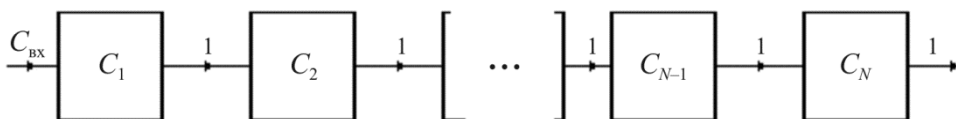


Рис. 1. Схема ячеечной модели

Поскольку выходная концентрация некоторого (промежуточного) реактора будет входной концентрацией для следующего реактора, из зависимости (3) следует выражение для каскада из N реакторов:

$$\frac{C_{\text{вх}}}{C_{\text{вых},N}} = \prod_{j=1}^N (1 + k\vartheta_j). \quad (4)$$

Для суммы сомножителей получаем

$$\sum_{j=1}^N (1 + k\vartheta_j) = N + k \sum_{j=1}^N \vartheta_j = N + k\vartheta = \text{const.}$$

Поэтому из неравенства (2) следует, что величина $C_{\text{вх}}/C_{\text{вых}}$ (4) будет максимальной, когда все ϑ_j (а значит, и объемы всех реакторов) будут одинаковы.

Этот вывод относится к варианту, когда $k = \text{const}(j)$. Если же в каждом реакторе свое значение k (например, из-за разной температуры), то для обеспечения максимальной степени превращения необходимо разбить общий объем реакторов следующим образом:

$$V_j = G \left(\frac{\vartheta}{N} + \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_j} \right), \quad (5)$$

где k_j – значение константы скорости реакции в j -м реакторе.

Вывод формулы (5) удобно провести при помощи метода, использующего множителя Лагранжа [10–13]. Формулу (4) следует переписать так

$$\frac{C_{\text{вх}}}{C_{\text{вых},N}} = \prod_{j=1}^N (1 + k_j \vartheta_j). \quad (6)$$

Фактически в сомножителях формулы (4) следует выполнить замену $k \rightarrow k_j$. Будем искать максимум функции $\Phi = \ln(C_{\text{вх}}/C_{\text{вых}})$ при ограничении

$$\sum_{j=1}^N \vartheta_j = \vartheta = \text{const.}$$

Введем функцию Лагранжа (λ – множитель Лагранжа)

$$L = \Phi - \lambda \vartheta = \sum_{j=1}^N (1 + k_j \vartheta_j) - \lambda \sum_{j=1}^N \vartheta_j, \quad (7)$$

где $\Phi = \ln(C_{\text{вх}}/C_{\text{вых},N})$, т.е. логарифм соотношения (6).

Условию экстремума (согласно правилу Лагранжа) соответствуют N равенств вида

$$\frac{dL}{d\vartheta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

имеем равенства $\frac{k_j}{(1 - k_j \vartheta_j)} = \lambda$, $j = 1, 2, \dots, N$. Отсюда находим

$$\vartheta_j = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{k_j}. \quad (8)$$

Просуммировав все равенства (8), получим

$$\sum_{j=1}^N \vartheta_j = \vartheta = \frac{N}{\lambda} - \sum_{j=1}^N \frac{1}{k_j}, \quad (9)$$

т.е. мы фактически определим множитель Лагранжа λ . Подставляя λ из (9) в соотношение (8), приходим к зависимости (5).

Из физических соображений вытекает, что все $V_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$). Будем считать, что эти условия выполнены для всех j , иначе придется анализировать, кроме внутренних точек области задачу на границах области: $V_j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, N$), подобные задачи мы здесь не рассматриваем. Заметим только, что это в нашем случае связано с исключением из каскада некоторых из N аппаратов. Очевидно, что при $k = \text{const}(j)$ соотношение (5) дает одинаковые значения для объемов всех реакторов, равное V/N .

Рассмотрим теперь проблему, когда задана степень превращения в каскаде из N реакторов при $k_j = k = \text{const}$ и требуется подобрать объемы реакторов, обеспечивающие минимальный общий объем, т.е.

$$\vartheta = \sum_{j=1}^N \vartheta_j \rightarrow \min, \quad \vartheta_j = \frac{V_j}{G}. \quad (10)$$

При этом выполняется ограничение

$$\frac{C_{\text{вх}}}{C_{\text{вых},N}} = \prod_{j=1}^N (1 + k\vartheta_j) = A = \text{const}. \quad (11)$$

Из неравенства (2) следует, что при совпадении всех множителей $(1 + k\vartheta_j)$ в отношении (11), сумма этих величин будет минимальная, т.е.

$$\sum_{j=1}^N (1 + k\vartheta_j) = N + k \sum_{j=1}^N \vartheta_j \rightarrow \min.$$

Отсюда следует, что выражение (10) также будет минимально, т.е. это выполняется при $\vartheta_j = \vartheta^* = \text{const}$. Тогда из зависимости (11) найдем время переноса (а значит, и объем каждого реактора) в виде

$$\vartheta_j = \frac{A^{\frac{1}{N}} - 1}{k}.$$

А общее время переноса в реакторах каскада получается умножением этой величины на N , т.е.

$$\vartheta_{\min} = \frac{N}{k} \left(A^{\frac{1}{N}} - 1 \right). \quad (12)$$

Рассмотренный пример показывает эффективность применения классического неравенства (2). Следует заметить, что эту задачу решали в работе [6, с. 217] методом динамического программирования. При этом выкладки заняли 3 страницы, а окончательный результат так и не был получен (указан путь его достижения).

Также динамическое программирование было применено в работе [6, с. 220] к расчету распределения давления по ступеням компрессора, исходя из условий минимума энергии, затрачиваемой на полезное сжатие газа при наличии пяти ступеней и известных давлениях в первой и последней (пятой) ступенях компрессора. Для трех ступеней данная задача была решена в работе [13, с. 143] обычными методами дифференциально-

го исчисления и сделан общий вывод о любом числе компрессоров. Преимущество изложенного выше метода для решения отмеченной задачи было продемонстрировано в учебном пособии [14, с. 132].

Второй случай: каскад из двух последовательных реакторов идеального перемешивания, в которых проходит реакция второго порядка.

В работе [15, с. 144] приведены графические данные для ячеечных моделей конечного числа одинаковых ячеек, когда протекают реакции 1-го и 2-го порядков в аппарате.

Отметим, что максимальное значение степени превращения в общем случае не обязательно реализуется при равных объемах всех аппаратов. Покажем это в случае двух реакторов, соединенных последовательно, в которых протекает реакция второго порядка. Будем считать, что коэффициенты скорости реакции k не обязательно совпадают. Стационарные уравнения процесса имеют вид

$$\begin{aligned} C_{\text{вх}} - C_1 &= k_1 \vartheta_1 C_1^2, \quad C_1 - C_2 = k_2 \vartheta_2 C_2^2, \\ C_2 &= C_{\text{вых}}, \quad \vartheta_1 + \vartheta_2 = \vartheta = \text{const.} \end{aligned} \quad (13)$$

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{C_1}{C_{\text{вх}}}, \quad y_2 = \frac{C_2}{C_{\text{вх}}}, \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{\vartheta_1}{\vartheta}, \\ \alpha_2 &= \frac{\vartheta_2}{\vartheta} = 1 - \alpha_1, \quad \kappa = \frac{k_2}{k_1}, \quad z = \vartheta k_1 C_{\text{вх}}, \end{aligned}$$

в которых уравнения (13) примут следующий вид:

$$1 - y_1 = \alpha_1 z y_1^2, \quad y_1 - y_2 = \kappa \alpha_2 z y_2^2, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \quad (14)$$

Решим соответствующие квадратные уравнения:

$$y_1(\alpha, z) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4z\alpha}}, \quad y_2(\alpha, z, \kappa) = \frac{2y_1(\alpha, z)}{1 + \sqrt{1 + 4z\kappa(1 - \alpha)y_1(\alpha, z)}}. \quad (15)$$

Здесь $\alpha = \alpha_1$. Определение оптимального значения объема (значит, и параметра α) удобно провести, построив функцию $y_2(y_1)$, исключив из данного соотношения параметр α . Для удобства обозначим y_2 как y , а y_1 как x . В таком случае из выражений (14) и (15) находим

$$y(x, z, \kappa) = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + 4\kappa(zx^2 + x - 1)}}.$$

Необходимое условие экстремума по переменной x : $\partial y / \partial x = 0$, после некоторых выкладок приводит к трансцендентному уравнению

$$2\sqrt{x} - 3\sqrt{x + 4\kappa(zx^2 + x - 1)} = \frac{x[1 + 4\kappa(2zx + 1)]}{\sqrt{x + 4\kappa(zx^2 + x - 1)}}, \quad (16)$$

после нахождения, из которого величины x как функции параметров z и κ определяем долю объема первого реактора α от общего объема системы при помощи первого уравнения (14):

$$\alpha(z, \kappa) = \frac{1 - x}{zx^2}. \quad (17)$$

Некоторые расчетные данные представлены на рис. 2. Из рис. 2 не видно, что все кривые имеют одну и ту же горизонтальную асимптоту $1/3$ при $z \rightarrow \infty$, т.е. что в этой предельной ситуации объем второго реактора в два раза больше объема первого. Этот факт показывают как численное исследование, так и аналитический расчет. Имеют место предельные соотношения при $z \rightarrow \infty$: $x \rightarrow 0$ и $zx^2 \rightarrow 3$.

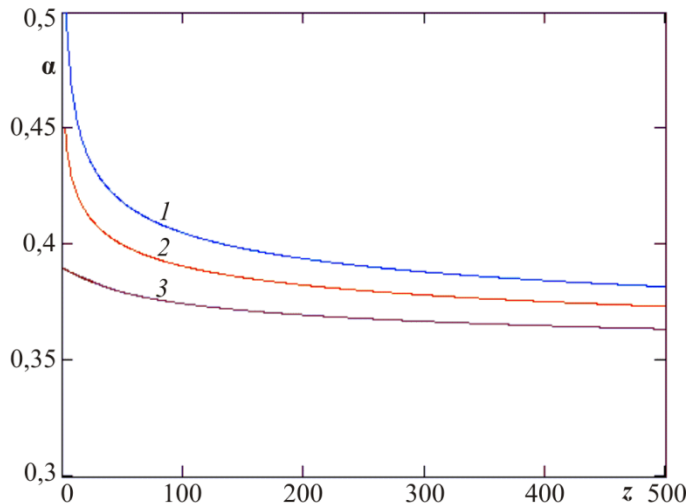


Рис. 2. Доля объема α при: 1 – $\kappa = 0,75$; 2 – $\kappa = 1$; 3 – $\kappa = 1,5$

Рис. 2 удобен для использования при больших значениях параметра z . При малых значениях z возникают определенные сложности. Рассматриваемая задача имеет естественные физические ограничения $\alpha \in [0, 1]$. Крайние случаи промежутка означают, что имеется только

один реактор. При $\alpha = 1$ имеем первый реактор, концентрация вещества в котором определяется первой формулой (15). Другое предельное значение $\alpha = 0$ соответствует наличию только второго реактора. Подставляя предельные значения $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ в соотношение (17) и далее, выражая x через z и κ , подставим результирующую зависимость в выражение (16). Получим, после некоторых выкладок, уравнения следующих разграничительных линий:

$$z_0(\kappa) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\kappa}}, \quad z_1(\kappa) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\kappa^2} - 1 \right). \quad (18)$$

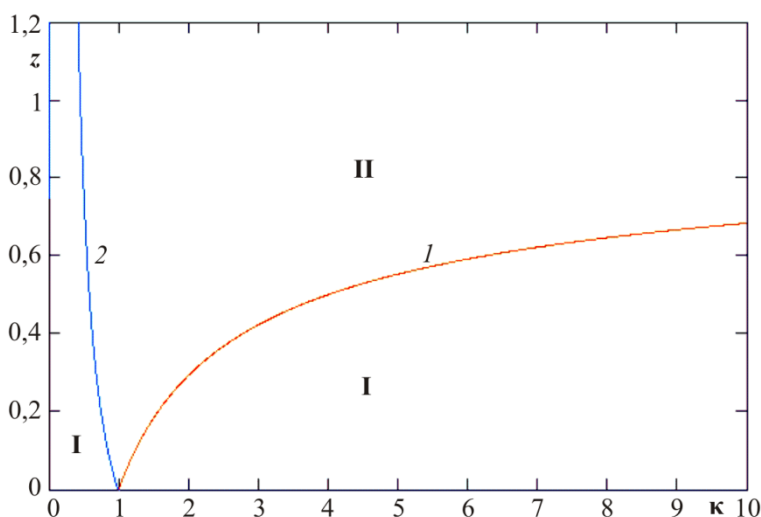


Рис. 3. Характерные области организации процессов: I — зона одного реактора; II — зона двух реакторов, работающих оптимально; I — линия $z = z_0(\kappa)$; 2 — линия $z = z_1(\kappa)$ [см. формулы (18)]

На рис. 3 приведены графики линий (18). Области I ниже этих линий являются «не физическими». Здесь $\alpha \notin [0, 1]$, т.е. при параметрах z и κ в этой области экстремум будет реализован на границах $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$. Наличию двух реакторов, работающих оптимальным образом, соответствует зона II. Рис. 3 и формулы (18) показывают, что только при $\kappa = 1$ возможно построение зависимости $\alpha(z, 1)$ во всем диапазоне $z \geq 0$.

При использовании стандартных методов решения нелинейных уравнений (например, в программной среде Mathcad) следует иметь ввиду, что уравнение (16) имеет три корня, два из которых, при вещественных значениях z и κ , комплексно сопряженные, а третий, как лег-

ко проверить, вещественный положительный. Это следствие комплексной структуры по переменной x уравнения (16) [16] (наличие трех точек ветвления). Стандартные расчетные процедуры могут приводить к трем комплексным решениям, одно из которых имеет малую мнимую часть, что затрудняет программное построение графиков. Уравнение (16) приводится к виду

$$\sqrt{x^2 + 4kx(zx^2 + x - 1)} = 6k - 2z k x^2 - x(4k + 1). \quad (19)$$

Отсюда видно, что после возведения во вторую степень, это уравнение приводится к алгебраическому уравнению четвертой степени, которое, как известно (например, [17, с. 240]), разрешимо в радикалах, хотя подобное решение в типичном случае неудобно для практических расчетов. При этом добавляется один вещественный (посторонний) корень, который делает правую часть (19) отрицательной.

На конкретном примере убедимся, что кривые рис. 2 соответствуют минимуму функции $C_{\text{вых}}/C_{\text{вх}}$, в частности при $k = 1$, $z = 100$. На рис. 4 представлен график этой функции: $C_{\text{вых}}/C_{\text{вх}} = f(\alpha)$. Минимальное значение этого отношения реализуется при $\alpha = 0,391$ и равно 0,0418. В общем случае оптимальная объемная доля α является функцией двух параметров z и k . Отметим, что выбор оптимума зависит от входной концентрации.

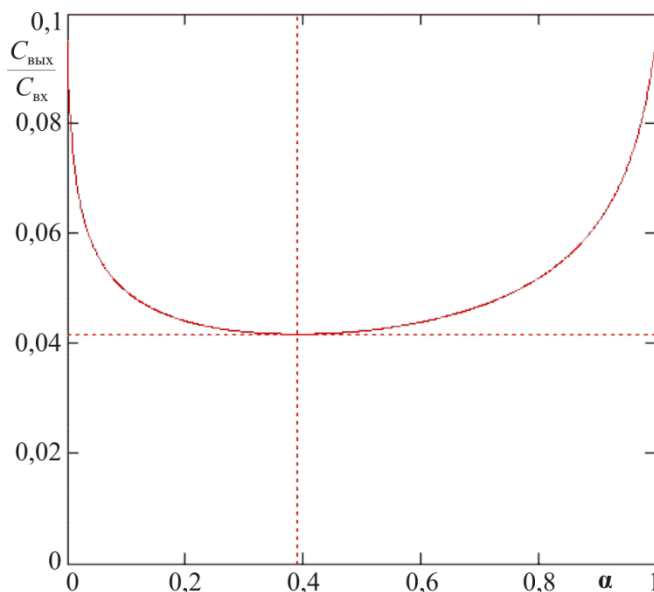


Рис. 4. Типичная кривая зависимости от параметра α функции $C_{\text{вых}}/C_{\text{вх}}$

Экономически удобно иметь одинаковые реакторы, т.е. взять $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2$. Тогда можно попытаться подобрать параметр κ таким образом, чтобы достигнуть минимума величины $C_{\text{вых}}/C_{\text{вх}}$. Однако функция $y_2(1/2, z, \kappa)$ при фиксированном значении параметра z оказывается монотонно убывающей, т.е. необходимо выбирать значение κ как можно больше. Последнее определяется нашими возможностями регулировать константы скорости реакций.

В принципе, используя методику [14, с. 81] перехода от дискретной модели к непрерывной, взяв за основу стационарное соотношение $C_{\text{вх}} - C_{\text{вых}} = \vartheta W(C_{\text{вых}})$, можно прийти к уравнению идеального вытеснения вида $dC/dx = W(C)/U$, т.е. убедиться в более общем случае, что предельным вариантом ячеечной модели с равными объемами ячеек будет модель идеального вытеснения. Из приведенного соотношения, поскольку $\vartheta W(C_{\text{вых}}) > 0 \Rightarrow C_{\text{вх}} > C_{\text{вых}}$, вытекает, что возрастание степени превращения с ростом числа ячеек будет монотонным.

Выводы:

1. Использование классических неравенств математического анализа, в данной работе неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел, позволяет по существу элементарными выкладками получать важные результаты.
2. Показано, что в случае каскада двух реакторов ИП, в которых протекает реакция второго порядка при стационарных условиях, в общем случае в оптимальном варианте реализуется неравенством объемов реакторов каскада.

Список литературы

1. Ефремов Г.И. Оптимизация каскада реакторов идеального смешения // Теоретические основы химической технологии. – 2016. – Т. 50, № 6. – С. 714–719.
2. Байтимерова А.И., Мустафина С.А., Спивак С.И. Алгоритм решения задачи оптимизации процесса с переменным реакционным объемом в каскаде реакторов // Вестник Башкирского университета. – 2008. – Т. 13, № 3–1. – С. 855–858.
3. Байтимерова А.И., Мустафина С.А., Спивак С.И. Поиск оптимального управления в каскаде реакторов для процессов с переменным реакционным объемом // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – № 2 (32). – С. 38–42.
4. Володин В.М., Мокрова Н.В. Способы построения математической модели каскада реакторов // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2006. – Т. 12, № 2. – С. 323–328.

5. Янчуковская Е.В. Математическое моделирование химического реактора идеального перемешивания // Изв. вузов. Прикладная химия и биотехнология. – 2014. – № 6(11). – С. 74–80.
6. Кафаров В.В. Методы кибернетики в химии и химической технологии. – М.: Химия, 1985. – 448 с.
7. Арис Р. Анализ процессов в химических реакторах. – Л.: Химия, 1967. – 328 с.
8. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука, 1986. – 192 с.
9. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. – М.: Наука, 1981. – 544 с.
10. Бояринов А.И., Кафаров В.В. Методы оптимизации в химической технологии. – М.: Химия, 1975. – 576 с.
11. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
12. Босс В. Лекции по математике. Т.7. Оптимизация. – М.: КомКнига, 2007. – 216 с.
13. Гельперин Н.И. Основные процессы и аппараты химической технологии. – М.: Химия, 1981. – 384 с.
14. Мошинский А.И Введение в математическое моделирование химико-технологических и биотехнологических процессов. – СПб.: Изд-во СПХФУ, 2018. – 176 с.
15. Левеншпиль О. Инженерное оформление химических процессов. – М.: Химия, 1969. – 624 с.
16. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.
17. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 431 с.

References

1. Efremov, G. I. Optimizacija kaskada reaktorov ideal'nogo smeshenija [Optimization of the cascade of ideal mixing reactors]. *Teoreticheskie osnovy himicheskoy tehnologii*, 2016, vol. 50, no. 6, pp. 714-719.
2. Bajtimerova, A. I. Algoritm reshenija zadachi optimizacii processa s peremennym reakcionnym ob'emom v kaskade reaktorov [Algorithm for solving the optimization problem of a process with a variable reaction volume in a reactor cascade] *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, 2008, vol. 13, no. 3-1, pp. 855-858.
3. Bajtimerova, A. I. Poisk optimal'nogo upravlenija v kaskade reaktorov dlja processov s peremennym reakcionnym ob'emom [Search for optimal control in the reactor cascade for processes with variable reaction volume]. *Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii*, 2008, no. 2(32), pp. 38-42.
4. Volodin, V. M. Sposoby postroenija matematicheskoj modeli kaskada reaktorov [Methods of constructing a mathematical model of a reactor cascade]

Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta, 2006, vol. 12, no 2, pp. 323-328.

5. Janchukovskaja E.V. Matematicheskoe modelirovanie himicheskogo reaktora ideal'nogo peremeshivaniya [Mathematical modeling of a chemical reactor of ideal mixing]. *Izvestiia vuzov. Prikladnaia khimiia i biotekhnologiya*, 2014, no 6(11), pp. 74-80.

6. Kafarov V.V. Metody kibernetiki v himii i himicheskoy tekhnologii [Methods of cybernetics in chemistry and chemical technology]. Moscow, Khimiya, 1985, 448 p.

7. Aris R. Analiz processov v himicheskikh reaktorah [Analysis of processes in chemical reactors]. Leningrad, Khimiya, 1967, 328 p.

8. Tihomirov V.M. Rasskazy o maksimumah i minimumah [Stories about highs and lows]. Moscow, Nauka, 1986, 192 p.

9. Zorich V.A. Matematicheskij analiz [Mathematical analysis]. Vol. 1, Moscow, Nauka, 1981, 544 p.

10. Bojarinov A.I., Kafarov V.V. Metody optimizatsii v himicheskoy tekhnologii. [Optimization methods in chemical technology]. Moscow, Himija, 1975, 576 p.

11. Moiseev N.N., Ivanilov Ju.P., Stoljarova E.M. Metody optimizatsii [Optimization methods] Moscow, Nauka, 1978, 352 p.

12. Boss V. Lekcii po matematike. T.7. Optimizatsija [Lectures on mathematics. Vol. 7. Optimization]. Moscow, KomKniga, 2007, 216 p.

13. Gel'perin N.I. Osnovnye processy i apparaty himicheskoy tekhnologii [Basic processes and devices of chemical technology]. Moscow, Himija, 1981, 384 p.

14. Moshinskij A.I. Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie himiko-tekhnologicheskikh i biotekhnologicheskikh processov [Introduction to mathematical modeling of chemical-technological and biotechnological processes]. Saint-Petersburg, SPHFU, 2018, 176 p.

15. Levenshpil' O. Inzhenernoe oformlenie himicheskikh processov [Engineering design of chemical processes]. Moscow, Himija, 1969, 624 p.

16. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow, Nauka, 1973, 736 p.

17. Kurosh A.G. Kurs vysshej algebry [Higher Algebra course]. Moscow, Nauka, 1968, 431 p.

Получено 29.10.2021

Об авторах

Александрова Любовь Юрьевна (Санкт-Петербург, Россия) – преподаватель кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного химико-фармацевтического университета (197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., 6; e-mail: lovov.aleksandrova@pharminnotech.com).

Рубцова Лариса Николаевна (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат фармацевтических наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного химико-фармацевтического университета (197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., 6; e-mail: larisarubtsova@pharminnotech.com).

Мошинский Александр Иванович (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного химико-фармацевтического университета (197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., 6; e-mail: alexander.moshinsky@pharminnotech.com).

Ганин Павел Георгиевич (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного химико-фармацевтического университета (197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., 6; e-mail: pavel.ganin@pharminnotech.com).

Маркова Алла Валентиновна (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного химико-фармацевтического университета (197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., 6; e-mail: alla.markova@pharminnotech.com).

Сорокин Владислав Валерьевич (Санкт-Петербург, Россия) – кандидат фармацевтических наук, доцент, заведующий кафедрой процессов и аппаратов химической технологии Санкт-Петербургского государственного химико-фармацевтического университета (197376, Санкт-Петербург, Аптекарский пр., 6; e-mail: vladislav.sorokin@pharminnotech.com).

About the authors

Lubov Yu. Aleksandrova (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Associate Prof., Department of Processes and Apparatuses of Chemical Technology, Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University (197376, St. Petersburg, Prof. Popov str., 14, e-mail: pisce-capricorn@inbox.ru).

Larisa N. Rubtsova (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. of Pharmaceutical Sciences, Associate Prof., Department of Processes and Apparatuses of Chemical Technology, Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University (197376, St. Petersburg, Prof. Popov str., 14, e-mail: larisapns@mail.ru).

Aleksandr I. Moshinskiy (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. of Technical Sciences, Associate prof., Department of Processes and Apparatuses of Chemical Technology, Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University (197376, St. Petersburg, Prof. Popov str., 14, e-mail: alex-moshinskiy@yandex.ru).

Pavel G. Ganin (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. of Technical Sciences, Associate Prof., Department of Processes and Apparatuses of Chemical

Technology, Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University (197376, St. Petersburg, Prof. Popov St., 14, e-mail: ganin-pavel-53@mail.ru).

Alla V. Markova (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. of Technical Sciences, Associate Prof., Department of Processes and Apparatuses of Chemical Technology, Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University (197376, St. Petersburg, Prof. Popov str., 14, e-mail: alla.markova@pharminnotech.com).

Vladislav V. Sorokin (Saint-Petersburg, Russian Federation) – Ph.D. of Pharmaceutical Sciences, Head of the Department, Department of Processes and Apparatuses of Chemical Technology, Saint-Petersburg State Chemical-Pharmaceutical University (197376, St. Petersburg, Prof. Popov str., 14, e-mail: spcpa@outlook.com).