

УДК 539.3

А.С. Дубровская,¹ К.А. Донгаузер²¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия²ОАО «Авиадвигатель», Пермь, Россия

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КРИСТАЛЛИЗУЮЩИХСЯ ЛОПАТОК ТУРБИН

Описаны основные дефекты, возникающие при изготовлении лопаток газотурбинных двигателей. На основе разработанной математической модели изучено напряженно-деформированное состояние кристаллизующейся блочной лопатки турбины низкого давления. Выявлены факторы, влияющие на НДС отливки в процессе кристаллизации, и проведены численные исследования с различными возможными значениями этих факторов. Установлен режим изготовления лопатки, позволяющий избавиться от коробления и трещин в отливке.

Ключевые слова: кристаллизация, отливка, напряженно-деформированное состояние, лопатка, газотурбинный двигатель, выплавляемая модель.

A.S. Dubrovskaya¹, K.A. Dongauser²¹State National Research Polytechnic University of Perm, Perm, Russian Federation²Aviadvigatel OJSC, Perm, Russian Federation

NUMERICAL ANALYSIS OF SOLIDIFYING BLADE DEFLECTED MODE DEVELOPMENT

In this article the primary damages, incipient in manufacturing of gas turbine engine blades are described. For casting material behavioral models examination the range of problems was selected. Research was performed by finite-elemental software ProCAST. Results of numerical calculation have been compared to analytical and software Ansys calculation dates. Block blade solidification process research was performed and the mechanism to avoidance of distortions and cracks was founded.

Keywords: solidification, casting, blade, gas turbine engine, consumable pattern.

Введение

Среди большой номенклатуры авиационных деталей турбинная лопатка не имеет аналогов по сложности нагружения и ответственности назначения. Отсюда возникают высокие требования к ее металлургическому и прочностному качеству. Изготовление лопаток газотур-

бинных двигателей (ГТД) методом точного литья является одним из важнейших технологических достижений современной авиационной промышленности, поскольку позволяет производить отливки сложной конфигурации из дорогостоящих жаропрочных сплавов, плохо поддающихся механической обработке.

Применение литейных технологий изготовления турбинных лопаток в серийном производстве показало наличие повреждений структуры материала, в связи с этим возникает необходимость модернизации производственного процесса и совершенствования технологических разработок.

Основными дефектами блочных лопаток газотурбинных двигателей являются коробления и трещины [1], расположение которых свидетельствует о деформационной природе их возникновения. Коробление – это дефект в виде искажения конфигурации детали под влиянием напряжений, возникающих в результате нагрева, а также при последующем охлаждении отливки. Трещины – дефекты в виде надрыва тела отливки. По происхождению трещины бывают горячие (образующиеся в интервале температур затвердевания), холодные и межкристаллические (образующиеся на границах первичных зерен).

Основными источниками появления литейных напряжений являются:

- различие коэффициентов литейного температурного расширения керамических форм, стержня и жаропрочного сплава отливки;
- затруднения усадки жаропрочного сплава отливки сложной геометрической формы;
- межфазовые напряжения в структуре сплава отливки, возникающие из-за высоких скоростей охлаждения.

Высокий уровень литейных напряжений может привести к растрескиванию деталей по границам зерен, явлению рекристаллизации, поверхностной и объемной, а также короблению стержней и отливок [2].

Для того чтобы избежать нарушений в структуре материалов литых изделий, необходима численная оценка их напряженно-деформированного состояния и прогнозирование возможных дефектов. Такое исследование позволяет вносить необходимые коррективы в технологию производственного процесса.

1. Технология производственного процесса

Наиболее распространенным способом изготовления лопаток турбин является метод литья по выплавляемым моделям. Сущность этого процесса заключается в использовании точной неразъемной разовой модели, по которой из жидких формовочных смесей изготавливается неразъемная керамическая оболочковая форма; перед заливкой расплава модель удаляется из формы вплавлением, выжиганием, растворением или испарением; для удаления остатков модели и упрочнения форма может быть нагрета до высоких температур, что улучшает ее заполняемость расплавом.

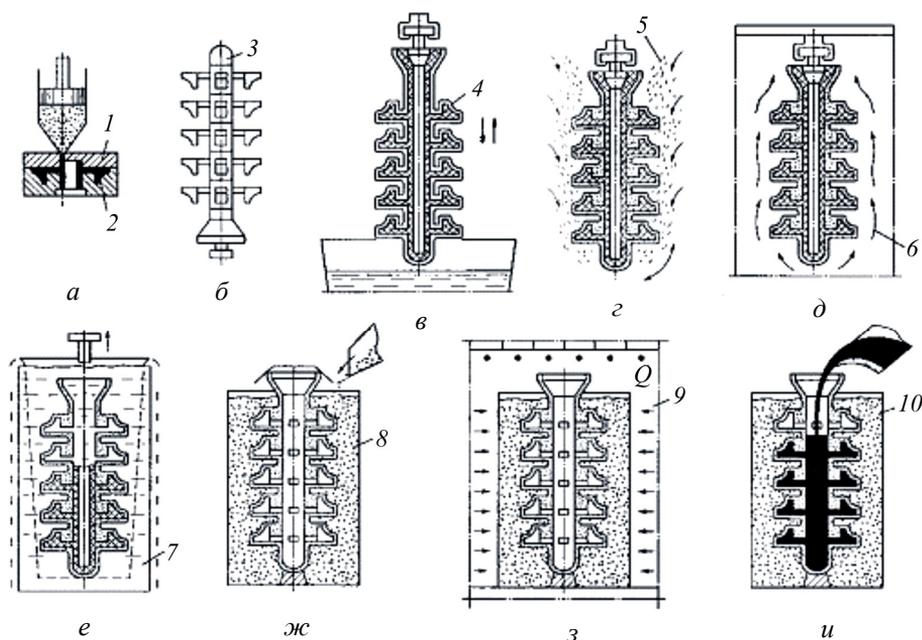


Рис. 1. Последовательность изготовления многослойной оболочковой формы по выплавляемым моделям: а – запрессовка модельного состава в пресс-форму; б – сборка блока; в – нанесение на блок суспензии; г – посыпка огнеупорным зернистым материалом; д – сушка; е – удаление модели; ж – засыпка опорным материалом; з – прокалка в печи; и – заливка формы расплавом; 1 – пресс-форма; 2 – модель; 3 – блок моделей отливок и литниковой системы; 4 – слой суспензии; 5 – огнеупорный зернистый материал; 6 – пары аммиака; 7 – горячая вода; 8 – огнеупорный материал; 9 – печь; 10 – прокаленная форма; Q – подвод теплоты

Модель или звено моделей 2 изготавливают в разъемной пресс-форме 1, рабочая полость которой имеет конфигурацию и размеры отливки с припусками на усадку модельного состава и материала отлив-

ки, а также обработку резанием (рис. 1, *a*). Модель изготавливают из материалов, либо имеющих невысокую температуру плавления (воск, стеарин, парафин), либо способных растворяться (карбамид) или сгорать без образования твердых остатков (полистирол) [3].

Готовые модели или звенья моделей собирают в блоки 3 (рис. 1, *b*), имеющие модели элементов литниковой системы из того же материала, что и модель отливки. Блок моделей состоит из звеньев, центральная часть которых образует модели питателей и стояка. Модели чаши и нижней части стояка изготавливают отдельно и устанавливают в блок при его сборке.

Для получения оболочковых форм полученный блок моделей погружают в емкость с жидкой формовочной смесью – суспензией, состоящей из пылевидного огнеупорного материала, например пылевидного кварца или электрокорунда и связующего (рис. 1, *в*). В результате на поверхности модели образуется слой суспензии 4 толщиной менее 1 мм.

Для упрочнения этого слоя и увеличения его толщины на него наносят слои огнеупорного зернистого материала 5 (мелкий кварцевый песок, электрокорунд, зернистый шамот) (рис. 1, *г*). Операции нанесения суспензии и обсыпки повторяют до получения на модели оболочки требуемой толщины (3–10 слоев). При этом каждый слой покрытия высушивают на воздухе или в парах аммиака 6, что зависит от связующего (рис. 1, *д*).

После сушки оболочковой формы модель удаляют из нее выплавлением, растворением, выжиганием или испарением. В качестве примера показано, как в процессе удаления выплавляемой модели в горячей воде 7 при температуре менее 100 °С получают многослойную оболочковую форму (рис. 1, *e*).

С целью упрочнения формы перед заливкой ее помещают в металлический контейнер и засыпают огнеупорным материалом 8 (кварцевым песком, мелким боем использованных оболочковых форм) (рис. 1, *ж*).

Для удаления остатков моделей из формы и упрочнения связующего контейнер с оболочковой формой помещают в печь 9 для прокаливания (рис. 1, *з*). Прокалку формы ведут при температуре 900–1100 °С, далее прокаленную форму 10 извлекают из печи и заливают расплавом (рис. 1, *и*).

После затвердевания и охлаждения отливки до заданной температуры форму выбивают, отливки очищают от остатков керамики и отре-

зают от них литники. Малая шероховатость поверхности формы при достаточно высокой огнеупорности и химической инертности материала позволяет получать отливки с поверхностью высокого качества.

Отсутствие разъема формы, использование для изготовления моделей материалов, позволяющих не разбирать форму для их удаления, высокая огнеупорность материалов формы, а также нагрев ее до высоких температур перед заливкой способствуют улучшению заполняемости, дают возможность получать отливки сложнейшей конфигурации, максимально приближенной или соответствующей конфигурации готовой детали, практически из всех известных сплавов. Поэтому литье по выплавляемым моделям относится к прогрессивным материало- и трудосберегающим технологическим процессам обработки металлов.

2. Постановка задачи исследования напряженно-деформированного состояния блочной лопатки турбины низкого давления

Расчеты проводятся с целью оценки влияния технологических параметров заливки на коробление отливки в процессе кристаллизации и охлаждения, а также определения режима, позволяющего получить отливку в пределах допуска заданной геометрии. С помощью компьютерного моделирования решается сопряженная задача заливки, кристаллизации и определения напряженно-деформированного состояния в процессе охлаждения до комнатной температуры.

Критериями оценки качества отливки являются: отсутствие литейных дефектов на этапе заполнения формы расплавом (отсутствие непроливов, спаев и засоров), отсутствие кристаллизационных дефектов (усадочная пористость) и отсутствие деформационных дефектов (коробление керамического стержня, разнотолщинность стенок пера отливки, горячие и холодные трещины, коробление отливки).

Разработана модель для изучения напряженно-деформированного состояния в блочной лопатке турбины низкого давления (рис. 2). Эта деталь изготавливается методом литья по выплавляемым моделям при помощи равноосной кристаллизации. Данная лопатка имеет большой процент брака, в основном связанного с наличием трещин в радиусах переходов между перьями и полками лопатки.

Охлаждение формы осуществляется за счет лучистого теплообмена с окружающей средой, охлаждение отливки ведется через кондуктивно-конвективный теплообмен с формой и керамическим стержнем.



Рис. 2. Трехперая лопатка турбины низкого давления: *а* – корыто; *б* – спинка

В программном пакете NX-6 построена модель отливки трехперой сопловой лопатки турбины низкого давления (рис. 3, *а*). На данную модель наносится сетка из тетраэдральных конечных четырехугольных элементов (рис. 3, *б*). С помощью модуля Meshcast пакета ProCAST моделируется керамическая форма (рис. 3, *в*).



Рис. 3. Формирование расчетной области: *а* – модель отливки, *б* – конечно-элементная модель отливки, *в* – конечно-элементная модель керамической формы

В расчетную область всех исследуемых задач входили: отливка трехперой блочной лопатки турбины низкого давления газотурбинного двигателя с тремя керамическими стержнями для формирования внутренней полости отливки, литниково питающая система, пенокерамический фильтр, керамическая форма и симулятор печи подогрева форм.

3. Математическая постановка задачи

В процессе исследования задача была разбита на два этапа: заливка металла с расчетом нестационарных температурных полей и термоупругая задача кристаллизации отливки [4].

Исследование нестационарных температурных полей в расчетной области при заливке металла и кристаллизации отливки ведется с помощью дифференциального уравнения теплопроводности. Для материала отливки оно записывается в виде

$$\rho_o \frac{\partial H_o}{\partial \tau} + \rho_o \mathbf{v} \cdot \text{grad}(H_o) - \text{div}[\lambda_o(T) \text{grad}(T)] = 0,$$

где T – температура; λ – коэффициент теплопроводности; c_p – удельная теплоемкость; L – удельная теплота фазового перехода; τ – время; ρ – плотность; $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – вектор эффективной скорости расплава, рассчитываемый через истинную скорость жидкой фазы, которая определяется по формуле \mathbf{v}_l : $\mathbf{v} = f_l \mathbf{v}_l$; f_l – доля жидкой фазы, ($l = 1, 2, 3$);

$$H_o(T) = \int_0^T c_{p_o}(T) dT + L[1 - f_s(T)] - \text{энтальпия.}$$

Для материала формы и керамического стержня дифференциальное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\rho_\phi \frac{\partial H_\phi}{\partial \tau} - \text{div}[\lambda_\phi(T) \text{grad}(T)] = 0,$$

$$H_\phi(T) = \int_0^T c_{p_\phi}(T) dT.$$

Уравнение теплопроводности дополняется граничными условиями на поверхности контакта форма – отливка и отливка – стержень:

$$-\lambda_\phi \frac{\partial T}{\partial n} = -\lambda_o \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_{o-\phi} (T_o - T_\phi).$$

На границах теплообмена с окружающей средой условия теплообмена формы и отливки имеют вид

$$\lambda_o \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_{o-c} (T_o - T_c) - \varepsilon \sigma (T_o^4 - T_c^4) \text{ для отливки,}$$

$$\lambda_{\phi} \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_{\phi-c} (T_{\phi} - T_c) - \varepsilon \sigma (T_{\phi}^4 - T_c^4) \text{ для формы,}$$

где $\alpha(t)$ – коэффициент теплоотдачи.

Начальные условия накладываются на температуру заливаемого металла и формы с керамическим стержнем:

$$T_{\phi} = T_{0\phi} \text{ при } \tau = 0,$$

$$T_o = T_{0o} \text{ при } \tau = 0.$$

Для моделирования заливки расплава в керамическую форму и расчета тепломассопереноса используется дифференциальное уравнение движения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_o \frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \rho_o \mathbf{v} \cdot \mathit{grad}(v_1) = -\frac{\partial p_o}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{x_1 x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{x_1 x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{x_1 x_3} - \frac{\mu}{K} v_1, \\ \rho_o \frac{\partial v_2}{\partial \tau} + \rho_o \mathbf{v} \cdot \mathit{grad}(v_2) = -\frac{\partial p_o}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{x_2 x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{x_2 x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{x_2 x_3} - \frac{\mu}{K} v_2, \\ \rho_o \frac{\partial v_3}{\partial \tau} + \rho_o \mathbf{v} \cdot \mathit{grad}(v_3) = -\frac{\partial p_o}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1} \sigma_{x_3 x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \sigma_{x_3 x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \sigma_{x_3 x_3} - \\ - \frac{\mu}{K} v_3 - \rho_o g + mV, \end{array} \right.$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ – глобальные декартовы координаты; g – ускорение свободного падения; p – давление; μ – коэффициент вязкости; K – проницаемость дендритного каркаса, рассчитываемая по формуле Коуэни-Кармана

$$K = \frac{f_l^3}{k S_V^2},$$

где k – постоянная Кармана, $k = 5$; S_V – удельная поверхность твердой фазы (на единицу объема) в предположении, что частицы одинаковы по размеру и имеют сферическую форму:

$$S_V = \frac{6(1-f_l)}{D},$$

где D – характерный размер дендрита;

$$\sigma_{x_1x_1} = 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \quad \sigma_{x_2x_2} = 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \quad \sigma_{x_3x_3} = 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3},$$

$$\sigma_{x_1x_2} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), \quad \sigma_{x_2x_3} = \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), \quad \sigma_{x_1x_3} = \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right)$$

– компоненты тензора вязких напряжений.

Уравнение движения дополняет эволюционное уравнение неразрывности в области жидкой фазы

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}) = 0.$$

Уравнение движения дополняется следующими граничными условиями:

– $\mathbf{v} = 0$ на границе отливки с формой и керамическим стержнем – условие полного прилипания вязкой среды к твердой поверхности:

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p^0 \mathbf{n};$$

– на свободной поверхности отливки – условие отсутствия касательных и равенство нормальных напряжений давлению газа над свободной поверхностью p^0 , \mathbf{n} – единичная нормаль к свободной поверхности отливки.

Пусть уравнение свободной поверхности отливки имеет вид

$$F(x_1, x_2, x_3, \tau) = x_3 - \xi(x_1, x_2, \tau) = 0,$$

тогда

$$\frac{dF(x_1, x_2, x_3, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}(F) = 0;$$

– в Эйлеровой форме условие продвижения свободной поверхности во времени и пространстве (используется для нахождения формы свободной поверхности).

На границе Γ_{f_s} скорость \mathbf{v} автоматически становится равной 0, поскольку $\mathbf{v} = f_l \mathbf{v}_l$, а $f_l = 0$ на Γ_{f_s} .

Предполагается, что в начальный момент времени свободная поверхность является плоской и на ней известно начальное распределение скоростей:

$$v_1 = v_2 = 0; v_3 = v_{03}.$$

Поскольку отливка тонкостенная, тепломассоперенос в залитом металле практически не влияет на процесс кристаллизации, поэтому после заливки прекращается расчет конвекционных потоков [5].

Расчет напряженно-деформированного состояния в форме и керамическом стержне ведется на протяжении всего расчетного времени задачи. В зоне отливки он подключается для области, в которой количество твердой фазы f_s превышает 50 %.

Уравнение равновесия в этом случае имеет вид

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = 0.$$

Физические и геометрические соотношения для этой задачи записываются в виде

$$\hat{\sigma} = {}^4\hat{D} \cdot (\hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_T),$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \bar{U} + \nabla \bar{U}^T].$$

Температурные деформации определяются следующим образом:

$$\hat{\varepsilon}_T = \alpha(T) \hat{I} \Delta T,$$

где $\alpha(t)$ – коэффициент теплового расширения.

Граничные условия в перемещениях соответствуют установке керамической формы в печь: $\bar{U}_\phi = 0$, и задаются на нижней границе формы.

Полагается, что касательные и нормальные напряжения непрерывны на контактных границах:

$$[\bar{\sigma}_\tau] = [\bar{\sigma}_n].$$

На границе твердой и жидкой фаз нормальные и касательные напряжения имеют вид

$$\bar{\sigma}_n = (\hat{\sigma} \cdot \bar{n}) \bar{n},$$

$$\sigma_\tau = 0.$$

Между контактными поверхностями отливки и формы с керамическим стержнем возможно отлипание и проскальзывание с трением:

$$[\bar{u}_n] \geq 0; [\bar{\sigma}_\tau] = q [\bar{\sigma}_n],$$

где коэффициент трения q не зависит от направления касательной и неотрицателен.

4. Результаты моделирования процесса отливки блочной лопатки турбины низкого давления

Численный анализ процесса изготовления трехперой лопатки турбины низкого давления проводился в программном пакете ProCAST. Температурные поля в процессе заливки и кристаллизации металла показаны на рис. 4.

Заполнение формы жидким расплавом начинается с верхней полки. Заливка нижней полки происходит через питающие летник. При заполнении формы расплав значительно остывает на тонкой стенке пера, поэтому на нижней его части наблюдается встреча потоков расплава с разной температурой. Проблем с проливаемостью перьев не обнаружено.



Рис. 4. Температурные поля на отливке в процессе заливки металла в форму и кристаллизации отливки в момент времени соответственно: $a - 0,4$ с; $б - 1$ с; $в - 1,3$ с; $г - 1,5$ с; $д - 2,4$ с; $е - 58$ с; $ж - 108$ с; $з - 548$ с

Количество твердой фазы в отливке в процессе кристаллизации представлено на рис. 5. На шкале – количество твердой фазы (0 – полностью жидкое состояние, 1 – полностью твердое).

Процесс затвердевания отливки начинается с тонких стенок перьев. При приближении фронта кристаллизации к массивным полкам скорость охлаждения существенно снижается.

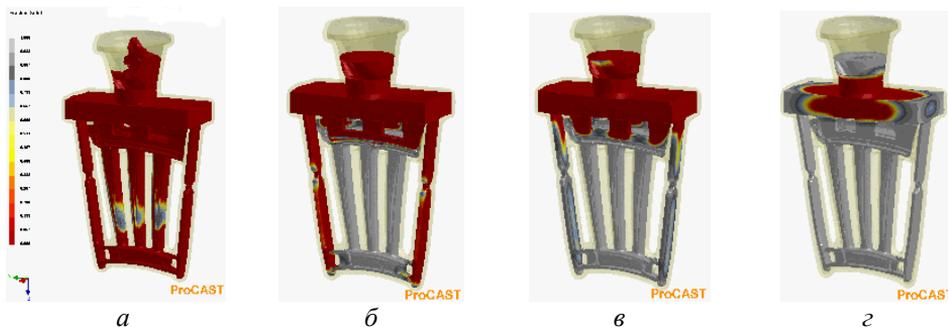


Рис. 5. Количество твердой фазы в отливке в процессе кристаллизации в момент времени соответственно: *a* – 2,4 с; *б* – 58 с; *в* – 108 с; *г* – 548 с

Рассмотрим задачу контакта деформируемых тел – отливки и формы. И для отливки, и для формы использовалась упрощенная упруго-пластическая модель поведения материала. Возможное разрушение формы в процессе кристаллизации и охлаждения не учитывалось.

С помощью модуля Stress вычислительного пакета ProCast рассчитаем остаточные напряжения в отливке после завершения кристаллизации (рис. 6, *a*). Характер полученных напряжений соответствует физическому процессу: максимальные напряжения, превышающие предел прочности сплава, обнаружены в радиусах перехода между перьями и полками лопатки. Именно в этих местах при изготовлении изделия горячие трещины были наиболее вероятны.



Рис. 6. Остаточные напряжения в кристаллизовавшейся отливке: *a* – при номинальном режиме, *б* – при режиме, полученном в результате исследования

Чтобы снизить процент брака, принято решение о необходимости изменения режима изготовления лопатки. Подбор данного режима проведем с помощью математического моделирования заливки и кристаллизации сплава с учетом возможных изменений производственных факторов процесса [4–5].

Факторы, влияющие на НДС отливки в процессе кристаллизации: температура в печи подогрева форм, температура металлического расплава, количество заливаемого металла, скорость заливки, технологические характеристики фильтра, время выдержки, геометрия литниково-питающей системы, тепловые условия кристаллизации, способ установки формы в печь.

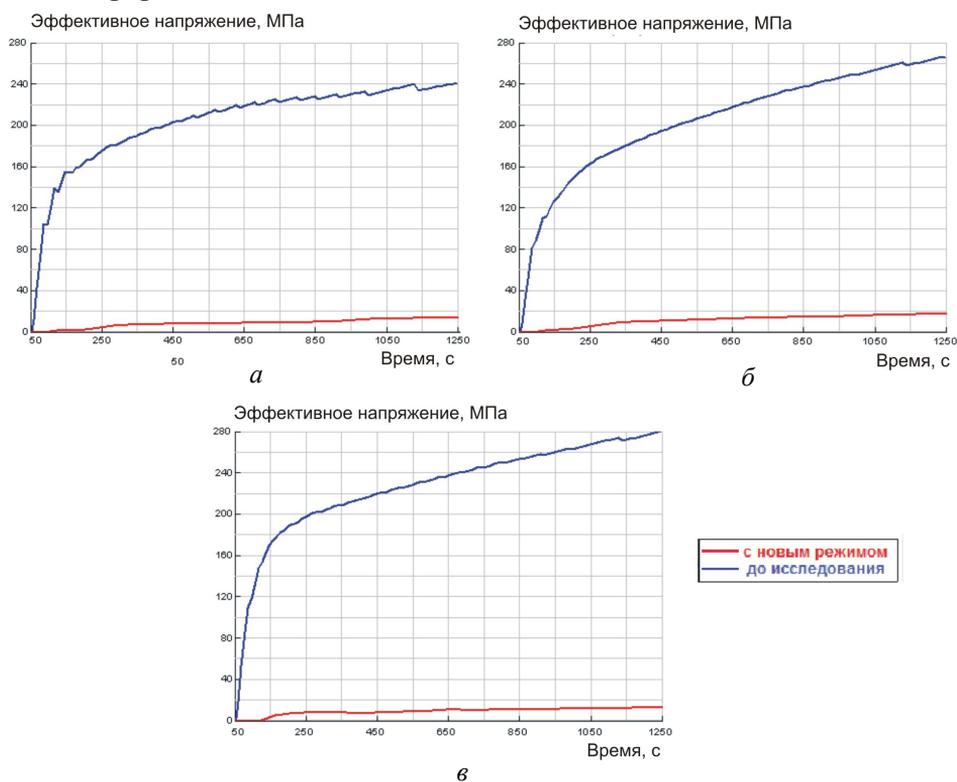


Рис. 7. Сравнение эффективных напряжений в радиусах перехода пера и полки лопатки в расчетах с исходными условиями заливки и кристаллизации и новым режимом (*а* – на правом пере; *б* – на среднем пере; *в* – на левом пере)

После проведения исследований был получен режим, позволяющий сократить напряжения в выявленных концентраторах напряжений отливки приблизительно в 20 раз (рис. 6, *б*), применение которого на практике позволило почти полностью избавиться от горячих трещин на

стыке перьев и полок лопатки (сравнение эффективных напряжений представлены на рис. 7). Таким образом, удалось сократить процент производственного брака на 15 %.

Заключение

На основе разработанной математической модели изучено напряженно-деформированное состояние кристаллизующейся блочной лопатки турбины низкого давления. Максимальные напряжения обнаружены в радиусах перехода пера к полке.

Выявлены факторы, влияющие на НДС отливки в процессе кристаллизации, и проведены численные исследования с различными возможными значениями этих факторов. Установлен режим изготовления лопатки, при котором остаточные напряжения в отливке являются допустимыми. С помощью представленного решения удалось сократить процент производственного брака в процессе заливки и кристаллизации блочной лопатки турбины низкого давления на 15 %.

Библиографический список

1. Каблов Е.Н. Литые лопатки газотурбинных двигателей (сплавы, технология, покрытия) / Моск. ин-т стали и сплавов, 2001. – 632 с.
2. Camobell J. *Castings*. Butterworth-Heinemann Oxford, 2nd ed., 2003. – 335 p.
3. Степанов Ю.А., Баландин Г.Ф., Рыбкин В.А. Технология литейного производства. – М.: Машиностроение, 1983. – С. 5.
4. Жиганкова О.О., Донгаузер К.А. Численная оптимизация процесса изготовления сопловой монокристаллической лопатки турбины газотурбинного двигателя // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. ун-та, 2011. – № 9. – 103 с.
5. Dantzig J.A., Rappaz M. *Solidification*. – EPFL Press, 2009. – 479с.

References

1. Kablov E.N. *Blades casting of gas turbine engine (alloys, technology, claddings)* [*Litye lopatki gazoturbinnnykh dvigateley (splavy, tekhnologiya, pokrytiya)*]. Moscow, MISIS, 2001, 632 p.
2. Camobell J. *Castings*. Butterworth-Heinemann Oxford, 2nd ed., 2003, 335 p.

3. Stepanov Yu.A., Balandin G.F., Rybkin V.A. Foundry engineering technology [*Tekhnologiya liteynogo proizvodstva*]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1983, P. 5.

4. Zhigankova O.O., Dongauzer K.A. Numerical optimization the process of manufacturing single-crystal turbin blade [Chislennaya optimizatsiya protsessa izgotovleniya soplovooy monokristallicheskooy lopatki turbiny gazoturbinnogo dvigatelya]. *Vestnik PGU. Prikladnaya matematika i mekhanika – Journal of PSTU. Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, No. 9, P. 103.

5. Dantzig J.A., Rappaz M. *Solidification*. EPFL Press, 2009, 479 p.

Об авторах

Дубровская Александра Сергеевна (Пермь, Россия) – аспирант кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: ivanov@ivanov.com).

Донгаузер Константин Александрович (Пермь, Россия) – ОАО «Авиадвигатель» (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 93, e-mail: office@avid.ru).

About the authors

Alexandra Sergeevna Dubrovskaya (Perm, Russian Federation) – postgraduate student of Applied Mathematics and Mechanics State National Research Polytechnic University of Perm (614990, 29, Komsomolsky prospect, Perm, Russian Federation, e-mail: ivanov@ivanov.com).

Konstantin Alexandrovich Dongauser (Perm, Russian Federation) – Aviadvigatel OJSC (614990, 93, Komsomolsky prospect, Perm, Russian Federation, e-mail: office@avid.ru).

Получено 19.02.2012