DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.03
УДК 517.977

С.Ю. Култышев, Л.М. Култышева

Пермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ НАЛИЧИИ НЕИЗМЕРЯЕМЫХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА МОДЕЛИРУЕМЫЙ ОБЪЕКТ

Получена новая теорема и алгоритм приближенной идентификации параметров и неизмеряемых внешних воздействий для математических моделей реальных объектов. Эта задача идентификации имеет ключевое значение для построения математических моделей в реальных приложениях математики.

Ключевые слова: математическая модель, параметрическая идентификация, неизмеряемые внешние воздействия, реальные объекты.

S.Iu. Kultyshev, L.M. Kultysheva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

THE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF THE MATHEMATICAL MODEL IN THE PRESENCE OF IMMEASURABLE EXTERNALINFLUENCES ON THE SIMULATED OBJECT

A theorem and an algorithm for approximate identification of parameters and immeasurable external influences for mathematical models of real objects are obtained. This identification problem is one of key importance for design the mathematical models in real mathematics applications.

Keywords: mathematical model, parametrical identification, immeasurable external influences, real objects.

Введение

Ставится задача нахождения параметров приближенной математической модели реального объекта по измерениям его входа и выхода при наличии неизмеряемых внешних воздействий на этот объект. Цель работы – получение эффективных теорем и алгоритмов, дающих решение этой задачи. Постановка задачи сформулирована в терминах функционального анализа для детерминированных моделей и несколько отличается от общепринятой, которую можно найти, например, в работах [1–5]. Вводится определение эпсилон-модели, которому соответствует постановка задачи идентификации. В этом состоит некоторая новизна подхода к задаче. В результате решения задачи идентификации получена приближенная оценка неизмеряемых воздействий на объект, т.е. произведена приближенная идентификация этих воздействий. При этом вектор-функция неизмеряемых внешних воздействий рассматривается как вектор параметров модели, который нужно найти в задаче идентификации, а параметрами модели могут быть не только действительные числа, но и функции одного или нескольких аргументов (в частности, времени). Иными словами, задача идентификации сводится к случаю, когда все входные воздействия доступны измерению, который рассматривался авторами в работах [6–10]. Актуальность задачи идентификации несомненна, так как к ней сводится задача построения математических моделей реальных объектов, а наличие неизмеряемых внешних воздействий усложняет эту задачу и приводит к необходимости решать ее в нестандартной постановке. Эта задача рассматривалась в работах [1–5] и [11] в вероятностной постановке, но в силу упомянутой сложности недостаточно исследована. Предлагаемый нами подход позволяет свести задачу идентификации к задаче нахождения условного минимума функций многих переменных (в частности, к задаче линейного или квадратичного программирования), которая рассматривается в курсах обычного вузовского математического анализа и для решения которой есть стандартные программы в широко используемых пакетах MATLAB, Maple, Exel, MathCad, Mathematica и др. Таким образом, полученная теорема и алгоритм позволяют эффективно решать задачу идентификации для широкого класса реальных объектов.

1. Постановка задачи

Через R^n обозначим n-мерное евклидово пространство векторов $r=\{r_1,r_2,...,r_n\}$, компонентами которых являются действительные числа $r_i, i=\overline{1,n}$; $B_1^m[\theta,T], B_2^n[\theta,T], B_3^q[\theta,T]$ – нормированные [12] пространства n, m и q-мерных вектор-функций, определенных на отрезке $[\theta, T] \subset R^1$; Y, Z и W – нормированные пространства; $\|x\|$ – норма элемента x в том пространстве, которому он принадлежит; R_+^1 – множество неотрицательных чисел из R^1.

Пусть имеется реальный объект, который мы будем рассматривать на отрезке времени $[\theta, T]$. Через $\overline{v}(t)$ обозначим m-мерный вектор параметров, характеризующих измеряемые внешние воздействия на объект в момент времени $t \in [\theta, T], \overline{v}(t) \in R^m$, через $\overline{f}(t)$ – q-мерный вектор параметров, характеризующих неизмеряемые внешние воздействия на объект в момент времени $t \in [\theta, T], \overline{f}(t) \in R^q$, а через $\overline{x}(t)$ – n-мерный вектор параметров, характеризующих реакцию объекта на внешние воздействия в момент времени $t \in [\theta, T], \overline{x}(t) \in R^n$. Будем считать, что вектор-функции $\overline{v}, \overline{f}, \overline{x}$ удовлетворяют условиям $\overline{v} \in V$, $\overline{f} \in F$, $\overline{x} \in X$, где V, F, X – некоторые подмножества из $B_1^m[\theta, T]$, $B_3^q[\theta, T]$, $B_2^n[\theta, T]$ соответственно. Вектор-функцию $\{\overline{v}, \overline{f}\}$ будем называть входом, а вектор-функцию $\overline{x}$ – выходом объекта соответственно.

Определение 1. Уравнение $\Phi(x, v, f) = 0$ назовем ε-моделью объекта, если:

1) $\Phi : X \times V \times F \to W$ – непрерывный оператор;

2) уравнение $\Phi(x, v, f) = 0$ имеет единственное решение $x \in X$ при каждом $v \in V$ и при каждом $f \in F$;

3) выполняется неравенство $\left\|\Phi(\overline{x}, \overline{v}, \overline{f})\right\| \le \varepsilon$, где ε – достаточно малое положительное число или нуль.

Будем строить ε-модель в виде

$$\overline{\Phi}(x, v, f, \omega) = 0, \tag{1}$$

где $x \in X, v \in V, f \in F, \omega \in \Omega \subseteq B_4, B_4$ – нормированное пространство; ω – вектор неизвестных параметров модели; $\overline{\Phi} : X \times V \times F \times \Omega \to W$ – непрерывный оператор, который удовлетворяет условиям определения 1 при некотором $\omega \in \Omega$.

Определение 2. Уравнения

$$y = P(\bar{v}) + \xi, z = Q(\bar{x}) + \eta \tag{2}$$

назовем измерениями входа и выхода объекта, если:

1) $P: V \to Y$ и $Q: X \to Z$ – непрерывные операторы;

2) ξ и η – ошибки измерений, о которых известно лишь то, что $\xi \in Y$, $\eta \in Z$, $\|\xi\| \le \varepsilon_1$, $\|\eta\| \le \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 – малые положительные числа или нули (рисунок).

Задача идентификации: по известным $y, z, P, Q, \bar{\Phi}, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ найти такие $\bar{\omega}$ и $\bar{f}$, при которых уравнение $\bar{\Phi}(x, v, f, \bar{\omega}) = 0$ является ε-моделью объекта (т.е. выполнено неравенство $\left\|\bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega})\right\| \le \varepsilon$).

Определение 3. Уравнение $\Phi(x, v, f) = 0$ назовем приближенной ε-моделью объекта, если:

1) $\Phi: X \times V \times F \to W$ – непрерывный оператор;

2) уравнение $\Phi(x, v, f) = 0$ имеет единственное решение $x \in X$ при каждом $v \in V$ и при каждом $f \in F$;

3) выполняется неравенство $\left\|\Phi(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f})\right\| \le \varepsilon,$ где $\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}$ – некоторые приближения к $\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}$ соответственно.

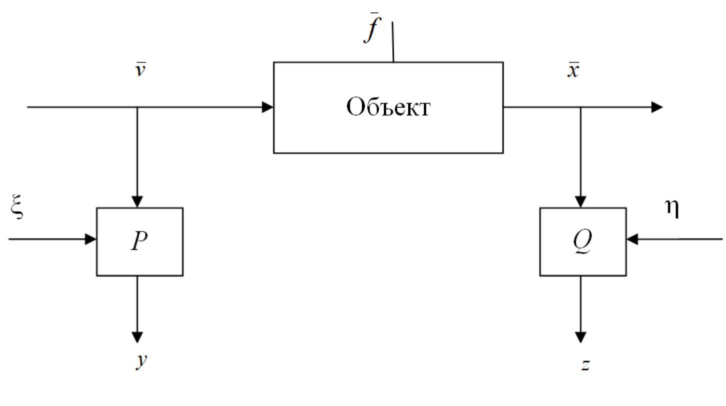

Рис. Блок-схема объекта

Задача приближенной идентификации: по известным $y, z, P, Q, \bar{\Phi}, \varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ найти такие $\tilde{\omega}$ и $\tilde{f}$, при которых уравнение

$\Phi\left(x, v, f, \tilde{\omega}\right)=0$ является приближенной ε-моделью (т.е. выполняется неравенство $\left\|\bar{\Phi}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega}\right)\right\| \leq \varepsilon$).

2. Основные результаты

Теорема. Пусть

1) $\left\{\varphi_i, i=0,1,2,\ldots\right\}$ – полная система элементов в пространстве $B_1^m\left[\theta, T\right]$, $\left\{\psi_i, i=0,1,2,\ldots\right\}$ – полная система элементов в пространстве $B_2^n\left[\theta, T\right]$, $\left\{g_i, i=0,1,2,\ldots\right\}$ – полная система элементов в пространстве $B_3^q\left[\theta, T\right]$, $\left\{e_i, i=0,1,2,\ldots\right\}$ – полная система элементов в пространстве B_4;

2) найдутся такие N и $\tilde{\alpha}_i \in R^1, \left(i=\overline{0, N}\right)$, что $\left\|y-P\left(\sum_{i=0}^{N} \tilde{\alpha}_i \varphi_i\right)\right\|=$

$=\min\limits_{\{\alpha_i\}}\left\|y-P\left(\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi_i\right)\right\| \leq \varepsilon_1$ при условиях $\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi_i \in V, \alpha_i \in R^1$;

3) найдутся такие M и $\tilde{\beta}_i \in R^1, \left(i=\overline{0, M}\right)$, что $\left\|z-Q\left(\sum_{i=0}^{M} \tilde{\beta}_i \psi_i\right)\right\|=$

$=\min\limits_{\{\beta_i\}}\left\|z-Q\left(\sum_{i=0}^{M} \beta_i \psi_i\right)\right\| \leq \varepsilon_2$ при условиях $\sum_{i=0}^{M} \beta_i \psi_i \in X, \beta_i \in R^1$;

4) существует такое $\bar{\omega} \in \Omega$, что $\left\|\bar{\Phi}\left(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega}\right)\right\| \leq \varepsilon$;

5) выполняются неравенства $\left\|P\left(\bar{v}\right)-P\left(\tilde{v}\right)\right\| \leq c_1\left\|\bar{v}-\tilde{v}\right\|$, $\left\|Q(\bar{x})-Q(\tilde{x})\right\| \leq c_2\left\|\bar{x}-\tilde{x}\right\|$, где $\tilde{v}=\sum_{i=0}^{N} \tilde{\alpha}_i \varphi_i$, $\tilde{x}=\sum_{i=0}^{M} \tilde{\beta}_i \psi_i, c_1 \in R_{+}^1, c_2 \in R_{+}^1$;

6) выполняются неравенства $c_1\left\|\bar{v}-\tilde{v}\right\| \leq 2\varepsilon_1, c_2\left\|\bar{x}-\tilde{x}\right\| \leq 2\varepsilon_2$;

7) найдутся такие K, $\tilde{\gamma}_i \in R^1, \tilde{\mu}_i \in R^1, \left(i=\overline{0, K}\right)$, что

$$\left\|\bar{\Phi}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^{K} \tilde{\gamma}_i g_i, \sum_{i=0}^{K} \tilde{\mu}_i e_i,\right)\right\|=\min_{\{\gamma_i, \mu_i\}}\left\|\bar{\Phi}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^{K} \gamma_i g_i, \sum_{i=0}^{K} \mu_i e_i,\right)\right\| \leq \varepsilon \qquad (3)$$

при условиях $\sum_{i=0}^{K} \gamma_i g_i \in F, \sum_{i=0}^{K} \mu_i e_i \in \Omega, \gamma_i \in R^1, \mu_i \in R^1$;

8) существует такой оператор $G_1 : X \times V \times W_\varepsilon \to F$, что $\bar{f} = G_1(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}), \tilde{f} = G_1(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w})$ и $\left\| G_1(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}) - G_1(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w}) \right\| \le \bar{c}_x \|\bar{x} - \tilde{x}\| + {}$ $+ \bar{c}_v \|\bar{v} - \tilde{v}\| + \bar{c}_w \|\bar{w} - \tilde{w}\|$, где $\tilde{f} = \sum_{i=0}^{K} \tilde{\gamma}_i g_i, \bar{w} = \bar{\Phi}(\bar{x}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{\omega}),\ \tilde{w} = \bar{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{f}, \tilde{\omega})$, $W_\varepsilon = \{ w \in W : \|w\| \le \varepsilon \},\ \tilde{\omega} = \sum_{i=0}^{K} \tilde{\mu}_i e_i,\ \bar{c}_x \in R_+^1,\ \bar{c}_v \in R_+^1, \bar{c}_w \in R_+^1$;

9) существует такой оператор $G_2 : X \times V \times W_\varepsilon \to \Omega$, что $\bar{\omega} = G_2(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}), \tilde{\omega} = G_2(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w})$ и $\left\| G_2(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}) - G_2(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w}) \right\| \le \tilde{c}_x \|\bar{x} - \tilde{x}\| + {}$ $+ \bar{c}_v \|\bar{v} - \tilde{v}\| + \bar{c}_w \|\bar{w} - \tilde{w}\|$, где $\tilde{c}_x \in R_+^1, \tilde{c}_v \in R_+^1, \tilde{c}_w \in R_+^1$;

10) уравнение $\bar{\Phi}(x, v, f, \tilde{\omega}) = 0$ имеет единственное решение $x \in X$ при каждом $v \in V$ и при каждом $f \in F$.

Тогда вектор $\{\tilde{\omega}, \tilde{f}\}$ является приближенным решением задачи идентификации для ε-модели (1) при измерениях входа и выхода объекта (2), причем выполняются неравенства

$$\left\| \bar{f} - \tilde{f} \right\| \le 2 \left(\frac{\bar{c}_v}{c_1} \varepsilon_1 + \frac{\bar{c}_x}{c_2} \varepsilon_2 + \bar{c}_w \varepsilon \right), \tag{4}$$

$$\left\| \bar{\omega} - \tilde{\omega} \right\| \le 2 \left(\frac{\tilde{c}}{c_1} \varepsilon_1 + \frac{\tilde{c}_x}{c_2} \varepsilon_2 + \tilde{c}_w \varepsilon \right), \tag{5}$$

а уравнение $\bar{\Phi}(x, v, f, \tilde{\omega}) = 0$ является приближенной ε-моделью объекта.

Доказательство. В силу условий 1–3, 5, 6 получаем $\|\bar{v} - \tilde{v}\| \le \frac{2\varepsilon_1}{c_1}$, $\|\bar{x} - \tilde{x}\| \le \frac{2\varepsilon_2}{c_2}$, где $\tilde{v} = \sum_{i=0}^{N} \tilde{\alpha}_i \varphi_i, \tilde{x} = \sum_{i=0}^{M} \tilde{\beta}_i \psi_i$. Далее в силу условий 7–9 имеем $\left\| \bar{f} - \tilde{f} \right\| = \| G_1(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}) - G_1(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{w}) \| \le \bar{c}_x \|\bar{x} - \tilde{x}\| + \bar{c}_v \|\bar{v} - \tilde{v}\| + {}$ $+ \bar{c}_w \|\bar{w} - \tilde{w}\| \le \frac{2\bar{c}_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{2\bar{c}_v \varepsilon_1}{c_1} + \bar{c}_w (\|\bar{w}\| + \|\tilde{w}\|) \le 2 \left(\frac{\bar{c}_v}{c_1} \varepsilon_1 + \frac{\bar{c}_x}{c_2} \varepsilon_2 + \bar{c}_w \varepsilon \right)$ и

$\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\| \le \tilde{c}_x \|\bar{x} - \tilde{x}\| + \tilde{c}_v \|\bar{v} - \tilde{v}\| + \bar{c}_w \|\bar{w} - \tilde{w}\| \le \frac{2\bar{c}_x \varepsilon_2}{c_2} + \frac{2\bar{c}_v \varepsilon_1}{c_1} + \tilde{c}_w (\|\bar{w}\| + \|\tilde{w}\|) \le$

$\le 2\left(\dfrac{\tilde{c}_v}{c_1}\varepsilon_1 + \dfrac{\tilde{c}_x}{c2}\varepsilon_2 + \tilde{c}_w\varepsilon\right)$. Отсюда в силу малости величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon$ имеют место приближенные равенства $\tilde{x} \approx \overline{x}, \tilde{v} \approx \overline{v}, \tilde{f} \approx \overline{f}, \tilde{\omega} \approx \overline{\omega}$.

Таким образом, в силу условия 10 вектор $\{\tilde{\omega}, \tilde{f}\}$ является приближенным решением задачи идентификации для ε-модели (1) при измерениях входа и выхода объекта (2), причем выполняются неравенства (4) и (5), а уравнение $\overline{\Phi}(x, v, f, \tilde{\omega}) = 0$ является приближенной ε-моделью объекта. Теорема доказана.

Обсудим условия этой теоремы. Условие 1 означает, что в пространствах $B_1^m[\theta, T]$, $B_2^n[\theta, T]$, $B_3^q[\theta, T]$, B_4 имеются базисные системы элементов, т.е. элементы этих пространств могут быть приближены конечными линейными комбинациями базисных элементов с любой степенью точности. Условия 2, 3 дают приближения $\tilde{v}, \tilde{x}$ к $\overline{v}, \overline{x}$, сводя их вычисление к условной минимизации соответствующих функций многих переменных (эти приближения нужны для решения задачи идентификации). Условие 4 необходимо для разрешимости задачи идентификации. Условие 5 – это обобщенное условие Липшица для операторов P и Q, которое получается применением теоремы Лагранжа о среднем и ее обобщений, если эти операторы непрерывно дифференцируемы в соответствующем смысле. Проверка условия 6 затруднительна, так как $\overline{v}$ и $\overline{x}$ не известны, а известны только $\tilde{v}$ и $\tilde{x}$

Но $\|P(\overline{v}) - P(\tilde{v})\| \le c_1\|\overline{v} - \tilde{v}\|$ и $\|P(\overline{v}) - P(\tilde{v})\| = \|P(\overline{v}) - y + y - P(\tilde{v})\| \le$ $\le \|y - P(\overline{v})\| + \|y - P(\tilde{v})\| \le 2\varepsilon_1$, поэтому естественно предположить, что $c_1\|\overline{v} - \tilde{v}\| \approx 2\varepsilon_1$ (что, как правило, бывает на практике) и $c_2\|\overline{x} - \tilde{x}\| \approx 2\varepsilon_2$ (аналогично), тогда неравенства (4) и (5) дают приближенную оценку отклонения $\tilde{f}$ и $\tilde{\omega}$ от $\overline{f}$ и $\overline{\omega}$, которую можно использовать при практической идентификации. Условие 7 сводит задачу нахождения $\tilde{f}$ и $\tilde{\omega}$ к задаче условной минимизации функции многих переменных в пространстве $R^{2(K+1)}$ и к проверке неравенства (3) при $K = 0, 1, 2, \ldots$ (до тех пор, пока оно не выполнится). Условия 8, 9 сводятся к решению уравнения $\overline{\Phi}(x, v, f, \omega) = w$ относительно $\{f, \omega\}$ и проверке обобщенных условий Липшица для операторов G_1 и G_2, дающих это решение в виде $\{f,\omega\}=\{G_1(x,v,w),G_2(x,v,w)\}$. Условие 10 вытекает из определения 3, так как задача идентификации решается приближенно, и в результате мы получаем приближенную ε-модель $\bar{\Phi}(x,v,f,\tilde{\omega})=0$.

Замечание 1. Величину ε можно взять согласно неравенству $\varepsilon\le 0,01\|\Phi_1(\tilde{x},\tilde{v})\|$, если оператор $\bar{\Phi}$ имеет вид $\bar{\Phi}(x,v,f,\omega)=$ $=\Phi_1(x,v)-\Phi_2(x,v,f,\omega)$, так как из неравенства $\|\bar{\Phi}(\tilde{x},\tilde{v},\tilde{f},\tilde{\omega})\|=$ $=\|\Phi_1(\tilde{x},\tilde{v})-\Phi_2(\tilde{x},\tilde{v},\tilde{f},\tilde{\omega})\|\le 0,01\|\Phi_1(\tilde{x},\tilde{v})\|$ следует $\dfrac{\|\Phi_1(\tilde{x},\tilde{v})-\Phi_2(\tilde{x},\tilde{v},\tilde{f},\tilde{\omega})\|}{\|\Phi_1(\tilde{x},\tilde{v})\|}\le$ $\le 0,01$ (т.е. в этом случае невязка $\tilde{w}=\bar{\Phi}(\tilde{x},\tilde{v},\tilde{f},\tilde{\omega})$ достаточно мала). При этом следует отметить, что оператор $\bar{\Phi}$ имеет указанный вид для весьма широкого класса математических моделей реальных объектов.

Замечание 2. Мы здесь считаем, что $\tilde{x}\approx\bar{x}$, если $\dfrac{\|\bar{x}-\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|}\le 0,01$ (т.е. если $\|\bar{x}-\tilde{x}\|\le 0,01\|\tilde{x}\|$), где $\bar{x}$ и $\tilde{x}$ – элементы соответствующего нормированного пространства. Но не всегда запись $\tilde{x}\approx\bar{x}$ означает выполнение этого неравенства.

Из доказанной теоремы с учетом вышесказанного вытекает следующий алгоритм идентификации.

3. Алгоритм

1. Положить $N=0, M=0, K=0$.

2. Вычислить $\tilde{\alpha}_i, i=\overline{0,N}$ согласно условию 2 теоремы и проверить неравенство $\left\|y-P\left(\sum_{i=0}^{N}\tilde{\alpha}_i\varphi_i\right)\right\|\le\varepsilon_1$. Если оно выполняется, то перейти к пункту 3, а если нет, то положить $N=N_{\text{пр}}+1$, где $N_{\text{пр}}$ – предыдущее значение *N*, и перейти к пункту 2.

3. Вычислить $\tilde{\beta}_i, i=\overline{0,M}$ согласно условию 3 теоремы и проверить неравенство $\left\|z-Q\left(\sum_{i=0}^{M}\tilde{\beta}_i\psi_i\right)\right\|\le\varepsilon_2$. Если оно выполняется, то пе-

рейти к пункту 4, а если нет, то положить $M = M_{\text{пр}} + 1$ и перейти к пункту 3.

4. Проверить условие 4 теоремы. Если оно выполняется, то перейти к пункту 5, а если нет, то выдать ответ «задача идентификации не разрешима» и закончить алгоритм.

5. Проверить условия 5 теоремы, вычислив c_1 и c_2. Если они выполняются, то перейти к пункту 6, а если нет, то выдать ответ «теорема не применима» и закончить алгоритм.

6. Вычислить $\tilde{\gamma}_i, i = \overline{0, K}$, и $\tilde{\mu}_i, i = \overline{0, K}$ согласно условию 7 теоремы и проверить неравенство $\left\| \bar{\Phi}\left(\tilde{x}, \tilde{v}, \sum_{i=0}^{K} \tilde{\gamma}_i g_i, \sum_{i=0}^{K} \tilde{\mu}_i e_i \right) \right\| \le \varepsilon.$ Если оно выполняется, то перейти к пункту 7, а если нет, то положить $K = K_{\text{пр}} + 1$ и перейти к пункту 6.

7. Построить операторы G_1, G_2 согласно условиям 8 и 9 теоремы. Если это удалось, то перейти к пункту 8, а если нет, то выдать ответ «теорема не применима» и закончить алгоритм.

8. Проверить условие 10 теоремы. Если оно выполняется, то перейти к пункту 9, а если нет, то выдать ответ «теорема не применима» и закончить алгоритм.

9. Вычислить

$$\varepsilon_f = 2\left(\frac{\bar{c}_v}{c_1}\varepsilon_1 + \frac{\bar{c}_x}{c_2}\varepsilon_2 + \bar{c}_w \varepsilon \right) \text{ и } \varepsilon_\omega = 2\left(\frac{\tilde{c}_v}{c_1}\varepsilon_1 + \frac{\tilde{c}_x}{c_2}\varepsilon_2 + \tilde{c}_w \varepsilon \right).$$

10. Выдать ответ: вектор $\left\{ \tilde{\omega}, \tilde{f} \right\}$ является приближенным решением задачи идентификации для ε-модели (1) при измерениях входа и выхода объекта (2), причем выполняются приближенные неравенства $\left\| \bar{f} - \tilde{f} \right\| \le \varepsilon_f, \left\| \bar{\omega} - \tilde{\omega} \right\| \le \varepsilon_\omega$, а приближенная ε-модель имеет вид $\bar{\Phi}\left(x, v, f, \tilde{\omega} \right) = 0$.

11. Конец алгоритма.

4. Практический пример

Рассмотрим три отрасли Российской Федерации:

1) добыча полезных ископаемых;

2) обрабатывающие производства;

3) производство и распределение электроэнергии, газа и воды.

Через $\overline{x}_i(t)$ обозначим сумму основных производственных фондов (ОПФ) i-й отрасли в момент времени $t \in [\theta, T], (i = \overline{1,2,3})$, $\theta = -1$ соответствует 2003 г., $T = 11$ соответствует 2015 г. (время исчисляется в годах), $\overline{x}_i \geq 0, \overline{x}(t) = \{\overline{x}_1(t), \overline{x}_2(t), \overline{x}_3(t)\}$. Через $\overline{v}_i(t)$ обозначим интенсивность внешних инвестиций в i-й отрасль в момент времени $t \in [\theta, T], (i = \overline{1,2,3}), \overline{v}_i(t) \geq 0, \overline{v}(t) = \{\overline{v}_1(t), \overline{v}_2(t), \overline{v}_3(t)\}$.

Пусть $t_j = j, j = \overline{0,10}$, где $t_0 = 0$ соответствует 2004 г., t_{10} соответствует 2014 г., а измерения входа и выхода объекта (системы из трех отраслей РФ) имеют вид

$$y_{ij} = \overline{v}_i(t_j) + \xi_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{0,10},$$

$$\|\xi\| = \left\{ \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=0}^{10} \xi_{ij}^2 \right\}^{0,5} \leq \varepsilon_1 = 0,005 \text{ (трлн руб.)},$$

$$z_{ij} = \overline{x}_i(t_j) + \eta_{ij}, i = \overline{1,3}, j = \overline{0,10},$$

$$\|\eta\| = \left\{ \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=0}^{10} \eta_{ij}^2 \right\}^{0,5} \leq \varepsilon_2 = 0,005 \text{ (трлн руб.)}.$$

Значения y_{ij} и z_{ij} определяются по табл. 1 и 2 соответственно (согласно данным Федеральной службы государственной статистики России) в триллионах рублей.

Таблица 1

Исходные данные параметров z_{ij}

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_{1j}	2,62	3,31	4,08	4,98	6,37	7,86	9,08	10,57	12,24	14,11	15,73
z_{2j}	3,20	3,64	4,22	5,12	6,00	6,95	7,99	8,88	9,86	11,38	13,56
z_{3j}	3,03	3,41	3,61	4,09	4,93	5,74	6,77	8,53	9,76	10,68	11,80

Таблица 2

Исходные данные параметров y_{ij}

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_{1j}	0,44	0,50	0,69	0,93	1,17	1,11	1,26	1,53	1,85	2.00	2,14
y_{2j}	0,47	0,59	0,74	0,99	1,13	1,14	1,21	1,41	1,69	1,95	2,08
y_{3j}	0,20	0,24	0,30	0,47	0,62	0,68	0,82	1,02	1,17	1,19	1,19

Математическую ε-модель будем строить по аналогии с работами [13], [14] в модифицированном виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -Ax(t) + B(Hx)(t) + Rv(t) + f(t), t \in [0,T], \\ x(t) = \lambda(t), t \in [\theta, 0], \end{cases} \tag{6}$$

где $x(t) = \mathrm{col}\{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}, v(t) = \mathrm{col}\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},\ R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix},$$

$(Hx)(t) = \mathrm{col}\{x_1(t-h_1),\ x_2(t-h_2),\ x_3(t-h_3)\}$, $f(t) = \mathrm{col}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\}$, $h = \{h_1, h_2, h_3\}, \lambda(t) = \mathrm{col}\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)\}, h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 > 0,\ x \in D_2^3[\theta, T]$, $v \in L_2^3[\theta, T],\ f \in L_2^3[\theta, T],\ \lambda \in D_2^3[\theta, 0],\ L_2^3[\theta, T]$ – пространство квадратично суммируемых на $[\theta, T]$ трехмерных вектор-функций с нормой $\|v\| = \left\{ \sum_{i=1}^{3} \int_{\theta}^{T} v_i^2(t)dt \right\}^{0,5}$, $D_2^3[\theta, T]$ – пространство абсолютно-непрерывных на $[\theta, T]$ трехмерных вектор-функций с производной из $L_2^3[\theta, T]$ и нормой $\|x\| = \left\{ \sum_{i=1}^{3} [x_i^2(\theta) + \int_{\theta}^{T} \dot{x}_i^2(t)dt] \right\}^{0,5}$, $V = \left\{ v \in C^3[\theta, T] : v_i(t) \ge 0 \right\}, i = \overline{1,2,3}$,

$X = \left\{ x \in D_2^3[\theta, T] : \dot{x} \in C^3[\theta, T], x_i(t) \ge 0 \right\}, i = \overline{1,2,3}, F = C^3[\theta, T], C^3[\theta, T]$ – пространство непрерывных на $[\theta, T]$ трехмерных вектор-функций с нормой из $L_2^3[\theta, T]$, $\omega = \left\{ a_i, b_{ij}, r_i, h_i, \lambda_i(t) \right\}$, $i = \overline{1,2,3}$, $j = \overline{1,2,3}$, $\Omega = \{\omega : a_i \in [0,1],\ b_{ij} \in [0,1],\ r_i \in [0,1],\ h_i \in [0,1;1],\ \lambda \in D_2^3[\theta, 0],\ \dot{\lambda} \in C^3[\theta, 0],$ $\lambda_i(t) \ge 0\}$.

Здесь ограничения на параметры взяты из практических соображений.

Оператор $\bar{\Phi}: X \times V \times F \times \Omega \to W$ в этом случае имеет вид

$$\bar{\Phi}(x, v, f, \omega)(t) = \begin{cases} \dot{x}(t) + Ax(t) - B(Hx)(t) - Rv(t) - f(t), t \in [0, T], \\ x(t) - \lambda(t), t \in [\theta, 0], \end{cases}$$

где $W = L_2^3[0, T] \times D_2^3[\theta, 0]$ – линейное пространство векторов $w = \{w_1, w_2\}$ с нормой $\|w\| = \|\{w_1, w_2\}\| = \|w_1\| + \|w_2\|$, $w_1 \in L_2^3[0, T]$, $w_2 \in D_2^3[\theta, 0]$.

Возьмем $\tilde{a}_1 = 0,65, \tilde{a}_2 = 0,76, \tilde{a}_3 = 0,68,$ согласно данным о степени износа ОПФ для рассматриваемых отраслей, а $\tilde{v}_i, \tilde{x}_i, \overline{f_i}$ будем искать в виде

$$\tilde{v}_i(t) = \sum_{j=0}^{N} \alpha_{ij} t^j, \tilde{x}_i(t) = \sum_{j=0}^{M} \beta_{ij} t^j, \tilde{f}_i(t) = \sum_{j=0}^{K} \gamma_{ij} t^j, i = \overline{1,2,3}.$$

Тогда согласно алгоритму получаем

$$\tilde{v}_1(t) = 0,391\ 18 + 0,198\ 52t - 0,014\ 77t^2 + 0,001\ 38t^3;$$

$$\tilde{v}_2(t) = 0,444\ 40 + 0,211\ 08t - 0,017\ 93t^2 + 0,001\ 30t^3;$$

$$\tilde{v}_3(t) = 0,217\ 99 - 0,024\ 66t + 0,039\ 42t^2 - 0,002\ 77t^3;$$

$$\tilde{x}_1(t) = 1,579\,38 + 1,337\,84t, \tilde{x}_2(t) =$$
$$= 2,382\,49 + 0,992\,34t, \tilde{x}_3(t) = 1,928\,89 + 0,930\,34t;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0,65 & 0 & 0 \\ 0 & 0,76 & 0 \\ 0 & 0 & 0,68 \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,30 & 0,20 \\ 0,10 & 0,51 & 0,10 \\ 0,10 & 0,30 & 0,33 \end{pmatrix}, \begin{matrix} \tilde{h}_1 = 0,1, \\ \tilde{h}_2 = 0,1, \\ \tilde{h}_3 = 0,1, \end{matrix}$$

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{pmatrix}, \tilde{\lambda}_i(t) = \tilde{x}_i(t), t \in [\theta, 0], i = \overline{1,2,3},$$

$$\tilde{f}_1(t) = 0,704\ 99 - 0,109\ 83t + 0,005\ 91t^2 - 0,000\ 55t^3,$$

$$\tilde{f}_2(t) = 0,877\ 03 - 0,185\ 21t + 0,017\ 93t^2 - 0,001\ 30t^3,$$

$$\tilde{f}_3(t) = 0,783\ 20 - 0,104\ 15t - 0,003\ 94t^2 + 0,000\ 28t^3.$$

При этом $P(v) = \{v(0), v(1), ..., v(10)\}, Q(x) = \{x(0), x(1), ..., x(10)\}$, а $c_1 \approx 14,36, c_2 \approx 53,89$. Операторы G_1, G_2 в этом случае можно построить приближенно, решая (приближенно) систему

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) + \bar{A}\bar{x}(t) - \bar{B}(\bar{H}\bar{x})(t) - \bar{R}\bar{v}(t) - \bar{f}(t) = \bar{w}_1(t), t \in [0, T], \\ \bar{x}(t) - \bar{\lambda}(t) = \bar{w}_2(t), t \in [\theta, 0] \end{cases}$$

относительно $\{\bar{f}, \bar{\omega}\}$, где $\bar{\omega} = \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{R}, \bar{h}, \bar{\lambda}\}$ $(\bar{H}\bar{x})(t) = \mathrm{col}\{\bar{x}_1(t - \bar{h}_1\}$, $\bar{x}_2(t - \bar{h}_2), \bar{x}_3(t - \bar{h}_3)$, а $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\} = \bar{w}$, т.е. $\{\bar{f}, \bar{\omega}\} \approx \{\tilde{G}_1(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w}), \tilde{G}_2(\bar{x}, \bar{v}, \bar{w})\}$, где $\tilde{G}_1 \approx G_1, \tilde{G}_2 \approx G_2$.

При этом $\bar{c}_V \approx 1, \bar{c}_X \approx 2,27, \bar{c}_W \approx 1, \tilde{c}_V \approx 55,02, \tilde{c}_X \approx 55,02, \tilde{c}_W \approx 0,5$, $\varepsilon_f \approx 0,182, \varepsilon_\omega \approx 0,138$.

Согласно пункту 10 алгоритма имеют место приближенные неравенства

$$\left\|\bar{f} - \tilde{f}\right\| \le \varepsilon_f, \left\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\right\| \le \varepsilon_\omega, \text{ где } \|\omega\| = \left\{\sum_{i=1}^{18} \omega_i^2\right\}^{0,5} + \|\lambda\|,$$

$\omega_1 = a_1, \omega_2 = a_2, \omega_3 = a_3, \omega_4 = b_{11}, \omega_5 = b_{12}, \omega_6 = b_{13}, \omega_7 = b_{21}, \omega_8 = b_{22}, \omega_9 = b_{23}$, $\omega_{10} = b_{31}, \omega_{11} = b_{32}, \omega_{12} = b_{33}$, $\omega_{13} = r_1, \omega_{14} = r_2, \omega_{15} = r_3$, $\omega_{16} = h_1$, $\omega_{18} = h_3$, $\omega_{17} = h_2$, $\omega_{19} = \lambda_1(t), \omega_{20} = \lambda_2(t), \omega_{21} = \lambda_3(t)$. Здесь пространство $B_4 = R^{18} \times D_2^3[\theta, 0]$, а $\Omega \subset B_4$.

Таким образом, приближенное решение задачи идентификации для ε-модели (6) в этом примере имеет вид $\{\tilde{f}, \tilde{\omega}\}$, где $\tilde{f}$ и $\tilde{\omega}$ определены выше, причем имеют место приближенные неравенства (4) и (5), а относительные отклонения $\dfrac{\varepsilon_f}{\|\tilde{f}\|} \approx 0,0125$ и $\dfrac{\varepsilon_\omega}{\|\tilde{\omega}\|} \approx 0,0129$, т.е. они не превышают 1,3 %.

Приближенная ε-модель системы из трех вышеуказанных отраслей РФ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\tilde{A}x(t) + \tilde{B}(\tilde{H}x)(t) + \tilde{R}v(t) + f(t), t \in [0,T], \\ x(t) = \tilde{\lambda}(t), t \in [\theta, 0], \end{cases}$$

где $\left(\tilde{H}x\right)(t) = \operatorname{col}\left\{x_1(t-\tilde{h}_1), x_2(t-\tilde{h}_2), x_3(t-\tilde{h}_3)\right\}$, а $\varepsilon = 0{,}01\|\tilde{x}\| \approx 0{,}09$.

Как видно из этих вычислений, задача приближенной идентификации для этого примера решается достаточно эффективно.

Замечание 3. Компьютерную реализацию алгоритма для этого примера сделал аспирант М.В. Милюша с помощью пакета Maple.

Замечание 4. Задача идентификации ε-модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на объект рассматривалась нами в работе [15], где были получены теоремы и алгоритмы приближенной идентификации для случая малых неизмеряемых внешних воздействий, а в предлагаемой здесь работе сформулирована новая теорема и алгоритм решения обновленной задачи идентификации, который годится и для достаточно больших внешних неизмеряемых воздействий.

Замечание 5. О необходимости оценки неизмеряемых внешних воздействий и ее значении для прикладных задач свидетельствует интересная и ценная работа [16].

Замечание 6. Вычисления производились с точностью до пяти знаков после запятой, а результаты округлялись по обычным правилам.

Заключение

В результате исследований получены новые теорема и алгоритм, дающие приближенное решение задачи идентификации математических моделей реальных объектов при наличии неизмеряемых внешних воздействий на эти объекты. Эффективность этого алгоритма проверена на реальном примере системы из трех взаимосвязанных отраслей экономики Российской Федерации. Поставленная задача рассматривалась также в относительно недавних работах [17–22] для разных случаев математических моделей в вероятностной постановке, но не получила достаточно простого и общего решения. В процессе решения задачи идентификации нами получены приближенные значения не только параметров модели, но и неизмеряемых внешних воздействий на объект. Предлагаемая методика идентификации может быть распространена на математические модели, в которых значения входных и выходных вектор-функций времени принадлежат не R^m, R^n, R^q, а более общим нормированным пространствам (например, на модели в виде систем уравнений в частных производных и т.д.). Таким образом, эту методику можно рекомендовать для практического использования при построении математических моделей реальных объектов.

Список литературы

1. Сейдж Э.П., Мелса Д.Л. Идентификация систем управления. – М.: Наука, 1974. – 248 с.

2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 684 с.

3. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

4. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

5. Бокс Д., Дженкинс Г. Анализ временных рядов, прогноз и управление. – М.: Мир, 1974. – Кн. 1. – 406 с.; кн. 2. – 195 с.

6. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. К вопросу об идентификации функционально-дифференциальных систем с последействием // Известия вузов. Математика. – 1998. – № 3. – С. 16–27.

7. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Об идентификации некоторых классов операторных моделей эволюционного типа // Известия вузов. Математика. – 2004. – № 6. – С. 30–40.

8. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Гарантированные оценки искомых параметров в задаче идентификации математических моделей реальных объектов // Наука и бизнес: пути развития. – 2014. – № 3 (33). – С. 47–52.

9. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Приближенная идентификация при измерениях с погрешностями // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная математика и механика. – 2010. – № 15. – С. 53–61.

10. Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Идентификация математических моделей реальных объектов: теория и приложения. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2017. – 330 с.

11. Гельфандбейн Я.А., Колосов Л.В. Ретроспективная идентификация возмущений и помех. – М.: Сов. радио, 1972. – 232 с.

12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 752 с.

13. Максимов В.П. О некоторых обобщениях дифференциальных уравнений, краевых задачах и их приложениях к задачам экономической динами-

ки // Вестник Пермского государственного технического университета. – 1997. – № 4. – С. 103–120.

14. Симонов П.М. Экономико-математическое моделирование. Динамические модели экономики: учеб. пособие: в 2 ч. / Перм. гос. ун-т. – Пермь, 2009. – Ч. 2. – 273 с.

15. Култышев С.Ю., Култышева Л.М., Милюша М.В. Идентификация математической модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на моделируемый объект [Электронный ресурс] // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2018. – № 3. – С. 124–142. – URL: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/kultyshev.pdf (дата обращения: 22.07.2019).

16. Вычисление параметров мгновенного сердечного ритма в модели мультифрактальной динамики регуляризованным методом Ньютона / С.А. Михеев, В.М. Рыжиков, В.П. Цветков, И.В. Цветков // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 12. – С. 147–156.

17. Аунг Чжо Со, Макаренков А.М., Мио Паинг Сат Идентификация случайных параметров математической модели электрогидравлического следящего привода // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 2. – С. 231–235.

18. Ломов А.А. Совместная идентифицируемость параметров линейных динамических уравнений объекта и помех // Идентификация систем и задачи управления: тр. X Междунар. конф., г. Москва, 26–29 января 2015 г. / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова РАН. – М., 2015. – С. 843–853.

19. Масляев С.И. Идентификация математической модели нелинейных составных объектов [Электронный ресурс] // Электроника и информационные технологии. – 2009. – Вып. 2 (7). – С. 5. – URL: http://fetmag. mrsu.ru/2009-3/pdf/identification_of_the_mathematical_model.pdf (дата обращения: 22.07.2019).

20. Иванов Д.В., Кацюба О.А. Рекуррентная параметрическая идентификация многомерных линейных динамических систем с автокоррелированными помехами во входных и выходных сигналах // Вестник Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физико-математические науки. – 2011. – № 4(25). – С. 102–109.

21. Никишев В.К. Методы построения и исследования моделей динамических объектов и систем на основе компьютерного моделирования. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2014. – 332 с.

22. Пучков В.Ф., Грацинская Г.В. Методология построения математических моделей и оценка параметров динамики экономических систем. – М.: Креативная экономика, 2011. – 240 с.

References

1. Sage A.P., Melsa J.L. System identification. NY, Academic Press, 1971. 250 p.

2. Eykhoff P. System identification. Parameter and state estimation. University of Technology, Eindhoven, 1974, 680 p.

3. Graupe D. *Identification of systems.* NY, Krieder Publishing Company, 1976, 300 p.

4. Ljung L. *System identification.Theory for the User.* University of Linkoping, Sweden, 1986, 430 p.

5. Box D., Jenkins C. *Time series analysis: forecoasting and control.* SanFrancisco,

Holden-Day, 1970, 190 p.

6. Kultyshev S.Y., Kultysheva L.M. On the identification of functional-differential systems with aftereffect. *Russian mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika)*, 1998, vol. 42, iss. 3, pp. 13–24.

7. Kultyshev S.Y., Kultysheva L.M. On the identification of some classes of operator models of evolutionary type. *Russian mathematics (Izvestiya VUZ. Mathematika)*, 2004, vol. 48, iss.6, pp. 28–38.

8. Kultyshev S.Y., Kultysheva L.M. Guaranteed Estimations of Desired Parameters in the Problem of Identidication of Mathematical Models of Real Objects // *Science and Business: Ways of Development,* 2004, no. 3(33), pp.47–52.

9. Kultyshev S.Iu., Kultysheva L.M. Priblizhennaia identifikatsiia pri izmereniiakh s pogreshnostiami [Approximate identification in measurements with errors]. *Vestnik PSTU. Prikladnaia matematika i mekhanika,* 2010, no. 15, pp. 53–v61.

10. Kultyshev S.Iu., Kultysheva L.M. Identifikatsiia matematicheskikh modelei real'nykh ob"ektov: teoriia i prilozheniia [Identification of Mathematical Models of Real Objects: Theory and Applications]. Saarbrucken, Lambert Academic Publishing, 2017. 330 p.

11. Gel'fandbein Ia.A., Kolosov L.V. Retrospektivnaia identifikatsiia vozmushchenii i pomekh [Retrospective identification of disturbances and interference]. Moscow, Sovetskoe radio, 1972, 232 p.

12. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Funktsional'nyi analiz [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1984, 752 p.

13. Maksimov V.P. O nekotorykh obobshcheniiakh differentsial'nykh uravnenii, kraevykh zadachakh i ikh prilozheniiakh k zadacham ekonomicheskoi dinamiki [On some generalizations of differential equations, boundary value problems and their applications to problems of economic dynamics]. *Bulletin of the Perm State Technical University*, 1997, no.4, pp.103–120.

14. Simonov P.M. Ekonomiko-matematicheskoe modelirovanie. Dinamicheskie modeli ekonomiki [Economic and mathematical modeling. Dynamic models of economics]. Perm, Perm State University, 2009. 273 p.

15. Kultyshev S.Iu., Kultysheva L.M., Miliusha M.V. Identifikatsiia matematicheskoi modeli pri nalichii neizmeriaemykh vneshnikh vozdeistvii na modeliruemyi ob"ekt [Identification mathematical model of real object in the presence immeasurable external action]. *Differential Equations and Control Processes.*

2018. No.3. pp.124–142. Available at: https://diffjournal.spbu.ru/pdf/kultyshev.pdf (Accessed 22.07.2019)

16. Mikheev S.A., Ryzhikov V.M., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Vychislenie parametrov mgnovennogo serdechnogo ritma v modeli mul'tifraktal'noi dinamiki reguliarizovannym metodom N'iutona [Determination of instaneous cardiac rhythm parameters in multifractal dynamics model by regularized Newton's method]. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 29, no. 12, pp. 147–156.

17. Aung Chzho So, Makarenkov A.M., Mio Paing Sat Identifikatsiia sluchainykh parametrov matematicheskoi modeli elektrogidravlicheskogo slediashchego privoda [Identification of random parameters of mathematical model of electro-hydraulic servo drive]. *Fundamental Research*, 2016, no. 2, pp.231–35.

18. Lomov A.A. Sovmestnaia identifitsiruemost' parametrov lineinykh dinamicheskikh uravnenii ob"ekta i pomekh [Joint identifiability of parameters of linear dynamic equations of a plant and disturbances] (Proceedings of the X International Conference «Sistem identification and control problems», Moscow, January 26–29, 2015), Moscow, Control Sciences Institute of Russian Academy of Sciences, 2015, pp.843–853.

19. Masliaev S.I. Identifikatsiia matematicheskoi modeli nelineinykh sostavnykh ob"ektov [Identification of mathematical model of nonlinear composite objects]. *Identification of the mathematical model*, 2009, iss. 2 (7), pp. 1–5. Available at: http://fetmag.mrsu.ru/2009-3/pdf/identification_of_the_mathematical_model.pdf (Accessed 22 July 2019).

20. Ivanov D.V., Katsiuba O.A. Rekurrentnaia parametricheskaia identifikatsiia mnogomernykh lineinykh dinamicheskikh sistem s avtokorrelirovannymi pomekhami vo vkhodnykh i vykhodnykh signalakh [Recursive parametrical identification of multidimensional linear dynamic systems with local autocorrelated noises in input and output signals]. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences,* 2011, iss. 4(25), pp.102–109.

21. Nikishev V.K. Metody postroeniia i issledovaniia modelei dinamicheskikh ob"ektov i sistem na osnove komp'iuternogo modelirovaniia [Methods for design and researching models of dynamic objects and systems based on computer modeling]. Cheboksary, Chuvash state university Publ., 2014, 332 p.

22. Puchkov V.F., Gratsinskaia G.V. Metodologiia postroeniia matematicheskikh modelei i otsenka parametrov dinamiki ekonomicheskikh sistem [Mathematical models design methodology and estimating the dynamics parameters of economic systems]. Moscow, Kreativnaia ekonomika, 2011, 240 p.

Получено 27.12.2019

Принято 11.02.2020

Сведения об авторах

Култышев Сергей Юрьевич (Пермь, Россия) – старший научный сотрудник научно-исследовательского центра функционально-дифференциальных уравнений, Пермский национальный исследоватсльский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kultyshev.su@yandex.ru).

Култышева Людмила Михайловна (Пермь, Россия) – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика», Пермский национальный исследоватсльский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: kultysheva.lm@yandex.ru).

About the authors

Sergei Iu. Kultyshev (Perm, Russian Federation) – Senior Researcher, Science Research Centre "Functional-Differential Equations", Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: kultyshev.su@yandex.ru).

Liudmila M. Kultysheva (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolsky av., 29, e-mail: kultysheva.lm@yandex.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100-2018:

Култышев, С. Ю. Задача идентификации математической модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на моделируемый объект / С. Ю. Култышев, Л. М. Култышева. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.1.03. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 1. – С. 37–55.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Култышев С.Ю., Култышева Л.М. Задача идентификации математической модели при наличии неизмеряемых внешних воздействий на моделируемый объект // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 1. – С. 37–55. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.03

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Kultyshev S.Iu., Kultysheva L.M. The problem of identification of the mathematical model in the presence of immeasurable external influences on the simulated object. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 1, pp. 37–55. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.03 (*in Russian*)