DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.01
УДК 517.929

А.Р. Абдуллаев, А.А. Савочкина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ЛЬЕНАРА

Математическое моделирование многих задач естествознания приводит к необходимости исследования квазилинейных краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений с линейной частью, не являющейся разрешимой однозначно для всех правых частей. Специфика таких задач состоит в том, что соответствующий линейный оператор не является обратимым. В литературе такие краевые задачи принято называть *резонансными.* С 70-х гг. прошлого столетия началась разработка методов исследования резонансных краевых задач, рассматриваемых как одно операторное уравнение. Весьма важным с точки зрения приложений направлением исследований является применение общих утверждений для изучения периодических краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений.

Рассматривается задача о существовании ω-периодического решения уравнения Льенара с отклоняющимся аргументом вида

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(x_p(t))=h(t),$$
$$t\in[0,\omega],\ x_p(t)=x(p(t)).$$

Предполагается, что функция $p(t)$ измерима и $p([0,\omega])\subset[0,\omega]$. С помощью подхода, основанного на применении теорем существования для квазилинейного операторного уравнения, в работе получены достаточные условия существования хотя бы одного ω-периодического решения рассматриваемого уравнения. Полученный результат уточняет некоторые известные результаты для уравнения Льенара. Особенность полученного результата состоит в том, что при выполнении условия

$$p([0,\omega])\subset[0,\omega]$$

вид отклонения не влияет на существование решения.

Ключевые слова: уравнение Льенара, отклонение аргумента, периодическая задача, существование решения, резонансный случай, операторное уравнение, нетеров оператор, банахово пространство, вполне непрерывный оператор, норма оператора.

A.R. Abdullaev, A.A. Savochkina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

ON THE PERIODIC SOLUTIONS OF THE LIENARD EQUATION

Mathematical modeling of many problems of natural science leads to the need to study quasilinear boundary value problems for functional differential equations with a linear part that is not uniquely solvable for all right-hand parts. The specificity of such problems is that the corresponding linear operator is not reversible. In the literature, such boundary value problems are usually called resonant. Since the 70s of the last century, the development of methods for studying resonant boundary value problems considered as a single operator equation has begun. A very important area of research from the point of view of applications is the application of General statements to the study of periodic boundary value problems for functional differential equations.

The existence problem is considered ω – a periodic solution of the Lienard equation with a deviating argument of the form

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(x_p(t))=h(t),$$
$$t\in[0,\omega],\ x_p(t)=x(p(t)).$$

It is assumed that the function $p(t)$ is measurable and $p([0,\omega])\subset[0,\omega]$. Using an approach based on the application of theoretical existence for a quasilinear operator equation, sufficient conditions can be obtained in the work, at least one ω – a periodic solution must correspond to the equations. The obtained result refines some well-known results for the Lienard equations. Execution conditions

$$p([0,\omega])\subset[0,\omega]$$

decisions do not affect the existence of solutions.

Keywords: Lienard equation, argument deviation, periodic problem, existence of solution, resonance case, operator equation, Noetherian operator, Banach space, completely continuous operator, the norm of the operator.

Введение

Рассматривается задача

$$x''(t)+f(x(t))x'(t)+g(x_p(t))=h(t),$$
$$x=x(t),\ t\in[0,\omega],\ x_p(t)=x(p(t)), \tag{1}$$
$$x(0)=x(\omega),\ \dot{x}(0)=\dot{x}(\omega), \tag{2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – заданные непрерывные функции; функция $p:[0,\omega]\to[0,\omega]$ измерима.

Уравнение вида (1) впервые рассмотрел в своей работе 1928 г. Льенар [1]. Это уравнение он изучал в связи с проблемой нелинейного затухания колебаний в электрических цепях. В дальнейшем уравнение (1) для различных случаев функций f и g многие авторы исследовали как математические модели реальных процессов. Например, уравнение Льенара возникает в модели Шермана – Ринзеля – Кайзера в биомедицине [2]. Многие специалисты изучали уравнение (1) в связи с 16-й проблемой Гильберта [3, 4]. Периодическая задача (1)–(2) была рассмотрена в работе [5].

Введем в рассмотрение следующие банаховы пространства:

$L_2=L_2[0,\omega]$ – пространство суммируемых по Лебегу с квадратом на отрезке $[0,\omega]$ функций $y:[0,\omega]\to R^1$ с нормой $\|x\|_{L_2}=\left\{\int_0^\omega |x(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}$;

$W_2=W_2[0,\omega]$ – пространство абсолютно непрерывных вместе с первой производной функций $x:[0,\omega]\to R^1$, таких, что $x''\in L_2$, с нормой

$\|x\|_{W_2} = |x(0)| + |x'(0)| + \|x''\|_{L_2}$. Через W_0 обозначим подпространство пространства W_2 такое, что $W_0 = \{x \in W_2 / x(0) = x(\omega), x'(0) = x'(\omega)\}$.

Решением задачи (1)–(2) будем называть такую функцию $x \in W_2$, которая почти всюду на $L : X \to Y$ удовлетворяет уравнению (1) и периодическим краевым условиям (2).

В предлагаемой работе получены достаточные условия разрешимости задачи (1)–(2). Отметим, что для частного случая уравнения (1), когда $g(u) = u$, т.е. для уравнения Ван дер Поля, достаточные условия разрешимости периодической задачи получены в работе [6]. При этом ввиду специфики функции g соответствующий результат опирается на теорему существования, приведенную в этой же работе.

1. Общие определения и обозначения. Теорема существования

Приведем необходимые общие определения и теорему существования, которая потребуется для доказательства основных результатов. Аналогичный подход для изучения задачи (1)–(2), но с применением другой теоремы существования применяется в работе [7].

Пусть X, Y – банаховы пространства, $L : X \to Y$ – линейный ограниченный оператор с ядром $\ker L$ и образом $R(L)$. Рассмотрим оператор $L_0 x = Lx, x \in X$. Для сюръективного оператора $L_0 : X \to R(L)$ определим числовую характеристику

$$q_0(L) = \inf_{\|\omega\|=1} \|L_0^* \omega\|,$$

где $L_0^* : (R(L))^* \to X^*$ – сопряженный оператор.

Пусть $P : X \to X$ – линейный ограниченный проектор на $\ker L$. Через $K_P : R(L) \to X$ обозначим обобщенно обратный к L оператор, ассоциированный с проектором P. Для $L_0 : X \to R(L)$ оператор K_P является правым обратным. Справедлива оценка $\|K_p\|^{-1} \le q_0(L)$.

Для непрерывного оператора $F : X \to Y$ равенством

$$b_F(r) = \sup_{\|x\| \le r} \|Fx\|$$

определим функциональную характеристику степени роста нормы $\|Fx\|$ с возрастанием радиуса $r>0$. В частности, для линейного оператора $A:X\to Y$ справедливо равенство $b_A(r)=\|A\|r$.

Рассмотрим уравнение

$$Lx = Fx. \tag{3}$$

Теорему существования для уравнения (3) приведем в следующей редакции.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1) оператор L нётеров;

2) оператор F вполне непрерывен;

3) существует неотрицательная функция $\eta:[0,+\infty)\to R^1$ такая, что для каждого $x\in X$ существует $u\in \ker L$, $F(x+u)\in R(L)$, $\|u\|\le\eta(\|x\|)$;

4) неравенство $b_F(r+\eta(r))\le q_0(L)r$ имеет положительное решение.

Тогда уравнение (3) имеет хотя бы одно решение.

2. Вспомогательные конструкции и утверждения

Сформулируем вспомогательные утверждения, необходимые для применения теоремы 1 к задаче (1)–(2).

Определим операторы $L,F:W_0\to L_2$ равенствами

$$(Lx)(t)=x''(t),$$
$$(Fx)(t)=h(t)-f\left(x(t)\right)x'(t)-g(x_p(t)),\ h(t)\in L_2.$$

Оператор $L,F:W_0\to L_2$ является линейным ограниченным с ядром $\ker L=\left\{x\in W_0\ /x=\mathrm{const}\right\}$ и образом $R(L)=\left\{y\in L_2/\int\limits_0^\omega y(t)\,dt=0\right\}$. Линейные ограниченные проекторы соответственно на ядро и образ оператора $L:W_0\to L_2$ определим равенствами $P:W_0\to W_0$, $Px=x(0)$, $Q:L_2\to L_2, Qy=y(t)-\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega y(t)\,dt.$ Таким образом, оператор $L:W_0\to L_2$ является фредгольмовым, а следовательно, и нётеровым.

Вместе с проектором Q будем рассматривать дополнительный проектор $Q^c : L_2 \to L_2$, $Q^c y = \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} y(t)\,dt$, а также оператор $Q_0 : L_2 \to R(L)$, $Q_0 y = Qy$, $y \in L_2$, являющийся сужением проектора Q на образ оператора L. Проекторам P и Q соответствуют разложения пространств $X = W_0, Y = L_2$:

$$X = \ker L \oplus X_0,\ \ Y = R(L) \oplus Y_0,$$

где $\ker L = R(P)$, $X_0 = \ker P$, $R(L) = R(Q)$, $Y_0 = \ker Q$. Для рассматриваемого случая краевая задача (1)–(2) является резонансной, так как соответствующий оператор L необратим.

Лемма 1. Для произвольного $x \in W_0$ справедливы неравенства

$$|x(t)| \le \gamma_1 \|x(t)\|_{W_0},\quad |x'(t)| \le \gamma_2 \|x(t)\|_{W_0},$$

где $\gamma_1 = \max\left\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right\}$, $\gamma_2 = \max\left\{1, \sqrt{\omega}\right\}$.

Доказательство. Непосредственно из представлений

$$x(t) = x(0) + tx'(0) + \int\limits_0^t (t-s)x''(s)ds,\ x'(t) = x'(0) + \int\limits_0^t x''(s)ds,$$

справедливых для любого элемента $x \in W_0$, имеем

$$|x(t)| \le |x'(0)| + t|x(0)| + (\int\limits_0^t (t-s)^2 ds)^{1/2} \|x''\|_{L_2} \le \gamma_1 \|x\|_{W_0},$$

$$|x'(t)| \le |x'(0)| + \{\int\limits_0^{\omega} 1^2 ds\}^{1/2} \|x''\|_{L_2} \le \gamma_2 \|x\|_{W_0}.$$

Лемма доказана. В работе будем следовать понятию обобщенно обратного оператора, сформулированному в работе [8].

Лемма 2. Обобщенно обратный оператор $K_P : R(L) \to L_2$, ассоциированный с проектором P, имеет вид $(K_P y)(t) = $ $= \frac{t}{\omega}\int_0^{\omega} sy(s)\,ds + \int_0^{t}(t-s)\,y(s)ds$, и справедлива оценка $\|K_P\| \le 1+\sqrt{\frac{\omega}{3}}$.

Доказательство. Тот факт, что оператор $K_P : R(L) \to X$ является обобщенно обратным к L оператором, устанавливается непосредственно проверкой следующих условий: 1) $L\,K_P = I$, где $I : R(L) \to R(L)$ – тождественный оператор; 2) $K_P\,L = P^c$; 3) $P^c K_P = K_P$.

Для произвольного $y \in L_2$ имеем $\|K_P y\|_{W_0} \le \frac{1}{\omega}\left(\frac{\omega^3}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\|y\|_{L_2} +$ $+\|y\|_{L_2} = \left(1+\sqrt{\frac{\omega}{3}}\right)\|y\|_{L_2}$.

Таким образом, $\|K_P\| \le 1+\sqrt{\frac{\omega}{3}}$.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть выполнены условия:

1) существует неотрицательная неубывающая функция f_0 такая, что

$$|f(x)| \le f_0(|x|);$$

2) существует неотрицательная неубывающая функция g_0 такая, что

$$|g(x)| \le g_0(|x|).$$

Тогда для оператора $F : W_0 \to L_2$ справедлива оценка

$$b_F(r) \le \sqrt{\omega}(\gamma_2 f_0(\gamma_1 r)r + \varphi(r) + h_0),$$

где $\varphi(r) = \frac{\|g_0(|x(0)| + \gamma_2\omega r\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}}$, $h_0 = \frac{\|h\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}}$.

Доказательство. Произвольно зафиксируем $r>0$. Тогда для всех $x\in W_0$, удовлетворяющих неравенству $\|x\|_{W_0}\le r$, имеем

$$\left|f(x(t))x'(t)\right|\le f_0(\left|x(t)\right|)\left|x'(t)\right|\le \gamma_2 f_0(\gamma_1 r)r.$$

Так как

$$\left|x_p(t)\right|\le\left|x(0)\right|+\gamma_2\left|p(t)\right|r,$$

то

$$\left|g(x_p(t))\right|\le g_0(\left|x(0)\right|+\gamma_2\omega\, r).$$

С применением этих неравенств получим

$$\|Fx\|_{L_2}\le\|f(x)x'\|_{L_2}+\|g(x_p(t))\|_{L_2}+$$
$$+\ \|h\|_{L_2}\le\sqrt{\omega}(\gamma_2 f_0(\gamma_1 r)r+\varphi(r)+h_0),$$

где $\varphi(r)=\dfrac{\|g_0(\left|x(0)\right|+\gamma_2\omega\, r\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}}$, $h_0=\dfrac{\|h\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}}$.

Теперь утверждение леммы следует из последнего неравенства.

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть существует неотрицательное число u_0 такое, что $g(u)\operatorname{sgn}u\ge 0$ для всех $|u|\ge u_0$. Тогда для каждого $x\in W_0$ существует решение уравнения $\Theta_x(\alpha)=\int\limits_0^{\omega} g(x_p(t)+\alpha)dt=0$, удовлетворяющее неравенству

$$|\alpha|\le\left|x(0)\right|+\gamma_2\omega\|x\|_{W_0}+u_0=\alpha_0,$$

где $\gamma_2=\max\{1;\omega,\sqrt{\omega/3}\}$.

Доказательство. Поскольку $\left|p(t)\right|\le\omega, t\in[0;\omega]$, в силу леммы 3 справедливы неравенства

$$x_p((t))\ge-\left|x(0)\right|-\gamma_2\left|p(t)\right|\|x\|_{W_0}\ge-\left|x(0)\right|-\gamma_2\omega\|x\|_{W_0};$$

$$x_P((t))\le\left|x(0)\right|+\gamma_2\left|p(t)\right|\|x\|_{W_0}\le\left|x(0)\right|+\gamma_2\omega\|x\|_{W_0}.$$

Тогда для любого $t \in [0, T]$ имеют место неравенства

$$g(x_p(t) + \alpha_0) \geq 0, \; g(x_p(t) - \alpha_0) \leq 0,$$

где $\alpha_0 = |x(0)| + \gamma_2 \omega \|x\|_{W_0} + u_0$.

Следовательно, $\int\limits_0^\omega g(x_p(t)) + \alpha_0)dt \geq 0, \; \int\limits_0^\omega g(x_p(t)) - \alpha_0)dt \leq 0.$

В силу непрерывности функции $\Theta_x(\alpha) = \int\limits_0^\omega g(x_p(t) + \alpha)dt$ существует константа $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ такая, что $\Theta_x(\alpha) = 0$ и $|\alpha| \leq |x(0)| + \gamma_2 \omega \|x\|_{W_0} + u_0$.

Лемма доказана.

3. Основные результаты

Условия разрешимости задачи (1)–(2) получим, применяя теорему 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1) существует неотрицательная неубывающая функция f_0 такая, что

$$|f(x)| \leq f_0(|x|);$$

2) существует неотрицательная неубывающая функция g_0 такая, что

$$|g(x)| \leq g_0(|x|);$$

3) существует неотрицательное число u_0 такое, что

$$g(u)\operatorname{sgn} u \geq 0$$

для всех $|u| \geq u_0$;

4) неравенство

$$\sqrt{\omega}(\gamma_2 f_0(\gamma_1(r + \eta(r))(r + \eta(r)) + \varphi(r + \eta(r)) + h_0)) \leq \gamma_0 r, \tag{4}$$

где $h_0 = \frac{\|h\|_{L_2}}{\sqrt{\omega}}$, $\gamma_0 = (1+\sqrt{\frac{\omega}{3}})^{-1}$, $\gamma_1 = \max\{1, \omega, \omega\sqrt{\frac{\omega}{3}}\}$, $\gamma_2 = \max\{1, \sqrt{\omega}\}$, $\varphi(r) = \|g_0(|x(0)| + \gamma_2 \omega r)\|_{L_2}$, $\eta(r) = |x(0)| + \gamma_2 \omega r + u_0$ имеет положительное решение.

Тогда для произвольного $h \in L_2$ такого, что $\int_0^{\omega} h(s)ds = 0$, существует хотя бы одно решение задачи (1)–(2).

Доказательство. Будем рассматривать уравнение (3) с операторами $L, F: W_0 \to L_2$, определенными в подразд. 2. Оператор $L: W_0 \to L_2$ является нётеровым.

Пусть $r_0 > 0$ решение неравенства (4). Рассмотрим шар

$$U_0 = \{x \in W_0 / \|x\| \le r_0\}$$

пространства W_0.

Вполне непрерывность оператора $F: W_0 \to L_2$ на шаре U_0 доказывается по той же схеме, что и в работе [9]. Действительно, рассмотрим оператор $F: U_0 \to L_2$ в виде

$$Fx = h(t) - f(Ix)Tx - SIx,$$

где $I: W_0 \to L_2, Ix = x$ – оператор вложения; $T: W_0 \to L_2, Tx = x'$ – оператор дифференцирования, $(Sy)(t) = y(p(t))$.

Операторы $I, T: W_0 \to L_2$ являются вполне непрерывными. Ввиду этого на шаре U_0 оператор F является вполне непрерывным.

Для проверки условия 3 теоремы 1. Рассмотрим уравнение $Q_0^c F(x+u) = 0$, где $x \in X_0$, $u \in \ker L$:

$$Q_0^c F(x+u) = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\Big[h(t) - f\big(x(t)+u\big)\big(x(t)+u\big)' - g\big(x_p(t)+u\big)\Big]dt =$$

$$= \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} h(t)\,dt - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f\big(x(t)+u\big)\big(x(t)+u\big)'dt - \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} g\big(x_p(t)+u\big)dt.$$

Интеграл $\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} f\left(x+u\right)\left(x+u\right)' dt=0$ в силу краевых условий (2), а $\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} h\left(t\right)dt=0$ по условию. Тогда уравнение $Q_0^c F\left(x+u\right)=0$ принимает вид

$$\frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\omega} g\left(x_p(t)+u\right)dt=0,\ \ x\in X_0,\ \ u\in\ker L.$$

По лемме 4 существует решение $\alpha=\alpha(x)$ уравнения, удовлетворяющее неравенству $\left|\alpha\right|\le\alpha_0$, где $\alpha_0\le\left|x(0)\right|+\gamma_2\omega\left\|x\right\|_{W_0}+u_0$.

Учитывая описание ядра и образа оператора L, условие 3 теоремы 1 можно переформулировать следующим образом: для каждого элемента $x\in W_0$ существует элемент $\alpha=\alpha(x)\in\ker L$ такой, что $F(x+\alpha(x))\in R(L)$, причем

$$\left\|\alpha\right\|_{W_0}\le\alpha_0,$$

где $\alpha_0=\left|x(0)\right|+\gamma_2\omega\left\|x\right\|_{W_0}+u_0$.

Таким образом, условие 3 теоремы 1 выполнено с функцией $\eta:[0;+\infty)\to R^1$, $\eta(\left\|x\right\|)=\left|x(0)\right|+\gamma_2\omega\left\|x\right\|_{W_0}+u_0$.

Существование положительного решения неравенства (4) гарантирует выполнение условия 4 теоремы 1. Все условия теоремы 1 выполнены. Следовательно, уравнение (3) разрешимо, а периодическая задача (1)–(2) имеет хотя бы одно решение.

Теорема доказана.

Отметим, что при выполнении условия $p([0,\omega])\subset[0,\omega]$ конкретный вид отклонения аргумента $p(t)$ не влияет на условие существования периодического решения рассматриваемого уравнения.

В классической теореме Левинсона и Смита [10] предполагается, что функция $g(u)$ нечетная и $g(u)>0$ при $u>0$ (ср. с условием 3 теоремы 2). Отметим, что для частных случаев уравнения Льенара проверка условий теоремы 2, в том числе выполнения условия 4, не составляет особого труда.

Для уравнения Ван дер Поля из теоремы 2 можно получить достаточные условия разрешимости периодической задачи.

Список литературы

1. Van der Pol B. On oscillation hysteresis in a triode generator with two degrees of freedom // The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1922. – No. 43. – P. 700–719. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/14786442208633932

2. Pernarowski M., Miura R.M., Kevorkian J. The Sherman-Rinzel-Keizer model for bursting electrical activity in the pancreatic β-cell // Differential Equations Models in Biology, Epidemiology and Ecology, Proceedings of a Conference held in Claremont California, January 13–16. – California, 1990. – P. 34–53.

3. Neto A.L., W. de Melo, Pugh C.C. On lienard equations // Proc. Symp. Geom. and Topol., Springer Lectures Notes in Mathematics. – 1977. – Vol. 597. – P. 335–357.

4. Caubergh M., Dumortier F. Hilbert's 16th problem for classical Li´enard equations of even degree // Journal of Differential Equations. – 2008. – Vol. 244(6). – P. 1359–1394.

5. Чуйко С.М., Чуйко А.С., Несмелова О.В. Периодическая задача для уравнения Льенара, не разрешенного относительно производной в критическом случае // Труды Института проблем математики и механики. – 2015. – Т. 29. – С. 158–171.

6. Абдуллаев А.Р., Савочкина А.А. Периодические решения уравнения Ван дер Поля с отклоняющимся аргументом // Вестник ИжГТУ. – 2011. – № 3 (51). – С. 174–177.

7. Савочкина А.А. Периодическая задача для уравнения Льенара с отклоняющимся аргументом // Научно-технический вестник Поволжья. – 2011. – № 4. – С. 77–80.

8. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологически нетеровых операторов: учеб. пособие / Челяб. гос. ун-т. – Челябинск, 1994. – 93 с.

9. Абдуллаев А.Р., Скачкова Е.А. Периодическая краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2013. – № 13. – С. 3–10.

10. Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений: монография. – М.: Мир, 1964. – 466 с.

References

1. B. Van der Pol On oscillation hysteresis in a triode generator with two degree of freedom. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science,* 1922, no. 43, pp. 700-719. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/14786442208633932

2. Mark Pernarowski, Robert M. Miura, J. Kevorkian, The Sherman-Rinzel-Keizer Model for Bursting Electrical Activity in the Pancreatic β-Cell, Differential Equations Models in Biology, Epidemiology and Ecology. Proceedings of a Conference held in Claremont California, January 13–16, 1990, pp 34-53.

3. A. Lins Neto, W. de Melo, C.C. Pugh, On Lienard Equations, Proc. Symp. Geom. And Topol., Springer Lectures Notes in Mathematics, 1977, 597, pp. 335-357.

4. Caubergh M., Dumortier F. Hilbert’s 16th problem for classical Li´enard equations of even degree. *Journal of Differential Equations*, 2008, vol. 244(6), pp. 1359–1394.

5. Chuiko S.M., Chuiko A.S., Nesmelova O.V. Periodicheskaia zadacha dlia uravneniia L'enara, ne razreshennogo otnositel'no proizvodnoi v kriticheskom sluchae [Periodic boundary value problem of Lyenar type unresolved with respect to derivative in critical case]. *Proceedings of Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine*, 2015, vol. 29, pp. 158–171.

6. Abdullaev A.R., Savochkina A. Periodicheskie resheniia uravneniia Van der Polia s otkloniaiushchimsia argumentum [Periodic Solution of Pol van der Equation with Deviating Argument]. *Vestnik IzhGTU*, 2011, no. 3 (51), pp. 174-177.

7. Savochkina A.A. Periodicheskaia zadacha dlia uravneniia L'enara s otkloniaiushchimsia argumentom [Periodic solution of lienard equation with deviating argument]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik Povolzh'ja*, 2011, no. 4, pp. 77-80.

8. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. Elementy teorii topologicheski netero-vykh operatorov [Elements of the topologically Noetherian operators theory]. Chelyabinsk, Chelyabinsk state university. 1994, 93 p.

9. Abdullaev A.R., Skachkova E.A. Periodic boundary-value problem for a fourth-order differential equation. *Russian Mathematics*, 2013, vol. 12, pp. 1–7.

10. Chezari L. Asimptoticheskoe povedenie i ustojchivost' reshenij obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Asymptotic behavior and stability of solutions of ordinary differential equations]. Moscow, Mir, 1964, 466 p.

Получено 31.01.2020

Принято 11.02.2020

Сведения об авторах

Абдуллаев Абдула Рамазанович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Савочкина Анна Александровна (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Высшая математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: a.a.savochkina@pstu.ru).

About the authors

Abdula R. Abdullaev (Perm, Russian Federation) – Dr. Habil in Physics and Mathematics, Professor, Department of the Higher Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolskiy av., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Anna A. Savochkina (Perm, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of the Higher Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (614990, Perm, Komsomolskiy av., 29, e-mail: a.a.savochkina@pstu.ru).

Библиографическое описание статьи согласно ГОСТ Р 7.0.100-2018:

Абдуллаев, А. Р. О периодических решениях уравнения Льенара / А. Р. Абдуллаев, А. А. Савочкина. – DOI 10.15593/2499-9873/2020.1.01. – Текст : непосредственный // Прикладная математика и вопросы управления = Applied Mathematics and Control Sciences. – 2020. – № 1. – С. 7–19.

Цитирование статьи в изданиях РИНЦ:

Абдуллаев А.Р., Савочкина А.А. О периодических решениях уравнения Льенара // Прикладная математика и вопросы управления. – 2020. – № 1. – С. 7–19. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.01

Цитирование статьи в references и международных изданиях:

Cite this article as:

Abdullaev A.R., Savochkina A.A. On the periodic solutions of the Lienard equation. *Applied Mathematics and Control Sciences*, 2020, no. 1, pp. 7–19. DOI: 10.15593/2499-9873/2020.1.01 (*in Russian*)