

УДК 519.6

О.О. Соколова, О.Ю. СметанниковПермский национальный исследовательский
политехнический университет, Пермь, Россия

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО СЛИТКА

Рассматривается трехмерная задача конвективного движения вязкой жидкости в условиях фазового перехода. Разработаны математические модели процессов заливки и затвердевания стального слитка и их дискретные аналоги. Связанная гидродинамическая и тепловая задача решена численно методом конечных элементов в пакете компьютерного моделирования ProCAST 2010.0. Получено распределение усадочной пористости в теле слитка, проведен анализ влияния естественной конвекции на структуру при затвердевании. Спрогнозировано формирование макроструктуры слитка.

Ключевые слова: численное моделирование, метод конечных элементов, стальной слиток, естественная конвекция, кристаллизация, усадочная пористость, макроструктура.

O.O. Sokolova, O.Yu. Smetannikov

State National Research Polytechnic University of Perm, Perm, Russian Federation

NUMERICAL SIMULATION OF SOLIDIFICATION AND STRUCTURE FORMATION OF THE METALLIC INGOT

A three-dimensional viscous fluid flow with the convection and phase transfer is considered. Mathematical models of the filling and solidification processes in a steel ingot and their discrete analogs are developed. A coupled hydrodynamic and thermal problem is solved numerically by the software ProCAST 2010.0 based on a finite-element method. The distribution of the shrinkage porosity in the ingot's body is received and the influence of the natural convection during the solidification process on the final ingot's structure is discussed. The prediction of macrostructure formation is made.

Keywords: numerical simulation, finite-element method, steel ingot, bottom filling, natural convection, solidification, shrinkage porosity, structural zone.

Кристаллизация жидкой стали представляет собой достаточно сложный процесс, который сегодня интенсивно изучается в нашей стране и во всем мире. Основная задача исследователей в этой сфере заключается в том, чтобы научиться управлять этим процессом, т.е. научиться его оптимизировать. Применительно к стальному слитку под оптимизацией понимается прежде всего подавление физической и химической неоднородности, которая передается по наследству

соответствующей металлопродукции – будь то прокат, трубы или поковки. Актуальность проблемы становится очевидной, поскольку, даже если брак составляет доли процента, при современных масштабах производства чугуна, стали, проката количество забракованного металла измеряется миллионами тонн в год.

Из стальных кузнечных слитков небольшой массы изготавливают коленчатые, турбинные и гребные валы, а также турбинные диски, валки для холодной прокатки и другие изделия. Качество литой структуры в значительной мере определяет эксплуатационные характеристики, в том числе надежность и долговечность конечной продукции. В связи с этим актуальной представляется задача компьютерного моделирования технологии производства слитка, поскольку именно численная, виртуальная модель позволяет относительно быстро и с достаточной степенью точности проследить динамику тепловых, усадочных и других процессов в системе «отливка–форма» и, кроме того, оценить влияние на нее основных конструкционных и технологических параметров.

Цели данной работы заключаются в разработке математических моделей процессов заливки и затвердевания стального слитка, построении их дискретных аналогов и численном анализе влияния естественной конвекции на структуру при затвердевании, прогнозировании макроструктуры слитка. Используется универсальный программный продукт – система компьютерного моделирования литейных процессов ProCAST 2010.0.

1. Технология производства слитка

Обычно процесс производства слитков можно условно разделить на два этапа: разливку и кристаллизацию расплава.

В рассматриваемом сталеплавильном производстве жидкую сталь из ковша разливают в изложницы. Разливка производится сифонным способом: сталь из ковша 1 заливают в центровую литниковой системы 2, затем она по каналам в поддоне 5 поступает в изложницы 4 снизу (рис. 1). Такой способ позволяет одновременно заполнять металлическим расплавом несколько изложниц (от 2 до 60).

Сифонная разливка имеет ряд преимуществ перед разливкой сверху [1]. Во-первых, одновременная отливка нескольких слитков сокращает длительность разливки плавки и позволяет разливать в мелкие слитки плавки большой массы; во-вторых, вследствие сокращения общей длительности разливки скорость подъема металла в изложнице

может быть значительно меньшей, чем при разливке сверху; в-третьих, поверхность слитка получается чистой, так как металл в изложницах поднимается спокойно, без разбрызгивания; в-четвертых, повышается стойкость футеровки ковша и улучшаются условия работы стопора и шибера затвора вследствие меньшей длительности разливки и уменьшения числа открываний и закрываний стопора или затвора; и, что немаловажно, во время разливки можно следить за поведением поднимающегося металла в изложнице и в соответствии с этим регулировать скорость разливки. Однако очевидны следующие недостатки: сложность и повышенная стоимость разливки, обусловленные расходом сифонного кирпича, установкой дополнительного оборудования и значительными затратами труда на сборку поддонов и центровых; дополнительные потери металла в виде литников (0,7–2,5 % от массы разливаемой стали) и возможность потерь при прорывах металла через сифонные кирпичи; необходимость нагрева металла в печи до более высокой температуры, чем при разливке сверху, так как он дополнительно охлаждается в каналах сифонного кирпича.

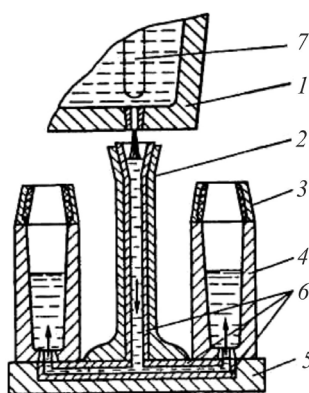


Рис. 1. Схема сифонной разливки стали:
1 – сталеразливочный ковш, 2 – центровая,
3 – прибыльная надставка, 4 – изложница,
5 – поддон, 6 – сифонный кирпич, 7 – стопор

Как правило, сифонным способом отливают слитки небольшой массы. Между тем при переходе к сифонной отливке более массивных слитков возрастает вероятность развития усадочных дефектов в осевой части слитка.

Вторая стадия получения слитка – кристаллизация жидкого металла в форме. Как отмечалось выше, структура, образующаяся в процессе кристаллизации, определяет многие свойства изделия. Поэтому на этой стадии важно получить однородный по химическому составу, механическим и физическим свойствам, а также не содержащий значительных дефектов металл.

Формирование структуры происходит в двухфазной зоне, представляющей собой гетерогенную зону из растущих кристаллов с окружающим расплавом. Средний размер кристаллов прямо пропорционален ширине этой зоны, которая, в свою очередь, обратно пропорциональна отводимому потоку тепла [2]. Теплофизические явления, происходящие в двухфазной зоне, включают взаимосвязанные процессы теплоассопереноса, фильтрацию расплава в междендритном пространстве, формирование растущих кристаллов.

2. Постановка задачи и исходные данные

Ключевыми вопросами в оптимизации технологии изготовления слитка обозначим исследование циркуляции жидкого металла при заливке и его последующее охлаждение, анализ температурных полей и условий теплообмена при кристаллизации слитка с учетом естественной конвекции расплава, расчет осевой усадочной пористости, прогнозирование структуры литого металла.

Исследуется слиток массой 6 тонн, который отливают из стали 42CrVMo в предварительно разогретую до 100 °С чугунную форму. Температура заливки составляет 1575 °С. Температура окружающей среды 20 °С. Заливку производят постепенно, регулируя скорость по мере заполнения формы (табл. 1).

Таблица 1

Изменение скорости подачи расплава с течением времени

Время, с	Скорость, м/с
0	1,2
240	1,2
241	0,6
360	0,6
361	0

Время выдержки слитка в изложнице 3 часа. Геометрические характеристики слитка: $H/D = 2,7$, конусность слитка на одну сторону 9 %, характерные размеры слитка: 800×600×1875 мм. Конечно-элементная модель расчетной области состоит из нескольких областей: внешней оболочки, определяющей границу радиационного теплоотвода, изложницы, поддона, прибыльной надставки, теплоизоляционного вкладыша и самого тела слитка (рис. 2).

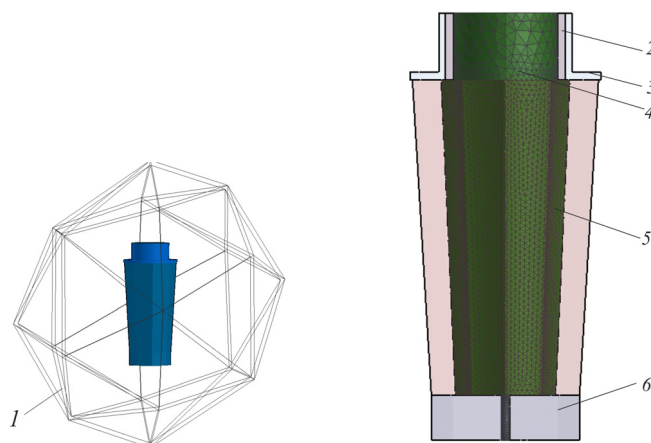


Рис. 2. Модель расчетной области: 1 – внешняя оболочка; 2 – теплоизоляционный вкладыш; 3 – прибыльная надставка; 4 – прибыль; 5 – тело слитка; 6 – поддон

Теплофизические свойства материала отливки рассчитаны по химическому составу с применением модуля Thermodynamic Database, свойства формы и теплоизоляционного вкладыша взяты из встроенной базы данных (рис. 3).

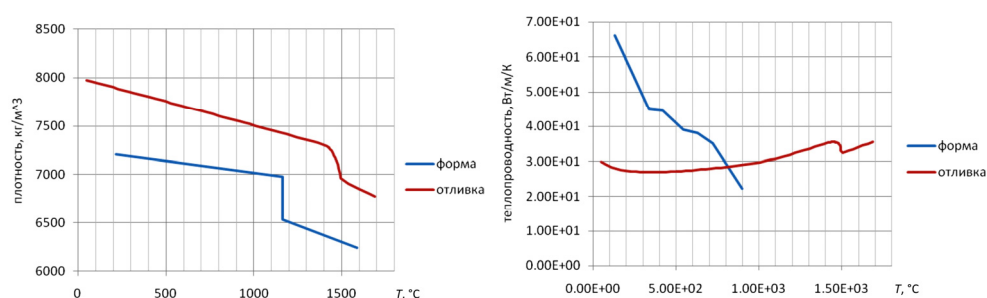


Рис. 3. Зависимости плотности и теплопроводности материалов отливки и формы от температуры

Охлаждение на границе «форма–окружающая среда» задавалось через комбинацию конвективного и лучистого теплообмена, на границе «отливка–форма» – кондуктивно-конвективный теплообмен, а на границах «отливка–вкладыш», «вкладыш–форма» – кондуктивный теплообмен.

3. Математическая постановка связанной гидродинамической и тепловой задачи

Вводятся следующие обозначения. Индексы о, ф, у, с соответствуют области отливки, формы, утепляющего вкладыша, окружающей среды.

В области Q_o (рис. 4) рассматривается неизотермическое течение несжимаемой ньютоновской жидкости. Используется однофазный подход. Граница раздела фаз явным образом не выделяется.

Дифференциальное уравнение движения в Q_o

$$\begin{aligned} \rho_o \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + \frac{\rho_o}{2} \text{grad}(\mathbf{v}^2) + 2\rho_o (\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v}) = \\ = \rho_o \mathbf{g} - \text{grad}(p) + \text{grad}[\mu \text{div}(\mathbf{v})] + \frac{\mu}{K} \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{g}=(0,0,g)$ – ускорение свободного падения; ρ – плотность; p – давление; μ – коэффициент кинематической вязкости; τ – время; $\mathbf{v}=(v_1, v_2, v_3)$ – вектор эффективной скорости расплава, рассчитываемый через истинную скорость жидкой фазы $\mathbf{v}_l$: $\mathbf{v}=f_l \mathbf{v}_l$; f_l – доля жидкой фазы; K – проницаемость дендритного каркаса, рассчитываемая по формуле Козени-Кармана [3]: $K=\frac{f_l^3}{kS_v^2}$; k – постоянная Кармана, $k=5$; S_v – удельная поверхность твердой фазы (на единицу объема) в предположении, что частицы одинаковы по размеру и имеют сферическую форму: $S_v=\frac{6(1-f_l)}{D}$; D – характерный размер дендрита.

Последнее слагаемое в правой части уравнения соответствует массовой силе сопротивления потока расплава росту дендритов.

Граничные условия

1. $\mathbf{v} = 0$ на $\Gamma_1'(\tau)$ – условие полного прилипания вязкой среды к твердой поверхности.

2. $\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p^0 \mathbf{n}$ на $\Gamma_2(\tau)$ – равенство нормальных напряжений давлению газа над свободной поверхностью p^0 , $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к $\Gamma_2(\tau)$. Считается, что для спокойной стали свободная поверхность расплава является плоской, поэтому ее кривизной пренебрегаем.

3. Пусть уравнение свободной поверхности имеет вид $F(x_1, x_2, x_3, \tau) = x_3 - \xi(x_1, x_2, \tau) = 0$, тогда $\frac{dF(x_1, x_2, x_3, \tau)}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial \tau} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}(F) = 0$ на $\Gamma_2(\tau)$ – в Эйлеровой форме условие продвижения свободной поверхности во времени и пространстве (используется для нахождения формы свободной поверхности).

*Примечание. На границе перехода от твердо-жидкой к абсолютно твердой фазе $\Gamma_{fs}(\tau)$ скорость $\mathbf{v}$ автоматически становится равной 0, поскольку $\mathbf{v} = f_l \mathbf{v}_l$, а $f_l = 0$ на $\Gamma_{fs}(\tau)$.

4. $\lambda_\phi \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_o \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_{o-\phi} (T_o - T_\phi)$ на $\Gamma_1'(\tau)$ – условия стыковки.

5. $\lambda_o \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_{o-c} (T_o - T_c) - \varepsilon \sigma (T_o^4 - T_c^4)$ на $\Gamma_2(\tau)$, где σ – постоянная Стефана-Больцмана, ε – степень черноты материала отливки.

Начальные условия

Предполагается, что в начальный момент времени свободная поверхность является плоской и известно начальное распределение скоростей на ней: $v_1 = v_2 = 0$; $v_3 = 0,12$ м/с.

В начальный момент времени температура в точках свободной поверхности $T = 1575$ °С.

Дифференциальное уравнение энергии в Q_ϕ при $\tau > 0$

$$\rho_\phi \frac{\partial H_\phi}{\partial \tau} - \text{div} [\lambda_\phi(T) \text{grad}(T)] = 0, \quad H_\phi(T) = \int_0^T c_{\rho_\phi}(T) dT. \quad (4)$$

Дифференциальное уравнение энергии в Q_y при $\tau > 0$

$$\rho_y \frac{\partial H_y}{\partial \tau} - \operatorname{div} [\lambda_y(T) \operatorname{grad}(T)] = 0, \quad H_y(T) = \int_0^T c_{py}(T) dT. \quad (5)$$

Таким образом, в области, занятой твердыми телами, численно решаются нестационарные уравнения нелинейной теплопроводности (4), (5) (нелинейность возникает из-за заданных функциональными зависимостями теплофизических свойств тел), дополненные граничными и начальными условиями.

Начальные условия

$$T = 100^\circ \text{C} \text{ в } Q_\phi \cup Q_y.$$

Граничные условия

- 1) $[T] = 0$ на $\Gamma_1''(\tau)$.
- 2) $\lambda_\phi \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_{\phi-c}(T_\phi - T_c) - \varepsilon \sigma (T_\phi^4 - T_c^4)$ на Γ_3 .
- 3) $\lambda_o \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_{o-y}(T_o - T_y)$ на $\Gamma_4'(\tau)$.
- 4) $[T] = 0$ на $\Gamma_4''(\tau)$.
- 5) $\lambda_y \frac{\partial T}{\partial n} = -\alpha_{y-c}(T_\phi - T_c)$ на Γ_5 .
- 6) $\lambda_\phi \frac{\partial T}{\partial n} = \lambda_y \frac{\partial T}{\partial n}, [T] = 0$ на Γ_6 .

Значения коэффициентов теплоотдачи α назначаются в соответствии с [9].

4. Результаты моделирования заливки расплава

На рис. 5 представлены основные результаты расчета заливки. Среднее падение температур по толщине изложницы составляет около 100°C , что можно объяснить интенсивным теплоотводом от ее поверхности. Тепловые поля на форме в момент завершения заливки приведены на рис. 5, а. Опасно перегретых зон на форме в течение заливки не обнаружено. Можно отметить сильный разогрев теплоизоляционного вкладыша, что, безусловно, является положительным фактором, поскольку препятствует теплоотводу через прибыльную часть. Толщина твердой корочки металла, образовавшейся на стенках изложни-

цы к моменту окончания заливки, составляет 7–10 см (рис. 5, б). Отметим ее отсутствие в прибыльной части слитка. Это можно объяснить, во-первых, уменьшением теплоотвода от расплава из-за низкой теплопроводности материала вкладыша, во-вторых, непосредственно самими условиями сифонной заливки, когда расплавленный металл заполняет тело слитка и только потом прибыльную часть. Кроме того, есть возможность оценить циркуляцию потоков расплава при заливке (см. рис. 5, б). Средняя скорость при заливке равна 0,9–1,1 м/с.

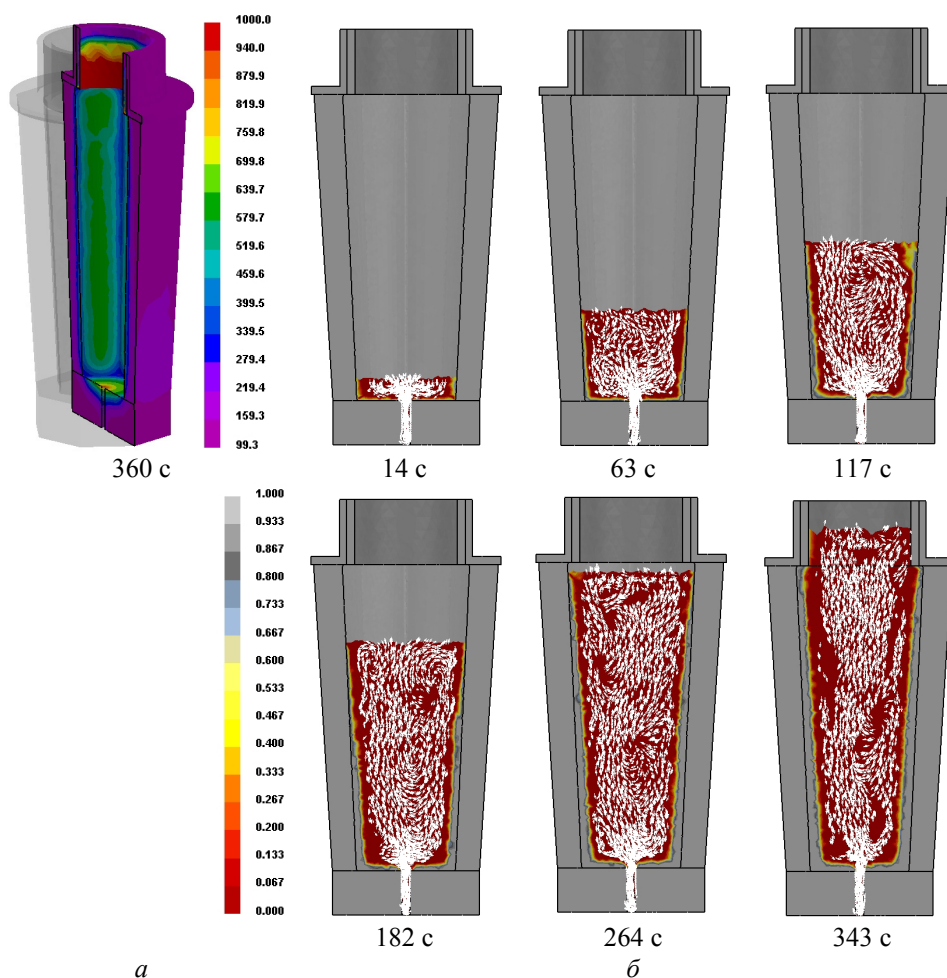


Рис. 5. Распределение полей (а) температур на оснастке в конце заливки, (б) фазового состояния расплава с характером циркуляции потоков (белым цветом показаны векторы скорости) в течение заливки

5. Результаты моделирования затвердевания слитка без учета и с учетом естественной конвекции расплава

При изготовлении стальных слитков нужно избавляться от осевой пористости в изделии, поскольку этот дефект не всегда возможно полностью устранить при дальнейшей обработке литой заготовки.

Поскольку конвективное движение в жидком ядре слитка относительно твердой фазы может существенно изменить протекание процесса кристаллизации, учтем конвективные члены при решении задачи с фазовыми переходами.

Отметим следующие механизмы воздействия конвективных потоков. Увеличивается темп переноса тепла на границе затвердевания, благодаря чему возрастает скорость продвижения границы. Изменяется структура слитка, в частности происходит переход от волокнистой структуры к глобулярной с мелкими неориентированными кристаллами. И, наконец, изменяется распределение примеси, а также темп переноса неметаллических включений в жидкой фазе слитка.

Причинами естественной конвекции может выступать ряд факторов: перегрев расплава относительно температуры затвердевания, градиенты сил поверхностного натяжения на свободной поверхности расплава и др.

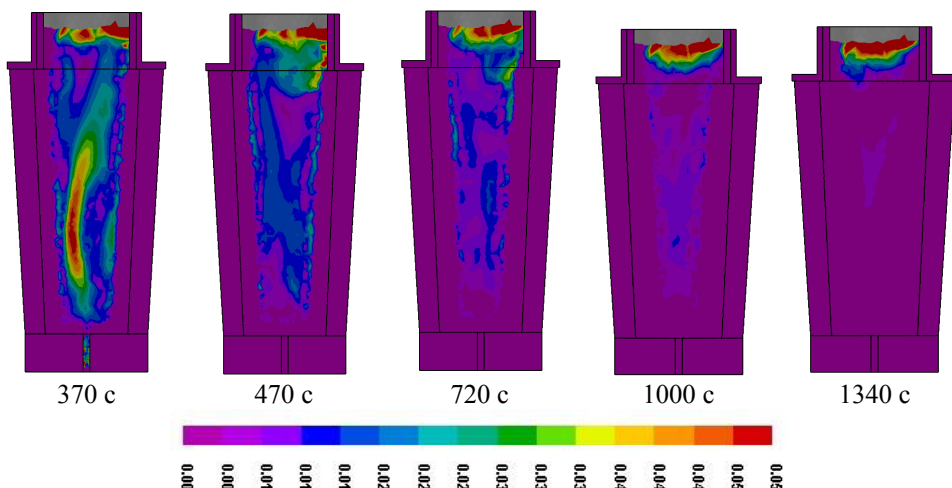


Рис. 6. Средняя скорость течения расплава в поперечном сечении, м/с

При моделировании затвердевания слитка с учетом естественной конвекции проводились расчеты, в которых решение задачи гидродинамики расплава после окончания заливки не отключалось.

Скорость циркуляции расплава в жидком ядре слитка (рис. 6) падает на порядок по сравнению со скоростью в процессе заливки. После 1500 с ее величина составляет 0,001–0,002 м/с, со временем уменьшаясь до нуля.

Геометрия слитка не позволяет обеспечить постепенное затвердевание осевой его части, что влечет за собой большую вероятность образования осевых рыхлот и трещин. Распределение усадочной пористости приведено на рис. 7. Хотя наибольшая несплошность в случае расчета с конвекцией наблюдается в том же положении, что в расчете без конвекции, можно отметить более широкую зону с повышенной рыхлотой.

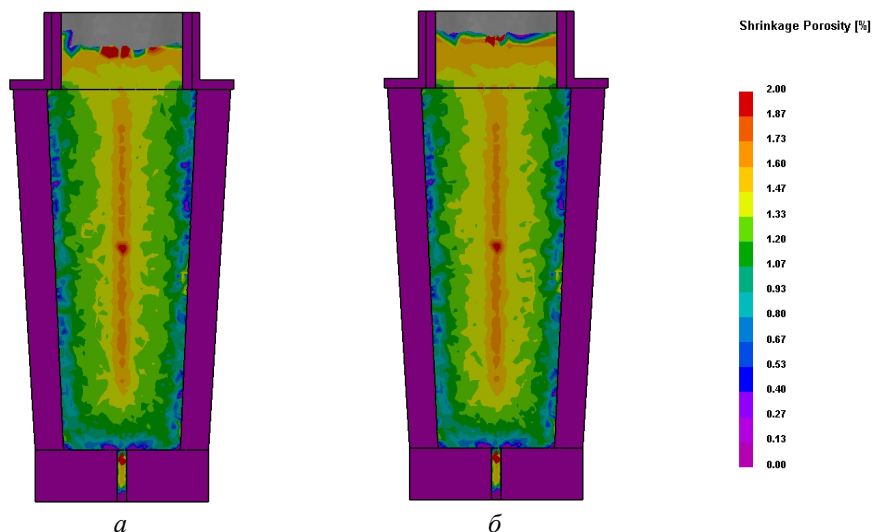


Рис. 7. Распределение усадочной пористости после затвердевания:
а – без конвекции, б – с конвекцией

6. Формирование макроструктуры в затвердевающем расплаве

В процессе своего формирования макроструктура твердого тела проходит через стадию гладких форм кристаллов, ячеистого роста, дендритов, снова ячеистого роста и гладких форм [4].

Таким образом, при высокой интенсивности теплоотвода возникает большое число центров кристаллизации и формируется приповерхностная зона мелких равноосных (замороженных) кристаллов. При

этом выделяется значительное количество тепла, из-за чего становится возможным только рост зародившихся кристаллов – образуется зона столбчатых кристаллов, вытянутых в направлении теплоотвода (рис. 8). Идей, объясняющих следующий переход (от зоны столбчатых к равноосным кристаллам), на данный момент существует несколько [5–7]. Мы остановимся на концепции диффузионного переохлаждения. Согласно ей перед движущимся фронтом кристаллизации достигается такое переохлаждение, при котором не только растут, но и зарождаются новые кристаллы. Так, последовательное затвердевание (столбчатая зона) сменяется объемным (зона равноосных кристаллов). Математически это выражается соотношением

$$\frac{G}{V} \leq A^* = \frac{\alpha C_0 (1-k)}{kD} \left(1 - \sqrt{\frac{k \Delta T^*}{\alpha C_0 (1-k)}} \right),$$

где G – градиент температуры перед фронтом кристаллизации;
 V – скорость движения изотермы ликвидуса;
 α – угол наклона линии ликвидуса на диаграмме состояния сплава;
 k – равновесный коэффициент распределения примеси;
 D – эффективный коэффициент массопереноса в расплаве;
 ΔT^* – критическое диффузионное переохлаждение сплава, которое он может выдержать;
 C_0 – исходная концентрация примеси.

Моделирование проводится методами стохастического анализа, в основе которых заложен метод клеточных автоматов [8]. Пространственное распределение центров кристаллизации в расплаве металла подчиняется случайным законам распределения, например описывается законом Гаусса.

На основании полученного распределения кристаллов можно сделать вывод, что на начальном этапе кристаллизации зарождается большое количество центров кристаллов сначала на ребрах слитка и только потом на вогнутых гранях. Получается нечто вроде жесткого каркаса, препятствующего образованию трещин на поверхности слитка.

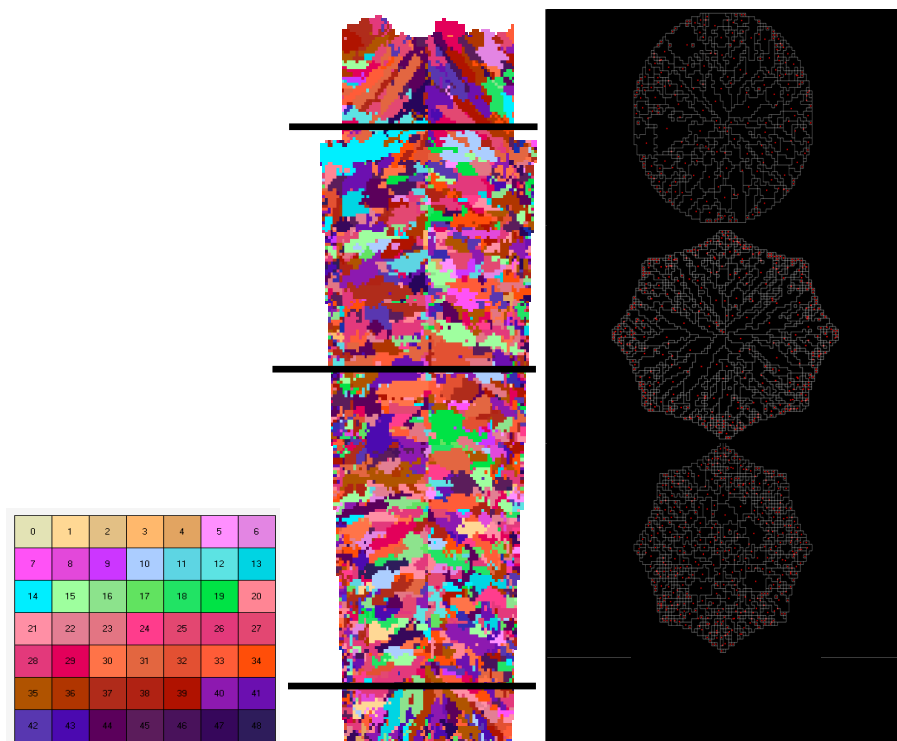


Рис. 8. Макроструктура слитка в продольном (цветом показана ориентация кристаллов, т.е. угол между направлением роста кристалла и направлением теплоотвода) и поперечном сечении (красным цветом обозначены центры зарождения кристаллов, белым – их границы)

По достижении времени 1500 с, когда скорости циркуляции расплава становятся пренебрежимо малыми, начинается конкурентный рост столбчатых кристаллов: те из них, которые имеют более благоприятную ориентацию, начинают вытеснять растущих с большим отклонением от предпочтительного направления роста.

Также стоит отметить, что третья зона (зона равноосных кристаллов) в центре слитка выражена слабо. В осевой зоне, в местах стыка столбчатых кристаллитов, растущих от противоположных стенок изложницы, из-за слабых границ зерен и наличия междендритной ликвации возможно ухудшение качества металла, а следовательно, и его механических свойств.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 13.G25.31.0093 от 22.10.2010 г. в составе мероприятия по реализации постановления Правительства РФ № 218).

Библиографический список

1. Воскобойников В.Г., Кудрин В.А., Якушев А.М. Общая металлургия. – М.: Академкнига, 2005. – 768 с.
2. Цаплин А.И. Теплофизика внешних воздействий при кристаллизации стальных слитков на машинах непрерывного литья; УрО РАН. – Екатеринбург, 1995. – 238 с.
3. Ромм Е.С. Структурные модели порового пространства горных пород. – Ленинград: Недра, 1985. – 240 с.
4. Виноградов В.В., Тяжелникова И.Л. О теоретических аспектах формирования макро- и микроструктуры в затвердевающем металлическом слитке // Вестник Удмуртского университета Физика. Химия. – Ижевск, 2008. – № 1 – С. 37–56.
5. Флемингс М. Процессы затвердевания. – М.: Мир, 1977. – 424 с.
6. Оно А. Затвердевание металлов. – М.: Металлургия, 1980. – 152 с.
7. Физическое металловедение / под ред. Р.У. Кана, П. Хаазена. – М.: Металлургия, 1987. – Т. 2. – 624 с.
8. Gandin Ch.-A., Rappaz M. A coupled finite element – cellular automaton model for the prediction of dendritic grain structures in solidification processes // Acta metal mater. – 1994. – Vol. 42, No 7. – P. 2233–2246.
9. Дубровская А.С., Донгаузер К.А. Численное исследование влияния технологических и конструкционных параметров на процесс изготовления монокристаллических отливок деталей газотурбинных двигателей // Вестник ПГТУ Прикладная математика и механика. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2011. – № 9. – С. 81–102.

References

1. Voskoboinikov V.G., Kudrin V.A., Yakushev A.M. General metallurgy [*Obshchaja metallurgija*]. Moscow: IKTs “Academkniga”, 2005, 768 p.
2. Tsaplin A.I. [*Teplofizika vneshnikh vozddeistvij pri kristallizatsii stal'nykh slitkov na mashinah nepreryvnogo lit'ya*]. Ekaterinburg, UrO RAN, 1995. 238 p.
3. Romm E.S. [*Strukturnye modeli porovogo prostranstva gornykh porod*]. Leningrad: Nedra, 1985. 240 p.
4. Vinogradov V.V., Tyazhelnikova I.L. Theoretical aspects of formation of macro- and microstructures during ingot solidification, Herald of the UDGU, 2008, No. 1, P. 37–56.

5. Flemings M. Solidification process. Moscow: Mir, 1977. 424 p.
Ono A. Solidification of metals. Moscow: Metallurgy, 1980. 152 p.

7. Kan [*Fizicheskoye metallovedenie*]. Moscow: Metallurgy, Vol. 2. 624 p.

8. Gandin Ch.-A., Rappaz M. A coupled finite element – cellular automaton model for the prediction of dendritic grain structures in solidification processes, *Acta metal mater*, 1994, Vol. 42, No. 7, pp 2233-2246.

9. Dubrovskaya A.S., Dongauser K.A. Numerical investigation of influence technological and constructional parameters on the process of manufacturing single-crystal castings of gas turbine engines, *Herald of the PSTU*, 2011, No. 9, P. 81–102

Об авторах

Соколова Ольга Олеговна (Пермь, Россия) – аспирант кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: o_lli@bk.ru).

Сметанников Олег Юрьевич (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: sou2009@mail.ru).

About the authors

Sokolova Olga Olegovna (Perm, Russian Federation) – postgraduate student, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm State University (614990, 29, Komsomolsky prospect, Perm, Russian Federation, email: o_lli@bk.ru).

Smetannikov Oleg Yuriyevich (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Department of Computational Mathematics and Mechanics, Perm State University (614990, 29, Komsomolsky prospect, Perm, Russian Federation, e-mail: sou2009@mail.ru).

Получено 19.02.2012