УДК 539.3: 517.95

С.А. Берестова, Ш.М. Хананов

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург

О НЕКОТОРЫХ ПУТЯХ СТАНОВЛЕНИЯ СТРУКТУРНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ В МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Приведен хронологический обзор работ, посвященных возникновению и развитию структурно-феноменологических подходов в определении упругих характеристик анизотропных материалов.

Ключевые слова: анизотропия, упругие характеристики, текстура, методы усреднения, поликристаллы, композиционные материалы.

Согласно историческому обзору А. Лява (1935) [1] первым ученым, который изучал сопротивление твердых тел внешним нагрузкам, был Галилео Галилей (1638). Его работа, посвященная решению частной задачи о разрушении консольной балки от собственного веса и веса подвешенного груза, указала путь, по которому пошли последующие исследователи.

В 1660 г. на основе экспериментальных исследований связи между приложенной к твердому телу силой и вызываемым ею перемещением Роберт Гук открыл закон этой связи, который опубликовал в традициях того времени в 1676 г. в виде анаграммы CEIIINOSSSTTUV. Анаграмма была расшифрована через год, и человечество получило: ut tensio sic vis, т.е. сила всякой пружины пропорциональна ее натяжению. Под пружиной Гук понимает всякое пружинящее тело, а под натяжением – удлинение. Независимо от Гука в 1680 г. Эдм Мариотт установил тот же закон, который применил к решению задачи Галилея.

Первую характеристику упругих свойств твердого тела дал в 1776 г. Томас Юнг. «Модуль упругости какого-либо вещества», названный в дальнейшем его именем, он определяет как «колонну из того же самого вещества, производящую на основание давление, отношение которого к нагрузке, необходимой для доведения вещества до некоторой степени сжатия, равно отношению первоначальной длины к укорочению». Юнг был первым, кто рассматривал сдвиг как упругую деформацию, но не ввел модуля, характеризующего сопротивления сдвигу.

Первым исследователем, попытавшимся в 1821 г. построить общие уравнения математической теории упругости, был Анри Навье. Исходя из концепции Ньютона о строении вещества, он рассматривал изотропное тело как совокупность материальных точек, находящихся в поле центральных сил. Полученные им уравнения содержат одну константу, характеризующую упругие свойства тела.

В 1822 г. Огюстен Луи Коши формулирует большинство основных понятий теории упругости. Он вводит понятие о напряжении в данной точке, обобщая понятие о гидростатическом давлении. Выражает деформацию в окрестности данной точки через компоненты деформации, определяемые как производные от трех проекций смещений. Выводит дифференциальные уравнения движения, связав компоненты напряжений в точке с силами, распределенными по объему, и силами инерции. При помощи постулируемых линейных соотношений между компонентами напряжений и деформаций он исключает из уравнений движения компоненты деформаций и получает уравнения, которым должны удовлетворять проекции смещений. Эти уравнения содержали две материальные константы. В дальнейшем Коши, основываясь на гипотезе о взаимодействующих в поле центральных сил материальных точках, распространил свою теорию на кристаллические тела. Если начальное состояние тела ненапряженное, то полученные им уравнения в общем случае анизотропии содержат 15 материальных констант, при изотропном распределении точек они переходят в уравнения Навье с одной постоянной материала. К этим же результатам пришел в 1828 г. Симеон Дени Пуассон.

Принципиальное значение для развития методов теории упругости имели работы Джорджа Грина (1839), который ввел понятие упругого потенциала (удельная энергия деформированного тела) и на его основе методами аналитической механики получил основные уравнения теории упругости. Рассматривая упругий потенциал в виде квадратичной функции малых деформаций, он получает уравнения, содержащие 21 постоянную в общем случае анизотропии, которые для изотропного тела переходят в уравнения первой работы Коши по этому вопросу с двумя упругими константами материала. Доказательство существования упругого потенциала дал лорд Кельвин (1856) [2].

Первым, кто сумел понять, что объемное сжатие и сдвиг являются двумя основными видами напряженного состояния изотропных тел, и ввел два модуля, характеризующих эти состояния, называемые ныне «модуль объемного сжатия» и «модуль сдвига», был Джордж Габриель Стокс (1849) [3]. Основываясь на экспериментальных данных, вытекающих из закона Гука, он получил для изотропного тела уравнения теории упругости, совпадающие с уравнениями Грина.

Таким образом, сложилась ситуация, когда разные теории описывали упругое поведение твердого тела с использованием разного количества упругих констант. При этом уравнения одной теории, содержащей большее количество констант, при определенных соотношениях между ними (соотношения Коши) переходили в уравнения другой теории. Возникший на основе этого спор между сторонниками «мультиконстантной» и «рариконстантной» теориями сводился к тому, описывается ли поведение твердого тела двумя или одной константами. Сторонником рариконстантной теории был, в частности, Б. Сен-Венан (1948) [4]. Попытка решить спор на основе экспериментов с изотропными материалами не приводила к успеху, и только эксперименты В. Фойгта с кристаллами поставили в этом вопросе точку. Им было обнаружено, что в общем случае соотношения Коши не выполняются (1887). Тем не менее для кристаллов с ионными связями наблюдается поразительное совпадение с предсказаниями первой структурной теории.

Не лишним будет заметить, что такое повышенное внимание выдающихся умов XIX в. к проблемам теории упругости было связано с попытками объяснить оптические явления на основе механистических теорий светового эфира как сильно разреженной среды из материальных частиц, обладающей свойствами упругости.

Рариконстантная теория сошла со сцены, как не отвечающая полученным в скором времени новым научным представлениям о природе вещества, но ее методологическое значение нельзя недооценивать. Это первая теория, которая пыталась объяснить поведение твердого тела исходя из модельных представлений о его структуре. И если на уровне микрочастиц такое описание неверно, то для масштабов применимости феноменологических методов (методов континуальных теорий) структурный подход оказывается весьма плодотворным, о чем свидетельствует его широкое использование и развитие на протяжении всего XX в. Отход от идеи макроскопического детерминизма при по-строении моделей сплошных сред закономерен и предполагает возможность использования методов физического исследования на структурном уровне, применения соответствующих физических гипотез и установку связей между параметрами структурных и макроскопических теорий.

Наличие информации об упругих константах кристалла, количество которых в общем случае анизотропии равно 21 и снижается в зависимости от вида его симметрии, наводит на мысль получить упругие характеристики поликристалла простым усреднением. В предположении, что ориентация зерен в поликристалле равновероятна и поликристалл, как любое изотропное тело, характеризуется двумя упругими константами, эта задача была решена сначала В. Фойгтом (1928) [5] путем усреднения матрицы упругих модулей кристалла, а затем А. Ройсом (1929) [6] – из усреднения обратной матрицы, матрицы коэффициентов податливости. Более детальное рассмотрение, выполненное Р. Хиллом (1952) [7], показало, что эти усреднения соответствуют предположениям об однородности деформаций в поликристалле – в первом случае, и однородности напряжений – во втором, а поЛучаемые значения объемного модуля и модуля сдвига поликристалла дают верхнюю и нижнюю вариационные границы для его эффективных свойств. Для квазиизотропного поликристалла эти границы не достигаются, и получаемый интервал их возможных значений может быть достаточно широким в случае большой анизотропии упругих свойств поликристалла. Дальнейшее исследование проходило по пути отыскания эффективных упругих характеристик квазиизотропных поликристаллов в рамках тех или иных упрощающих гипотез и попыток найти для них более узкий интервал возможных значений.

Наиболее общий подход к определению эффективных упругих свойств композиционных материалов состоит в определении возможных пределов изменения этих свойств исходя из вариационных принципов. Исторически усреднения В. Фойгта и А. Ройса были первыми моделями, позволяющими строго оценить верхнюю и нижнюю границы эффективных констант для композиционных материалов. При произвольном статистическом распределении фаз были получены более узкие границы (вилка) З. Хашина – С. Штрикмана (1963) [8]. Однако область применения данного подхода ограничена композитами, свойства фаз которых близки. Например, для случая пустот (включения с нулевыми модулями упругости) данные оценки дают тривиальные результаты, т.е. верхняя оценка для упругих модулей соответствует сплошному материалу, а нижняя − материалу с нулевыми модулями. Подобные результаты наблюдаются при абсолютно жестких включениях (вилка простирается от модулей, равных модулям матрицы, до бесконечных модулей). В случае, когда имеется какая-либо дополнительная информация о статистическом распределении фаз, данные границы могут быть сужены.

В 1946 г. И.М. Лифшиц и Л.Н. Розенцвейг [9] из статистических уравнений теории упругости поликристалла, решаемых в перемещениях, в предположении малой анизотропии, с учетом только парных корреляций между случайными модулями упругости в соседних точках, получили эффективные значения в виде суммы, усредненных по схеме Фойгта модулей и корреляционных поправок. Эта работа имела большое значение для развития методов статистической теории упругости, выполненных С.Д. Волковым (1962) [10].

Высокой степенью наглядности обладает метод самосогласования, предложенный А.М. Хершем (1954) [11] и Е. Кренером (1958) [12]. Суть метода заключается в предположении о равенстве среднего поля деформаций по ансамблю анизотропных частиц случайной ориентации, помещаемых в матрицу с эффективными свойствами, макроскопической деформации. Методом перенормировок статистических уравнений теории упругости А.Г. Фокиным и Т.Ф. Шермергором (1968–1977) [13] сначала в рамках сингулярного приближения, а затем обобщенного сингулярного приближения получены эффективные значения упругих свойств квазиизотропных поликристаллов и некоторых композиционных материалов, а также более узкие границы для их значений, чем границы Хашина – Штрикмана. Используемое в методе сингулярного приближения пренебрежение формальной частью второй производной тензора Грина уравнения равновесия и сохранение лишь сингулярной части эквивалентно предположению о предельной локальности корреляционых функций случайного поля модулей упругости неоднородной среды. Результаты, получаемые методом сингулярного приближения, методом обобщенного сингулярного приближения и границы Хашина – Штрикмана, могут быть найдены и методом самосогласованного поля. Если в качестве упругих свойств матрицы принять упругие характеристики некоторого тела сравнения и придавать этим характеристикам различные значения, то можно получить в аналитическом виде все решения, отвечающие перечисленным методам. Это позволяет в некоторой степени выявить физическую суть принимаемых при математическом моделировании формальных допущений.

Неожиданным в русле работ, посвященных определению эффективных упругих свойств поликристаллов, был простой метод К.С. Александрова (1965) [14], который предложил проводить усреднение матриц модулей упругости на базе их высших инвариантов. Так, из равенства определителей матриц модулей упругости кубического кристалла и модулей упругости изотропного тела с эффективными свойствами им было получено значение эффективного модуля сдвига квазиизотропного поликристалла. В дальнейшем К.С. Александровым и Л.А. Айзенбергом (1966) [15] на примере тензорных свойств второго ранга была отмечена связь этого способа усреднения с усреднением логарифмов собственных значений соответствующих матриц. Это обстоятельство имело определяющее значение для развития теории. Усреднение на базе высших инвариантов независимо от К.С. Александрова было выполнено Г.И. Пересадой (1971) для поликристаллов с кубической и гексагональной симметрией структуры [16].

Значительно более сложной, чем вычисление упругих свойств квазиизотропных поликристаллов, является задача их вычисления, когда имеется преимущественная ориентация зерен в пространстве – кристаллографическая текстура, и в силу этого поликристалл начинает вести себя как анизотропное тело. Еще в 1880 г. Эмиль Габриэль Варбург нашел, что все упругие свойства медной проволоки, получившей остаточную деформацию при закручивании, могут быть объяснены, если предположить, что материал стал анизотропным подобно кристаллу ромбической системы. Исследование деформационной анизотропии методами математической теории пластичности предпринималось в дальнейшем разными авторами, но наличие многих открытых вопросов не позволяет считать эту проблему вполне решенной и к настоящему времени. Некоторую завершенность имеют результаты Р. Хилла (1950) [17], относящиеся к пластической анизотропии жестко-пластичных ортотропных тел.

Методы вычисления упругих характеристик текстурированных поликристаллов развивались по мере совершенствования экспериментальных методов исследования текстуры и ее количественного описания. Научные школы, занимаясь этим вопросом, использовались как прямые методы – рентгеновский, электронографический, нейтронографический, основанные на анализе дифракции потоков соответствующих частиц при прохождении через текстурированный материал или отражении от его поверхности, так и косвенные, использующие связь анизотропии текстурированных поликристаллов с ориентацией кристаллитов – магнитный, резонансный, ультразвуковой. Методы расчета эффективных упругих свойств поликристаллов в приближениях В. Фойгта, А. Ройса и Р. Хилла, ориентированные на использование современных методов количественного текстурного анализа, применялись И.П. Талашкевичем и К.С. Александровым (1964) [18], Х.И. Бунге и В.Т. Робертсом [19, 20] (1969), а в дальнейшем и многими другими авторами, в частности в работах [21, 22].

Так же как и для поликристаллических материалов, эффективные характеристики композиционных материалов не равны средним и лежат между значениями величин, вычисленных по моделям Фойгта и Ройса. Наибольшие значения модулей упругости определяются по Фойгту, наименьшие − по Ройсу. Уточненный расчет упругих констант материала с учетом флуктуаций как напряжений, так и деформаций показывает, что численные значения модулей упругости попадают в диапазон между указанными минимальными и максимальными значениями, получивший название вилки Хилла. Для волокнистых композиционных материалов характерны существенные различия в значениях модулей упругости волокна и матрицы. Эффективные характеристики зависят от свойств компонент и матрицы, относительного объемного содержания компонентов и геометрии материала. При этом изменение ширины вилки, как показано Р. Хиллом [17], зависит от упругих свойств компонентов.

Феноменологическое исследование механических свойств композитов состоит в установлении зависимости между усредненными напряжениями и деформациями посредством эффективных характеристик и использовании традиционных для механики твердых деформируемых тел средств. Традиционным методом определения эффективных упругих характеристик пространственно-армированного композита по известным свойствам его компонент является метод осреднения характеристик отдельных однонаправлено армированных элементарных объемов в модели композита. Исходя из вида механической текстуры в работах [23–30] рассмотрены основные аналитические методы расчета свойств пространственно-армированных композитов, допущения и ограничения для различных непрерывных и дискретных моделей, а также статистические методы, основанные на различных приближениях теории случайных функций. Так, в работе Ю.В. Соколкина, А.А. Ташкинова [29] эффективные значения упругих характеристик композиционного материала рассчитываются на основе метода регуляризации его структуры. Согласно этому методу, частично упорядоченную реальную структуру армированного материала заменяют некоторой моделью, состоящей из периодически чередующихся в пространстве компонентов материала. Расчет состоит в решении граничной задачи для многосвязной области с привлечением метода конечных элементов и расчетов на ЭВМ. Схема аналитического расчета упругих констант композиционного материала методом разложения тензоров жесткости и податливости в ряд по объемным коэффициентам армирования приведена в монографии Б.Е. Победри [30]. Установлено, что при малом содержании арматуры можно ограничиться решением задачи для отдельного волокна, находящегося в бесконечной по объему матрице.

Решение задачи определения характеристик композиционных материалов по свойствам компонентов и характеру их расположения в матрице методом самосогласования можно найти в работах [24, 28]. Исходные уравнения составляют с учетом решения сопутствующей задачи для отдельного волокна, находящегося в окружении матрицы с эффективными свойствами, упругие свойства которой идентичны упругим свойствам всего материала.

Попытка обобщения метода расчета эффективных упругих характеристик Александрова – Пересады на текстурированные материалы была предпринята А. Моравиком (1989) [31], а также С. Матхизом и М. Гамбертом (1993) [32]. Моравиком был предложен алгоритм решения, основанный на свойствах логарифмической тензорной функции, который был реализован им только в случае квазиизотропного материала. Матхизом и Гамбертом дана численная реализация этого алгоритма на примере некоторых текстурированных материалов, не допускающая аналитической формы записи окончательного решения, а сам метод получил название «вычисление среднегеометрических значений упругих характеристик».

Новые возможности в решении классической задачи усреднения свойств анизотропных тел и смежных вопросов открывает аппарат симметричных тензорных функций, предложенный Е.А. Митюшовым [36], а также альтернативные способы представления упругих свойств Я. Рыхлевского (1983) [33, 34], Б.Д. Аннина и Н.И. Остросаблина (2008) [35]. В этих работах упругие свойства анизотропного линейно-упругого тела характеризуются в общем случае 18 инвариантными величинами, из которых 6 – собственные модули упругости, а 12 – безразмерные параметры, задающие собственные состояния. Помимо этого присутствуют три неинвариантных параметра, определяющие положение тела в пространстве. Собственные модули упругости – это собственные значения линейного оператора, преобразующего пространство симметричных тензоров второго ранга напряжений-деформаций в себя. Основываясь на этих подходах, было выполнено описание упругого и пластического поведения объемно-изотропных (одно из собственных состояний – всестороннее сжатие) текстурированных материалов. При этом в явном виде удалось разделить факторы, определяющие анизотропию свойств – физические факторы, – в виде соответствующих показателей анизотропии составляющих композиционный материал компонент либо монокристаллов в случае поликристалла, и геометрические факторы, в виде конечного числа интегральных характеристик механической либо кристаллографической текстуры [37–40].

Библиографический список

1. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 676 с.

2. Thomson W. (Lord Kelvin) On Six Principal Strains of an Elastic Solid // Philos. Trans. Roy. Soc. London. – 1856. – Vol. 166. – P. 495–498.

3. Stokes G.G. On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion of Elastic Solids // Trans. Of the Cambridge Phil. Soc. – 1849, VIII. – P. 287–319.

4. Сен-Венан Б. Об установлении уравнений внутренних движений, возникающих в твердых пластических телах за пределами упру-

гости // Теория пластичности: сб. ст. – М.: Иностранная литература, 1948. – С. 11–19.

5. Voigt W. Lehrbuch der Kristallphysik. – Stutgart: Teubner Verlaggeselschaft, 1928. – 962 p.

6. Reuss A. Berechnund der Fliebgrenze von Misch-kristallen fut Grund der Plastizitatsbedingung fur Einkristalle // Z. Angew. Math. u Mech., 1929. – Vol. 9. – № 4. – P. 49–64.

7. Hill R. The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate // Proc. Phys. Soc. – 1952. – A65, № 389. – P. 349–356.

8. Hashin Z., Shtrikman S. A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials // J. Mech. And Physh. Solids. – 1963. – Vol. 11, № 2. – P. 127–142.

9. Лифшиц И.М., Розенцвейг Л.Н. К теории упругих свойств поликристаллов // ЖЭТФ. – 1946. – Т. 16. – Вып. 11. – С. 967–980.

10. Волков С.Д., Клинских Н.А. О распределении постоянных упругости в квазиизотропных поликристаллах // ДАН АН СССР. – 1962. – Т. 146, № 3. – С. 565–568.

11. Hershey A.V. The Elasticity of Anisotropic Aggregate of Anisotropic Cubic Crystals // J. Appl. Mech. – 1954. – Vol. 21. – P. 236–242.

12. Kröner E. Berechnung der Elastischen Konstanten Vielkristalls aus der Konstanten des Einkristalls // Z. Phys. – 1958. – Vol. 151, № 4. – S. 504–518.

13. Фокин А.Г., Шермергор Т.Д. Эффективные модули упругости композита, составленного из анизотропных слоев // Механика полимеров. – 1975. – № 3. – С. 408–413.

14. Александров К.С. Средние значения тензорных величин // ДАН СССР. – 1965. – Т. 164, № 4. – С. 800–804.

15. Александров К.С., Айзенберг Л.А. Способ вычисления физических констант поликристаллических материалов // ДАН СССР. – 1966. – Т. 167, № 5. – С. 1028–1031.

16. Peresada G.I. On the Calculation of Elastic Moduli of Polycrystalline Systems from Single Crystal Data // Phys. stat. sol. (a) 4. – 1971. – P. K23–K26.

17. Хилл Р. Математическая теория пластичности: пер. с англ. – М.: Гостехизд., 1956. – 407 с.

18. Талашкевич И.П., Александров К.С. Определение коэффициента Пуассона одноосных текстур // ФММ. – 1964. – Т. 18. – Вып. 1. – С. 142–145.

19. Bunge H.J., Roberts W.T. Orientation Distribution Elastic and Plastic Anisotropic in Stabilized steel // J. Appl. Cryst. – 1969. – Vol. 2. – P. 116.

20. Bunge H.J. Mathematische Methoden der Texturanalyse. – Berlin: Akademie-Verlag, 1969. – 330 s.

21. Ориентационные факторы анизотропии упругих свойств металлов с кубической решеткой / Л.Л. Митюшова [и др.] // ФММ. – 1985. – Т. 60. – Вып. 5. – С. 993–999.

22. Берестова С.А. Упругость и пластичность микронеоднородных сред с однородным модулем всестороннего сжатия: дисс. … канд. физ.-мат. наук / Уральск. гос. техн. ун-т. – Екатеринбург, 1998.

23. Hill R. Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials // J. Mech. and Phys. Solids. – 1964. – Vol. 12, № 3. – P. 199–212.

24. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.

25. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во БГУ, 1978. – 206 с.

26. Сендецки Дж. Механика композиционных материалов. – М.: Мир, 1978. – 564 с.

27. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинанте, 1980. – 572 с.

28. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.

29. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно неоднородных тел. – М.: Наука, 1984. – 115 с.

30. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.

31. Morawiec A. Calculation of Polycrystal Elastic Constants // Phys. Stat. Sol. (b). – 1989. – Vol. 154. – P. 535–541.

32. Matthis S., Humbert M. The Realization of the Concept of a Geometric Mean for Calculating Physical Constants of Polycrystalline Materials // Phys. Stat. Sol. (b). – 1993. – Vol. 177. – P. K47–K50.

33. Рыхлевский Я. Математическая структура упругих тел. «CEIIINOSSSTTUV»: [Препринт № 217] / Институт проблем механики АН СССР. – М., 1983. – 113 с.

34. Рыхлевский Я. О законе Гука // ПММ. – 1984. – Т. 48. – Вып. 3. – С. 420–435.

35. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И. Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 6. – С. 131–151.

36. Митюшов Е.А. Анизотропные тензорные пространства и функции, средние значения тензорных величин и критерии предельности // ПММ. – 2006. – Т. 70. – Вып. 4. – С. 725–731.

37. Берестова С.А., Митюшов Е.А. Об одном точном решении проблемы определения эффективных модулей упругости микронеоднородных сред // ПММ. – 1999. – Т. 63. – Вып. 3. – С. 524–527

38. Митюшов Е.А., Берестова С.А. О физических уравнениях теории пластического течения анизотропных металлов // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 5. – С. 96–105.

39. Mityushov E.A., Berestova S.A., Odintsova N.Yu. Effective Elastic Properties of Textured Cubic Polycrystals // Textures and Microstructures. – 2002. – Vol. 35(2). – P. 99–111.

40. Берестова С.А. Прочность 3D- и 4D-пространственно армированных композитов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т. 11, № 2. – С. 169–183.

Получено 22.11.2010