Мирсаидов М.М., Абдикаримов Р.А., Ходжаев Д.А. Динамика вязкоупругой пластины, несущей сосредоточенные массы, с учетом физической нелинейности материала. Часть 1. Математическая модель, метод решения и вычислительный алгоритм // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 2. – С. 143-153. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.11

Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Khodzhaev D.A. Dynamics of a viscoelastic plate carrying concentrated mass with account of physical nonlinearity of material: Part 1. Mathematical model, solution method and computational algorithm. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, no. 2, pp. 143-153. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.11

ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 2, 2019

PNRPU MECHANICS BULLETIN

http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/

DOI: 10.15593/perm.mech/2019.2.11

УДК 539.3

ДИНАМИКА ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ, НЕСУЩЕЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ МАССЫ, С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА. ЧАСТЬ 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, МЕТОД РЕШЕНИЯ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ

М.М. Мирсаидов[1], Р.А. Абдикаримов[2], Д.А. Ходжаев[1]

[1]Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства, Ташкент, Узбекистан
[2]Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан

О СТАТЬЕ

Получена: 11 марта 2019 г.
Принята: 20 июня 2019 г.
Опубликована: 28 июня 2019 г.

Ключевые слова:

пластина, вязкоупругость, физическая нелинейность, сосредоточенные массы, метод Бубнова–Галеркина, ядро релаксации, математическая модель, численный метод, алгоритм, нелинейное интегродифференциальное уравнение.

АННОТАЦИЯ

В динамических расчетах тонкостенных конструкций учет нелинейных вязкоупругих свойств материала играет важную роль для достоверной оценки прочностных возможностей конструкций. В связи с этим в механике деформируемого твердого тела уделяется большое внимание описанию нелинейных свойств материала и методам решения конкретных задач для различных тонкостенных конструкций при статических и динамических нагрузках. Часто тонкостенные конструкции типа пластин и оболочек играют роль несущей поверхности, к которым крепятся такие элементы конструкций, как накладки, крепления и различные узлы приборов. В динамических расчетах такие присоединенные элементы, имеющие инерционный характер, рассматриваются как дополнительные массы, жестко соединенные с системами и сосредоточенные в точках. Эффект действия сосредоточенных масс вводится с использованием дельта-функции Дирака. В работе построена математическая модель, предложен метод решения и разработан вычислительный алгоритм задачи о колебаниях вязкоупругой пластины, несущей сосредоточенные массы, с учетом физически нелинейного деформирования материала при различных условиях закрепления контуров пластины в рамках гипотезы Кирхгофа–Лява. Физическая зависимость между напряжениями и деформациями с учетом нелинейности принята в виде интегральной модели Больцмана–Вольтерры, где при расчетах в качестве ядра релаксации принималось слабосингулярное ядро Колтунова–Ржаницына. С помощью метода Бубнова–Галёркина произведены дискретизации по пространственным переменным, и получены нераспадающиеся системы интегродифференциальных уравнений (ИДУ) относительно функции времени задачи. Для решения ИДУ предложен численный метод, основанный на использовании квадратурных формул, устраняющий особенности в ядре релаксации. Разработан единый вычислительный алгоритм для нахождения прогиба вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами.

© **Мирсаидов Мирзиёд Мирсаидович** – д.т.н., проф., зав. каф., e-mail: theormir@mail.ru, iD: 0000-0002-8907-7869.
Абдикаримов Рустамхан Алимханович – д.ф.-м.н., доц., e-mail: rabdikarimov@mail.ru, iD: 0000-0001-8114-1187.
Ходжаев Дадахан Акмарханович – к.ф.-м.н., доц., e-mail: dhodjaev@mail.ru, iD: 0000-0001-5526-8723.

Mirziyod M. Mirsaidov – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, e-mail: theormir@mail.ru, iD: 0000-0002-8907-7869.
Rustamkhan A. Abdikarimov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: rabdikarimov@mail.ru, iD: 0000-0001-8114-1187.
Dadakhan A. Khodzhaev – CSc in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, e-mail: dhodjaev@mail.ru, iD: 0000-0001-5526-8723.

DYNAMICS OF A VISCOELASTIC PLATE CARRYING CONCENTRATED MASS WITH ACCOUNT OF PHYSICAL NONLINEARITY OF MATERIAL. PART 1. MATHEMATICAL MODEL, SOLUTION METHOD AND COMPUTATIONAL ALGORITHM

M.M. Mirsaidov[1], R.A. Abdikarimov[2], D.A. Khodzhaev[1]

[1]Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural Mechanization Engineers, Tashkent, Uzbekistan
[2]Tashkent Institute of Finance, Tashkent, Uzbekistan

ARTICLE INFO

Received: 11 March 2019
Accepted: 20 June 2019
Published: 28 June 2019

Keywords:

plate, viscoelasticity, oscillations, physical nonlinearity, concentrated masses, the Bubnov-Galerkin method, relaxation kernel, mathematical model, numerical method, algorithm, nonlinear integro-differential equation.

ABSTRACT

In dynamic calculations of thin-walled structures, an account of nonlinear viscoelastic properties of material plays an important role in a reliable assessment of the strength capability of structures. In this regard, in the mechanics of a deformable rigid body, much attention is paid to the description of nonlinear material properties and the methods to solve specific problems for various thin-walled structures under static and dynamic loads. Thin-walled structures such as plates and shells often play the role of a bearing surface, to which lining, fasteners, various instrument assemblies and other structural elements are attached. In dynamic calculation, the attached elements having an inertial character are considered as additional mass rigidly connected to the systems and concentrated in points. The effect of concentrated mass is introduced using the Dirac delta function. In this paper, a mathematical model has been constructed, a solution method has been proposed, and a computational algorithm has been developed for the problem of oscillations of a viscoelastic plate carrying concentrated mass, with account of physically nonlinear strain of material under different conditions of fixing the plate contours within the Kirchhoff-Love hypothesis. The physical relationship between stresses and strains, with account of nonlinearity, is taken in the form of the Boltzmann-Volterra integral model, where the weakly singular Koltunov-Rzhanitsyn kernel is taken in calculations as the relaxation kernel. Discretization on spatial variables has been conducted by the Bubnov-Galerkin method, and non-decaying systems of integro-differential equations (IDE) with respect to time function of the problem have been obtained in a general case. To solve the IDE, a numerical method was proposed based on the use of quadrature formulas, which eliminate the features in the relaxation kernel. A unified computational algorithm to determine the deflection of a viscoelastic plate with concentrated masses has been developed.

Введение

В настоящее время одной из главных задач в машиностроении и строительстве является снижение материалоемкости конструкций и машин. В связи с этим возникает необходимость в производстве тонкостенных конструкций. Однако чем тоньше элемент, тем он гибче, тем в большей мере проявляется его склонность к выпучиванию и потере устойчивости. Последняя же сопровождается катастрофическим развитием деформаций и, как правило, разрушением конструкций. Поэтому при производстве конструкций, обладающих легкостью, прочностью и надежностью, наиболее приемлемым является применение композиционных материалов, позволяющих улучшать их эксплуатационные характеристики и в ряде случаев создавать конструкции, нереализуемые в рамках традиционных материалов. При этом достаточно сложными являются процедура расчета и проектирование конструкций из композиционных материалов, требующих учета их реальных свойств. Как известно, большинство композиционных материалов обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [1, 2].

В различных областях техники широко используются тонкостенные конструкции типа пластин и оболочек, играющих роль несущей поверхности, к которым крепятся те или иные элементы конструкции. Такими элементами обычно являются накладки, крепления и различные узлы приборов и т.п. Присоединенные элементы удобно рассматривать как дополнительные массы, жестко соединенные с системами и сосредоточенные в точках.

Существует целый ряд работ, в которых рассмотрены линейные и нелинейные задачи динамики тонкостенных конструкций с учетом и без учета сосредоточенных масс. Несмотря на проведенные в этой области исследования, значительно меньше внимания уделено особенностям поведения неоднородных в инерционном отношении вязкоупругих систем. В этих работах задачи были рассмотрены либо с помощью дифференциальной модели Фойгта, либо использовалась интегральная модель Больцмана–Вольтерры, где при расчетах в качестве ядер релаксации принимались экспоненциальные ядра, которые не могут описать реальные процессы, происходящие в оболочках и пластинах в начальные моменты времени [1, 2]. Выбор экспоненциального ядра при расчетах не случаен. Полученные при расчетах системы интегродифференциальных уравнений путем дифференцирования сводились к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в большинстве случаев решались известным численным методом Рунге–Кутта.

Статические исследования вязкоупругих материалов на ползучесть и релаксацию свидетельствуют о чрезвычайно большой интенсивности релаксационных процессов в начальной стадии испытаний. При этом скорости процессов оказываются настолько большими, что их непосредственное измерение в начальный момент оказывается невозможным. Поэтому сами процессы приходится рассматривать как динамические и условно считать их скорости равными бесконечности [1, 2]. Этот факт можно описать при помощи слабо сингулярных функций, обеспечивающих конечные деформации и напряжения в отличие от сильно сингулярных функций. Такие слабо сингулярные функции хорошо описывают скорости релаксационных процессов, если содержат достаточное число параметров. К таким ядрам относится трехпараметрическое ядро Колтунова–Ржаницына [2].

В монографии [3] приводятся основы физически нелинейной теории упругости, при построении которой закон Гука заменяется нелинейным законом упругости, но сохраняются геометрические линейные соотношения классической теории упругости. Наряду с этим в [3] изложены нелинейные статические задачи теории упругости под действием статической нагрузки и задачи нелинейной теории колебаний.

В практике часто встречаются материалы, в которых при увеличении напряжения в области малых деформаций зависимость между напряжением σ и деформацией ε становится нелинейной [4, 5], т.е. материал обладает физической нелинейностью. Причем физическая нелинейность может быть с мягкой или с жесткой характеристикой.

Как показывают экспериментальные исследования, в большинстве материалов, особенно в грунтах, в полимерных материалах и других, проявляется физическая нелинейность даже при незначительных напряжениях.

Такие материалы, в которых проявляются нелинейные вязкоупругие свойства, широко используются в последнее время на практике. Для описания таких процессов желательно, чтобы физически нелинейный закон вязкоупругости имел более простую форму и наиболее точно отражал физические свойства материала.

Различные нелинейные модели вязкоупругости были предложены Ю.Н. Работновым [6], М.И. Розовским [7], А.А. Ильюшиным и Б.Е. Победря [8], В.В. Москвитиным [9], Т.Ш. Ширинкуловым [10]. Однако многие материалы в зависимости от величины и длительности действующих напряжений не могут быть описаны только одной моделью.

В работе [11] и в развитие этого исследования в [12] предлагаются основные разрешающие уравнения динамики вязкоупругих гибких пластин и оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей.

Как известно, динамические задачи теории вязкоупругости обычно сводятся к решению систем линейных и нелинейных ИДУ. Для решения таких уравнений разработаны различные методы решения.

Например, в работе [13] предложен метод решения систем интегральных уравнений, получающихся при исследовании различных квазистатических задач, учитывающих эффекты наследственности в виде суммы кратных интегралов, по главным кубическим теориям вязкоупругости [8].

В работе [14] дается метод решения ИДУ упругих колебаний геометрически нелинейной удлиненной пластинки.

Метод решения нелинейных систем интегродифференциальных уравнений типа Вольтерры, основанный на использовании степенных рядов, предлагается в работах [15, 16].

В работах [17–20] приводятся методы решения задачи Коши для системы ИДУ и рассмотрены колебания различных тонкостенных стержневых и оболочечных конструкций с учетом вязкоупругих свойств материала и нелинейных деформаций самих конструкций.

На основе теории наследственных упругопластических сред в [21] рассматриваются колебания пластинок из нелинейновязкоупругих материалов. Построено решение полученного нелинейного ИДУ с помощью метода Бубнова–Галёркина в сочетании с методом степенных рядов.

Метод решения задач о нелинейных колебаниях различных вязкоупругих стержневых и пластинчатых систем, приводящихся впоследствии к системе ИДУ методом усреднения, предлагается в работе [22].

Работа [23] посвящена методике определения напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов на основе варианта деформационной теории пластичности бетона.

В работе [24] рассматриваются прямоугольные в плане пологие оболочки. При решении задачи учитываются такие свойства материала, как геометрическая, физическая нелинейность и неоднородность.

На основе теории Кирхгофа–Лява в [25] рассматривается динамическая устойчивость пластинчатой системы, материал которой принимается физически нелинейным. Исследовано влияние на динамическую устойчивость физической нелинейности материала, скорости изменения динамической сжимающей нагрузки и других параметров.

Методу расчета физически нелинейных стержней посвящена работа [26]. Приводится алгоритм реализации данной задачи аналитическим и численным методами.

В работе [27] рассматривается устойчивость стержней, пластин и оболочек с учетом физической нелинейности. Критическое состояние тонкостенных конструкций определяется с помощью некоторых предельных зависимостей.

Методам решения нелинейных задач о прочности, устойчивости и колебаний тонкостенных конструкций типа балок, оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей посвящена работа [28].

Широкое применение персональных компьютеров в практике расчетов позволило разработать и привлечь для решения задач наследственной теории вязкоупругости методы численного анализа и, таким образом, существенно расширить класс решаемых задач наследственной теории вязкоупругости [29].

В [30] приводятся основные соотношения физически нелинейной теории упругости и методы их решения.

В работе [31] приводится подробный обзор современного состояния проблемы учета нелинейных реологических свойств грунта при оценке напряженно-деформированного состояния грунтовых сооружений. Даны математическая постановка, методы и алгоритмы для оценки динамического поведения грунтовых сооружений с учетом неоднородных особенностей конструкций, линейных, нелинейно-упругих, нелинейно-вязкоупругих свойств грунта при различных динамических воздействиях.

Следует отметить, что наиболее разработанной частью прикладной теории упругости являются теория и методы решения линейных, физических и геометрических нелинейных упругих пластин и оболочек. В этой области получены необходимые уравнения, сформулированы краевые задачи, разработаны методы решения задач статики и динамики оболочек и пластин [32–34].

Обзор литературы показывает, что разработка эффективных единых вычислительных алгоритмов для решения физически нелинейных задач динамики оболочек и пластин из композиционных материалов на сегодняшний день является актуальной проблемой.

Одной из особенностей данной задачи является то, что после применения метода Бубнова–Галёркина задача, как в линейной, так и в нелинейной постановке, сводится к решению систем ИДУ с сингулярными ядрами, исследование которых приводит к дополнительным сложностям. Благодаря численному методу [35], основанному на использовании квадратурных формул, стало возможным решать эти системы. Данный метод обеспечивает достаточно высокую точность полученных результатов, универсален, дает возможность решать широкий класс динамических задач теории вязкоупругости и экономичен с точки зрения компьютерного времени [35]. В работах [36, 37] данный метод решения был усовершенствован и распространен для решения нераспадающихся ИДУ. На основе этого метода было получено множество численных результатов [38–42].

Целью данной работы является исследование динамики физически нелинейных задач вязкоупругих пластин, несущих сосредоточенные массы. В первой части работы приводится математическая модель, метод решения полученных ИДУ и единый вычислительный алгоритм для нахождения прогиба вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами. Для описания зависимости напряжений от деформаций используется наследственная теория Больцмана–Вольтерры и ее нелинейная модификация, развитая в работах [6–8].

1. Постановка задачи. Математическая модель

Рассмотрим вязкоупругую прямоугольную пластину толщиной h со сторонами a и b, изготовленную из однородного изотропного материала с сосредоточенными массами M_p в точках (x_p, y_p), $p = 1,2,\ldots I$ (рисунок).

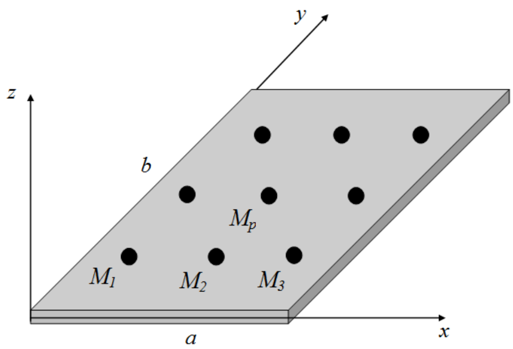

Рис. Вязкоупругая прямоугольная пластина с сосредоточенными массами

Fig. Viscoelastic rectangular plate with concentrated masses

Предполагается, что деформации пластины, оставаясь малыми, связаны с напряжениями нелинейными зависимостями. Уравнения движения, связь между деформациями и перемещениями являются линейными и не отличаются от зависимости линейной теории упругости. Задача рассматривается в рамках гипотезы Кирхгоффа–Лява.

В качестве исходных физических уравнений, согласно М.И. Розовскому [7], принимаем

$$\sigma_x-\sigma_y=\left(\varepsilon_x-\varepsilon_y\right)\varphi\left(\varepsilon_i\right)-\int_0^t R(t,\tau)\times \left[\varepsilon_x(\tau)-\varepsilon_y(\tau)\right]\varphi\left[\varepsilon_i(\tau)\right]d\tau(x,y,z), \quad (1)$$

$$\sigma_y-\sigma_z=\left(\varepsilon_y-\varepsilon_z\right)\varphi\left(\varepsilon_i\right)-\int_0^t R(t,\tau)\times \left[\varepsilon_y(\tau)-\varepsilon_z(\tau)\right]\varphi\left[\varepsilon_i(\tau)\right]d\tau(x,y,z), \quad (2)$$

$$\sigma_z-\sigma_x=\left(\varepsilon_z-\varepsilon_x\right)\varphi\left(\varepsilon_i\right)-\int_0^t R(t,\tau)\times \left[\varepsilon_z(\tau)-\varepsilon_x(\tau)\right]\varphi\left[\varepsilon_i(\tau)\right]d\tau(x,y,z), \quad (3)$$

$$2\tau_{xy}=\gamma_{xy}\varphi\left(\varepsilon_i\right)-\int_0^t R(t,\tau)\gamma_{xy}(\tau)\varphi\left[\varepsilon_i(\tau)\right]d\tau(x,y,z), \quad (4)$$

$$2\tau_{yz}=\gamma_{yz}\varphi\left(\varepsilon_i\right)-\int_0^t R(t,\tau)\gamma_{yz}(\tau)\varphi\left[\varepsilon_i(\tau)\right]d\tau(x,y,z), \quad (5)$$

$$2\tau_{zx} = \gamma_{zx}\varphi(\varepsilon_i) - \int_0^t R(t,\tau)\gamma_{zx}(\tau)\varphi[\varepsilon_i(\tau)]d\tau (x, y, z), \quad (6)$$

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = k_0(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (7)$$

где $k_0 = \dfrac{1-2\nu_0}{E_0} = \dfrac{1-2\nu_0}{2(1+\nu_0)G_0}$.

Введем интегральный оператор

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t,\tau) f(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Тогда уравнения (1)–(6) примут вид

$$\sigma_x - \sigma_y = (1-R^*)(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\varphi(\varepsilon_i), (x, y, z), \quad (9)$$

$$2\tau_{xy} = (1-R^*)\gamma_{xy}\varphi(\varepsilon_i), (x, y, z). \quad (10)$$

Здесь символ (x, y, z) указывает, что остальные четыре зависимости получаются круговой перестановкой индексов.

В уравнениях (1)–(7) компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \dots, \tau_{xy}$ и тензора деформаций $\varepsilon_x, \dots, \gamma_{xy}$ суть функции координат x, y, z и времени t; ν_0 – мгновенный коэффициент Пуассона; E_0 – мгновенный модуль упругости; G_0 – мгновенный модуль сдвига; σ_i и ε_i – соответственно интенсивность напряжений и деформаций, выраженные, по А.А. Ильюшину [21, 43], формулами

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$$
$$\times \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \times$$
$$\times \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 1{,}5(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}. \quad (12)$$

Вид функции $\varphi(\varepsilon_i)$ определяется из данных эксперимента при t=0. Она характеризует меру отклонения кривой $\sigma_i = F(\varepsilon_i)$, где $F(\varepsilon_i) = \varepsilon_i\varphi(\varepsilon_i)$ от прямой Гука, отвечающей упругомгновенному состоянию; $R(t,\tau)$ – ядро релаксации [7].

При малых по сравнению с толщиной пластины прогибах принимаются следующие допущения:

недеформируемость нормалей, из которой следуют формулы

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \ \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \ \varepsilon_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$
$$\varepsilon_{yz} = 0, \ \varepsilon_{xz} = 0; \quad (13)$$

несжимаемость материала, из которой вытекает

$$\varepsilon_z = -(\varepsilon_x + \varepsilon_y); \quad (14)$$

функция, характеризующая нелинейную зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i

$$\varphi(\varepsilon_i) = c + d \cdot \varepsilon_i^n, \quad (15)$$

где c и d – постоянные, определяемые на основании испытаний материала на растяжение и кручение.

Выразим напряжения и моменты через прогиб пластины. Подставляя (13) в формулы (1)–(6) и (11), (12), (15), получим

$$\sigma_x(t) = -2z(1-R^*)\varphi(\varepsilon_i)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad (16)$$

$$\sigma_y(t) = -2z(1-R^*)\varphi(\varepsilon_i)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad (17)$$

$$\tau_{xy}(t) = -z(1-R^*)\varphi(\varepsilon_i)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (18)$$

Здесь

$$\varphi(\varepsilon_i) = c + d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n z^n \times$$
$$\times \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}}. \quad (19)$$

Используя известные формулы для моментов в теории пластин

$$M_x = \int_{-h}^{h} z\sigma_x dz, \ M_y = \int_{-h}^{h} z\sigma_y dz, \ M_{xy} = \int_{-h}^{h} z\tau_{xy} dz \quad (20)$$

и соотношения (16)–(19), получим

$$M_x = -2(1-R^*)\left[\frac{2}{3}h^3 a + F\left(d, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad (21)$$

$$M_y = -2(1-R^*)\left[\frac{2}{3}h^3 a + F\left(d, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad (22)$$

$$M_{xy} = -2(1-R^*)\left[\frac{2}{3}h^3 a + F\left(d, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right]\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (23)$$

Здесь

$$F\left(d, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = d\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \frac{\left[1+(-1)^n\right]h^{n+3}}{n+3} \times$$
$$\times \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]. \quad (24)$$

Подставляя выражения (21)–(23) в уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q=0 \qquad (25)$$

и добавляя к нагрузке q, согласно принципу Даламбера, силы инерции, получаем нелинейное ИДУ, описывающее колебательное движение пластины из физически нелинейного вязкоупругого материала, которое при $n = 2$ запишется в виде

$$D\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+$$

$$+2B\left(1-R^*\right)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.\right.$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^3+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^3+\right.$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+\frac{3}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^3+$$

$$\left.+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]+$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]\right\}+$$

$$+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\left(x,y,t\right). \qquad (26)$$

Здесь m – масса, отнесенная к единице срединной плоскости пластины.

Влияние сосредоточенных масс на вязкоупругую пластину имеет инерционный характер и учитывается в уравнении движения (26) с помощью δ-функции Дирака [44]:

$$m(x,y)=\rho h+\sum_{p=1}^{I}M_p\delta(x-x_p)\delta(y-y_p),$$

где ρ – плотность материала пластины.

Окончательно получим следующее ИДУ:

$$D\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+$$

$$+2B\left(1-R^*\right)\left[6\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)^2+3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\right.$$

$$+3\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+$$

$$+6\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+3\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+3\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+$$

$$+3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)^2+$$

$$+3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+$$

$$+4\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)^2+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)^2+$$

$$+6\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)^2+3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+$$

$$+3\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+$$

$$+3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{3}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+$$

$$+6\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)^2+$$

$$+3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+3\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)^2+$$

$$+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+4\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2+$$

$$+2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)^2+$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}+2\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+2\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+$$

$$+2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+$$

$$+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x\partial y^3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+$$

$$+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)^2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+$$

$$+6\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\Bigg]+$$

$$+\left(\rho h+\sum_{p=1}^{I}M_p\delta\left(x-x_p\right)\delta\left(y-y_p\right)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\left(x,y,t\right). \quad (27)$$

Таким образом, задача о нелинейных колебаниях вязкоупругих изотропных пластин в физически нелинейной постановке сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида (27) при соответствующих начальных и граничных условиях.

2. Метод решения. Вычислительный алгоритм

Большинство динамических задач вязкоупругих тонкостенных конструкций [36] после применения метода Бубнова–Галёркина сводится к решению нераспадающихся систем интегродифференциальных уравнений следующего вида:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}(c_{klnm}\ddot{w}_{nm}+\omega^2_{nmkl}w_{nm})=$$
$$=Z_{nm}\left(t,u_{11},...,u_{NM},v_{11},...,v_{NM},w_{11},...,w_{NM},\right.$$
$$\left.\int_0^t\psi_{nm}\left(t,\tau,u_{11}...,u_{NM},,v_{11},...,v_{NM},w_{11},...,w_{NM}\right)d\tau\right), \quad (28)$$

$$w_{nm}\left(0\right)=w_{0nm},\ \dot{w}_{nm}\left(0\right)=\dot{w}_{0nm},\ n=1,2,...,N;m=1,2,...,M,$$

где $w_{nm}=w_{nm}(t)$ – неизвестные функции времени; Z_{nm},ψ_{nm} – непрерывные функции в области изменения аргументов; $c_{k\ln m}$, $\omega^2_{k\ln m}$ – заданные постоянные числа.

Интегрируя систему (28) два раза по t, приведем ее к интегральной форме. Полагая затем $t=t_i$, $t_i=i\Delta t$, $i=1,2,\dots$ (Δt = const – шаг интерполяции) и заменяя интегралы квадратурными формулами, для вычисления $w_{inm}=w_{nm}(t_i)$ получим следующую систему:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}c_{k\ln m}w_{inm}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}c_{k\ln m}(w_{0nm}+\dot{w}_{0nm}t_i)+$$

$$+\sum_{j=0}^{p-1}A_j(t_p-t_j)\left\{Z_{kl}\left(t_j,u_{j11},...,u_{jNM},v_{j11},...,v_{jNM},w_{j11},...,w_{jNM},\right.\right. \quad (29)$$
$$,\sum_{s=0}^{j}B_s\psi_{1kl}(t_j,t_s,u_{s11},...,u_{sNM},$$
$$\left.\left.v_{s11},...,v_{sNM},w_{s11},...,w_{sNM}\right)\right)-\omega^2_{k\ln m}w_{jkl}\Big\}.$$

Следующим этапом численного метода является регуляризация системы нелинейных интегродифференциальных уравнений (29) с сингулярным ядром Колтунова–Ржаницына [2]:

$$\Gamma\left(t\right)=Ae^{-\beta t}\cdot t^{\alpha-1},\ \ A>0,\ \beta>0,\ 0<\alpha<1.$$

С помощью замены переменных

$$\frac{t}{\omega}-\tau=z^{\frac{1}{\alpha}},\ 0\le z\le\left(\frac{t}{\omega}\right)^{\alpha},\ (0<\alpha<1)$$

интеграл при ядре Колтунова–Ржаницына с особенностью следующего вида

$$A\int_0^{\frac{t}{\omega}}\left(\frac{t}{\omega}-\tau\right)^{\alpha-1}\exp(-\beta(t/\omega-\tau))w(\tau)d\tau$$

принимает вид

$$\frac{A}{\alpha}\int_0^{\left(\frac{t}{\omega}\right)^{\alpha}}\exp\left(-\beta\,z^{\frac{1}{\alpha}}\right)w\left(t/\omega-z^{\frac{1}{\alpha}}\right)dz.$$

Заметим, что после замены переменных подынтегральная функция относительно z становится регулярной. Для численного решения системы (29) применим метод прямой замены интегралов, входящих в систему, некоторой суммой по какой-либо квадратурной формуле, в частности по формуле трапеции:

$$\frac{A}{\alpha}\sum_{k=0}^{i}B_k\exp(-\beta\,t_k)w_{i-k},$$

где коэффициенты

$$B_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\omega}\right)^{\alpha};\ \ B_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\omega}\right)^{\alpha}(i^{\alpha}-(i-1)^{\alpha});$$

$$B_k=\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta t}{\omega}\right)^{\alpha}((k+1)^{\alpha}-(k-1)^{\alpha}),\quad k=\overline{1,i-1}.$$

Таким образом, благодаря двукратному интегрированию исходной системы (28) по времени t и использованию квадратурной формулы получена система (29) для нахождения прогибов $w_{inm}=w_{nm}(t_i)$. Решение (29) находится методом Гаусса.

Решение уравнения (27) при начальных условиях

$$w\left(x,y,0\right)=\gamma\left(x,y\right),\quad \frac{\partial w\left(x,y,0\right)}{\partial t}=0 \quad (30)$$

ищем в виде

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}w_{nm}(t)\psi_{nm}(x,y), \qquad (31)$$

где $\psi_{nm}(x,y)$ – известные координатные функции, удовлетворяющие всем граничным условиям пластины.

Подставляя (31) в (27) и выполняя процедуру метода Бубнова–Галёркина, получаем

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}a_{k\ln m}\ddot{w}_{nm}+D\left(1-R^{*}\right)\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}b_{k\ln m}w_{nm}+$$
$$+2B\left(1-R^{*}\right)\sum_{n,i,r=1}^{N}\sum_{m,j,s=1}^{M}c_{k\ln mijrs}w_{nm}w_{ij}w_{rs}=q_{kl}, \qquad (32)$$

$$w_{nm}(0)=w_{0nm},\quad \dot{w}_{nm}(0)=\dot{w}_{0nm};\ k=1,\ldots,N;\ l=1,\ldots,M.$$

где

$$a_{k\ln m}=\int_0^a\int_0^b\left(\rho h+\sum_{p=1}^{I}M_p\delta\left(x-x_p\right)\delta\left(y-y_p\right)\right)\psi_{nm}\psi_{kl}\,dxdy,$$

$$b_{k\ln m}=\int_0^a\int_0^b\left(\psi^{IV}_{nm,xxxx}+2\psi^{IV}_{nm,xxyy}+\psi^{IV}_{nm,yyyy}\right)\psi_{kl}\,dxdy,$$

$$c_{k\ln mijrs}=\int_0^a\int_0^b\Big(6\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xxx}\psi'''_{rs,xxx}+$$
$$+3\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,xx}\psi^{IV}_{rs,xxxx}+3\psi'''_{nm,xxx}\psi'''_{ij,xxx}\psi''_{rs,xx}+$$
$$+3\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,xxxx}+$$
$$+6\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xxx}\psi'''_{ij,xyy}+\frac{3}{2}\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,xx}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+$$
$$+\frac{3}{2}\psi^{IV}_{nm,xxxx}\psi''_{ij,yy}\psi''_{rs,yy}+3\psi'''_{nm,xxx}\psi''_{ij,yy}\psi'''_{rs,xyy}+$$
$$+3\psi'''_{nm,xxx}\psi'''_{ij,xyy}\psi''_{rs,yy}+3\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+$$
$$+3\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xyy}\psi'''_{rs,xyy}+3\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,xyy}\psi'''_{rs,xyy}+$$
$$+\frac{3}{2}\psi''_{nm,yy}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+\psi^{IV}_{nm,xxxx}\psi''_{ij,xy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+2\psi'''_{nm,xxx}\psi'''_{ij,xxy}\psi''_{rs,xy}+4\psi'''_{nm,xxx}\psi'''_{ij,xxy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+2\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xxy}\psi'''_{rs,xxy}+\frac{1}{2}\psi^{IV}_{nm,xxyy}\psi''_{ij,xy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+2\psi'''_{nm,xyy}\psi''_{ij,xy}\psi'''_{rs,xxy}+\psi''_{nm,yy}\psi^{IV}_{ij,xxxy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,xxy}\psi'''_{rs,xxy}+6\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,yyy}\psi'''_{rs,yyy}+$$
$$+3\psi''_{nm,yy}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,yyyy}+3\psi'''_{nm,yyy}\psi'''_{ij,yyy}\psi''_{rs,xx}+$$
$$+3\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,yyy}\psi'''_{rs,xxy}+3\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,yyyy}+$$
$$+3\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,yyy}\psi'''_{rs,xxy}+\frac{3}{2}\psi''_{nm,yy}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+$$
$$+\frac{3}{2}\psi^{IV}_{nm,yyyy}\psi''_{ij,xx}\psi''_{rs,xx}+6\psi'''_{nm,yyy}\psi''_{ij,xx}\psi'''_{rs,xxy}+$$
$$+3\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,xxy}\psi'''_{rs,xxy}+3\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+$$
$$+3\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xxy}\psi'''_{rs,xxy}+\frac{3}{2}\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,xx}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+$$
$$+2\psi'''_{nm,xyy}\psi'''_{ij,xyy}\psi''_{rs,yy}+2\psi''_{nm,xy}\psi^{IV}_{ij,xyyy}\psi''_{rs,yy}+$$
$$+4\psi''_{nm,xy}\psi'''_{ij,xyy}\psi'''_{rs,yyy}+\psi''_{nm,xy}\psi''_{ij,xy}\psi^{IV}_{rs,yyyy}+$$
$$+\frac{1}{2}\psi^{IV}_{nm,xxyy}\psi''_{ij,xy}\psi''_{rs,xy}+2\psi'''_{nm,xxy}\psi''_{ij,xy}\psi'''_{rs,xyy}+$$
$$+\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xyy}\psi'''_{rs,xyy}+\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,xy}\psi^{IV}_{rs,xyyy}+$$
$$+2\psi'''_{nm,xxy}\psi'''_{ij,xxx}\psi''_{rs,xy}+2\psi''_{nm,xx}\psi^{IV}_{ij,xxxy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+2\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xxx}\psi'''_{rs,xyy}+2\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,xxy}\psi'''_{rs,xxy}+$$
$$+\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,xx}\psi^{IV}_{rs,xxxy}+2\psi'''_{nm,yyy}\psi'''_{ij,xyy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+2\psi''_{nm,yy}\psi^{IV}_{rs,xyyy}\psi''_{ij,xy}+2\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,xyy}\psi'''_{rs,xyy}+$$
$$+2\psi''_{nm,yy}\psi'''_{ij,yyy}\psi'''_{rs,xxy}+\psi''_{nm,yy}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+$$
$$+\psi^{IV}_{nm,xxxy}\psi''_{ij,yy}\psi''_{rs,xy}+\psi'''_{nm,xxx}\psi'''_{ij,yyy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+\psi'''_{nm,xxx}\psi''_{ij,yy}\psi'''_{rs,xyy}+\psi'''_{nm,xxy}\psi'''_{ij,xyy}\psi''_{rs,xy}+$$
$$+\psi''_{nm,xx}\psi^{IV}_{ij,xyyy}\psi''_{rs,xy}+\psi'''_{nm,xyy}\psi'''_{ij,xyy}\psi''_{rs,xx}+$$
$$+\psi'''_{nm,xxy}\psi'''_{ij,xxy}\psi''_{rs,yy}+\psi''_{nm,xx}\psi'''_{ij,yyy}\psi'''_{rs,xxy}+$$
$$+\psi''_{nm,xx}\psi''_{ij,yy}\psi^{IV}_{rs,xxyy}+6\psi''_{nm,xy}\psi'''_{ij,xxy}\psi'''_{rs,xxy}+$$
$$+3\psi''_{nm,xy}\psi''_{ij,xy}\psi^{IV}_{rs,xxyy}\Big)\psi_{kl}\,dxdy,$$

$$q_{kl}=\int_0^a\int_0^b q\psi_{kl}\,dxdy.$$

Интегрирование системы (32) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул, алгоритм которого был приведен выше.

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}a_{k\ln m}w_{pnm}=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}a_{k\ln m}\left(w_{0nm}+\dot{w}_{pnm}t_p\right)-$$
$$-\sum_{q=0}^{p-1}A_q\left(t_p-t_q\right)\times$$
$$\times\left\{D\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}b_{k\ln m}\left(w_{qnm}-\frac{A}{\alpha}\sum_{z=0}^{q}B_z e^{-\beta t_z}w_{q-z,nm}\right)+\right.$$
$$+2B\sum_{n,i,r=1}^{N}\sum_{m,j,s=1}^{M}c_{k\ln mijrs}\times$$
$$\left.\times\left(w_{qnm}w_{qij}w_{qrs}-\frac{A}{\alpha}\sum_{z=0}^{q}B_z e^{-\beta t_z}w_{q-z,nm}w_{q-z,ij}w_{q-z,rs}\right)-q_{kl}\right\}, \qquad (33)$$

$$w_{nm}(0)=w_{0nm},\quad \dot{w}_{nm}(0)=\dot{w}_{0nm};\ k=1,\ldots,N;\ l=1,\ldots,M.$$

Отметим, что начальным моментом колебательного процесса является статическое равновесное состояние пластины под нагрузкой q. В этом состоянии пластина представляет собой изогнутую поверхность $w(x,y,0)$, поэтому для нахождения w_{0nm} решается соответствующая упругая нелинейная статическая задача. Найденные прогибы пластины будут служить начальным приближением для решения соответствующей вязкоупругой нелинейной статической задачи.

Одним из важных этапов при решении нелинейных задач является исследование сходимости итерационного процесса на каждом шаге интегрирования по времени. В данной работе для выполнения этой задачи используется алгоритм, разработанный в [45].

Заключение

В первой части данной работы в физически нелинейной и геометрически линейной постановке построена математическая модель задачи о колебаниях вязкоупругой пластины, несущей сосредоточенные массы. Предложен метод решения и разработан единый вычислительный алгоритм для нахождения прогиба пластины, несущей сосредоточенные массы при различных условиях закрепления контуров пластины. Во второй части работы будут приведены результаты исследования напряженно-деформированного состояния вязкоупругой пластины в физически нелинейной и геометрически линейной постановке.

Библиографический список

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М.: Высшая школа, 1976. – 276 с.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1961. – 777 с.
4. Цурпал И.А. Расчет элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов. – Киев: Техніка, 1976. – 176 с.
5. Бишимбаев В.К., Ширинкулов Т.Ш., Дасибеков А.Д. Изгиб, устойчивость и колебания составных анизотропных пластин, взаимодействующих с деформируемой средой. – Шымкент: Изд-во Южно-Казах. гос. ун-та им. М. Ауезова, 2004. – 294 с.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 318 с.
7. Розовский М.И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1959. – № 5. – С. 109–116.
8. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
9. Москвитин В.В. Об одном методе решения задач нелинейной термовязкоупругости // Упругость и неупругость. – 1971. – Вып. 2. – С. 167–174.
10. Ширинкулов Т.Ш. О некоторых соотношениях между напряжениями и деформациями в физически нелинейных вязкоупругих средах // Докл. АН Республики Узбекистан. – 2005. – № 3. – С. 30–35.
11. Ширинкулов Т.Ш., Темиров О.Г., Абсаломов Ш.К. Динамика физически нелинейных вязкоупругих пластин и оболочек // Узбекский журнал проблем механики. – 2005. – № 5–6. – С. 54–59.
12. Ширинкулов Т.Ш., Индиаминов Р.Ш. Изгиб физически нелинейных вязкоупругих тонких пластинок // Докл. АН Республики Узбекистан. – 2007. – № 2. – С. 31–37.
13. Бадалов Ф. К решению одной системы нелинейных интегральных уравнений // Докл. АН УзССР. – 1973. – № 6. – С. 12–13.
14. Бадалов Ф. Об одном методе решения задачи колебаний гибких вязкоупругих пластинок // Докл. АН УзССР. – 1971. – № 12. – С. 12–13.
15. Бадалов Ф., Ширинкулов Т. Решения нелинейных интегродифференциальных уравнений Вольтерра и их систем при помощи степенных рядов // Докл. АН УзССР. – 1971. – № 9. – С. 14–16.
16. Badalov F., Batirov R. On the solution of physically nonlinear quasistatic problems in viscoelasticity // Polymer Mechanics. – 1973. – Vol. 9. – Iss. 3. – P. 496–498. DOI: 10.1007/BF00856406
17. Мирсаидов М.М., Трояновский И.Е., Балакиров А. Об одном способе решения задачи Коши для системы интегродифференциальных уравнений // Изв. АН РУз. Сер. техн. наук. – 1985. – № 6. – С. 32–36.
18. Koltunov M.A., Mirsaidov M., Troyanovskii I.E. Transient vibrations of axissymmetric viscoelastic shells // Polymer Mechanics. – 1978. – Vol. 14. – Iss. 2. – P. 233–238. DOI: 10.1007/BF00857468
19. Mirsaidov M., Troyanovskii I.E. Forced axisymmetric oscillations of a viscoelastic cylindrical shell // Polymer Mechanics. – 1975. – Vol. 11. – Iss. 6. – P. 953–955. DOI: 10.1007/BF00857626
20. Ishmatov A.N., Mirsaidov M.M. Nonlinear vibrations of an axisymmetric body acted upon by pulse loads // Soviet Applied Mechanics. – 1991. – Vol. 27. – Iss. 4. – P. 388–394. DOI: 10.1007/BF00896519
21. Бадалов Ф., Ширинкулов Т. Колебания пластинок из нелинейно вязкоупругих материалов // Тр. VIII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – М., 1973. – С. 85–88.
22. Филатов А.Н. Асимптотические методы и теория дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
23. Блохина Н.С. Проблема учета физической нелинейности при расчете строительных конструкций // Вестник МГСУ. – 2011. – № 6. – С. 384–387.
24. Петров В.В. Расчет неоднородных по толщине оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей // Academia. Архитектура и строительство. – 2016. – № 1. – С. 112–117.
25. Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Динамическая устойчивость физически нелинейных пластинчатых систем при сжатии в двух направлениях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2018. – Т. 14, № 2. – С. 132–141. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-132-141
26. Иванов С.П., Иванова А.С. О расчете физически нелинейных стержней // Труды Поволж. гос. технол. ун-та. Сер. технологическая. – 2015. – № 3. – С. 126–130.
27. Rutman J., Ulitin V. Limit dependences in stability calculations with account for physical nonlinearity // Journal of Mechanics. – 2017. – Vol. 33. – Iss. 2. – P. 157–160. DOI: 10.1017/jmech.2016.72
28. Karpov V., Maslennikov A. Methods for solving non-linear tasks for calculating construction structures // World Applied Sciences Journal. Problems of Architecture and Construction. – 2013. – No. 23. – P. 178–183. DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035
29. Бадалов Ф. Метод степенных рядов в нелинейной наследственной теории вязкоупругости. – Ташкент: Фан, 1980. – 221 с.

30. Ильин В.П., Карпов В.В., Масленников А.М. Численные методы решения задач строительной механики. – Минск: Вышэйшая школа, 1990. – 349 с.

31. Мирсаидов М.М., Султанов Т.З. Оценка напряженно-деформированного состояния грунтовых плотин с учетом нелинейного деформирования материала и конечных деформаций // Инж.-строит. журн. – 2014. – № 5. – С. 73–82. DOI: 10.5862/MCE.49.8

32. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

33. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

34. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М.: Наука, 1964. – 192 с.

35. Бадалов Ф.Б., Эшматов Х., Юсупов М. О некоторых методах решения систем интегродифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, № 5. – С. 867–871.

36. Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование. – 2010. – Т. 32, № 2. – С. 3–14.

37. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Геометрически нелинейное математическое моделирование динамической устойчивости вязкоупругих пологих оболочек переменной толщины // Инж.-строит. журн. – 2011. – № 6(24). – С. 12–22.

38. Нелинейные параметрические колебания вязкоупругой пластинки переменной толщины / М.М. Мирсаидов, Р.А. Абдикаримов, Н.И. Ватин, В.М. Жгутов, Д.А. Ходжаев, Б.А. Нормуминов // Инженерно-строительный журнал. – 2018. – № 6(82). – С. 112–126. DOI: 10.18720/MCE.82.11

39. Abdikarimov R., Khodzhaev D., Vatin N. To calculation of rectangular plates on periodic oscillations // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 245. – 01003. DOI.org/10.1051/matecconf/201824501003

40. Исследование параметрических колебаний вязкоупругой цилиндрической панели переменной толщины / Р.А. Абдикаримов, Д.А. Ходжаев, Б.А. Нормуминов, М.М. Мирсаидов // Вестник МГСУ. – 2018. – Т. 13. – Вып. 11. – С. 1315–1325. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.11.1315-1325

41. Абдикаримов Р.А., Ходжаев Д.А. Компьютерное моделирование задач динамики вязкоупругих тонкостенных элементов конструкций переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – № 5(49). – С. 83–94.

42. Khodzhaev D.A., Abdikarimov R.A., Vatin N.I. Nonlinear oscillations of a viscoelastic cylindrical panel with a concentrated mass // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 245. – 01001.

43. Ильюшин А.А. Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

44. Amba-Rao C.L. On the vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass // J. Appl. Mech. – 1964. – Vol. 31. – P. 550–551.

45. Абдикаримов Р.А., Худаяров Б.А. Исследование вязкоупругих круговых цилиндрических панелей переменной толщины // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 11–18. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.2

References

1. Rabotnov Yu.N. Polzuchest elementov konstruktsiy [Creep of Elements of Designs]. *Moscow, Nauka*, 1966, 752 p.

2. Koltunov M.A. Polzuchest i relaksatsiya [Creep and Relaxation]. *Moscow, Vysshaya Shkola*, 1976, 276 p.

3. Cauderer G. Nelineynaya mechanika [Nonlinear Mechanics]. *Moscow, IL*, 1961, 777 p.

4. Tsurpal I.A. Raschyot elementov konstruktsiy iz nelineyno-uprugikh materialov [Calculation of Structural Elements of Nonlinear Elastic Materials]. *Kiev, Technika*, 1976, 176 p.

5. Bishimbaev V.K., Shirinkulov T.Sh., Dasibekov A.D. Izgib, ustoychivost’ I kolebaniya sostavnykh anizotropnykh plastin, vzaimodeystvuyushchikh s deformiruemoy sredoy [Bending, Stability and Oscillations of Composite Anisotropic Plates Interacting with a Deformable Medium]. *Shymkent, South Kazakhstan State University named after M.Auezov*, 2004, 294 p.

6. Rabotnov Yu.N. Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel [Elements of Hereditary Mechanics of Rigid Bodies]. *Moscow, Nauka*, 1977, 318 p.

7. Rozovsky M.I. Nelineynye integral’no-operatornye uravneniya polzuchesti i zadacha o kruchenii silindra pri bol’shikh uglakh krutki [Nonlinear Integral-operator Creep Equations and Cylinder Torsion Problem at Large Twist Angles] // *Izvestiya akademii nauk SSSR. Mekhanika I mashinostroenie*. 1959, no.5, pp.109-116.

8. Ilyushin A.A., Pobedrya B.E. Osnovy matematicheskoy termovyazkouprugosti [Basics of Mathematical Thermo-visco-elasticity]. *Moscow, Nauka*, 1970, 280 p.

9. Moskvitin V.V. Ob odnom metode resheniya zadach nelineynoy termovyazkouprugosti [On One Method for Solving Problems of Nonlinear Thermo-visco-elasticity]. *Uprugost’ i neuprugost’*, 1971, iss. 2, pp.167-174.

10. Shirinkulov T.Sh. O nekotorykh sootnosheniyakh mejdu napryajeniyami i defomatsiyami v fizicheski nelineynykh vyazkouprugikh sredakh [On Some Relationships between Stresses and Strains in Physically Nonlinear Viscoelastic Media]. *Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan*, 2005, no.3, pp.30-35.

11. Shirinkulov T.Sh., Temirov O.G., Absalomov Sh.K. Dinamika fizicheski nelineynykh vyazkouprugikh plastin i obolochek [Dynamics of Physically Nonlinear Viscoelastic Plates and Shells]. *Uzbek Journal of Problems of Mechanics*, 2005, no.5-6, pp.54-59.

12. Shirinkulov T.Sh., Indaminov R.Sh. Izgib fizicheski nelineynykh vyazkouprugikh tonkikh plastinok [Bending of Physically Nonlinear Viscoelastic Thin Plates]. *Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan*, 2007, no.2, pp.31-37.

13. Badalov F.B. K resheniyu odnoy sistemy nelineynykh integral’nykh uravneniy [On the Solution of a Single System of Nonlinear Integral Equations]. *Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan*, 1973, no.6, pp.12-13.

14. Badalov F.B. Ob odnom metode resheniya zadachi kolebaniy gibkikh vyazko-uprugikh plastinok [On One method for Solving the Problem of Oscillations of Flexible Visco-elastic Plates]. *Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan*, 1971, no.12, pp.12-13.

15. Badalov F.B., Shirinkulov T.Sh. Resheniya nelineynykh integro-differentsial’nykh uravneniy Vol’terra I ikh system pri pomoshchi stepennykh ryadov [Solutions of the Volterra Nonlinear Integro-differential Equations and Their Systems with Power Series]. *Reports of Academy of Sciences of the UzSSR*, 1971, no.9, pp.14-16.

16. Badalov F., Batirov R. On the solution of physically nonlinear quasistatic problems in viscoelasticity. *Polymer Mechanics*, 1973, vol. 9, iss.3, pp. 496-498. DOI: 10.1007/BF00856406

17. Mirsaidov M.M., Troyanovsky I.E., Balakirov A. Ob odnom sposobe resheniya zadachi Koshi dlya sistemy integrodifferentsial'nykh uravneniy [On a Way to Solve the Cauchy Problem for a System of Integro-Differential Equations]. *Proceedings of Academy_of_Sciences_of_the_UzSSR. Ser. tech. sciences*, 1985, no.6, pp.32-36.

18. Koltunov M.A., Mirsaidov M., Troyanovsky I.E. Transient Vibrations of Axissymmetric Viscoelastic Shells. *Polymer Mechanics*, 1978, vol.14, iss. 2, pp.233-238. doi: 10.1007/BF00857468

19. Mirsaidov M., Troyanovskii I.E. Forced axisymmetric oscillations of a viscoelastic cylindrical shell. *Polymer Mechanics*, 1975, vol.11, iss. 6, pp.953-955. doi: 10.1007/BF00857626

20. Ishmatov A.N., Mirsaidov M.M. Nonlinear vibrations of an axisymmetric body acted upon by pulse loads. *Soviet Applied Mechanics*, 1991, vol.27, iss. 4, pp.388-394. DOI: 10.1007/BF00896519

21. Badalov F.B., Shirinkulov T.Sh. Kolebaniya plastinok iz nelineyno vyazkouprugikh materialov [Oscillations of Plates from Nonlinearly Viscoelastic Materials]. *Moscow, Trudy VIII Vsesoyuznoy konferentsii po teorii obolochek i plastinok.* 1973, pp.85-88.

22. Filatov A.N. Asimptoticheskie metody i teoriya differentsial'nykh i integrodifferentsial'nykh uravneniy [Asymptotic Methods and the Theory of Differential and Integro-differential Equations]. *Tashkent, Fan*, 1974, 216 p.

23. Blokhina N.S. The Problem of Physical Nonlinearity Accounting in the Building Structures Calculation. *Vestnik MGSU*, 2011, no.6, pp.384-387.

24. Petrov V.V. Calculation of Inhomogeneous Thickness of Shells with Considering Physical and Geometrical Nonlinearities. *Academia. Architecture and Construction*, 2016, no.1, pp.112-117.

25. Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. The Dynamic Stability of Physically Nonlinear Plate Systems under Biaxial Compression. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2018, vol.14, no.2, pp.132-141. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-2-132-141

26. Ivanov S.P., Ivanova A.S. O raschyote fizicheski nelineynykh sterjney [On the Calculation of Physically Nonlinear Rods]. *Trudy Povoljskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta. Seriya: tekhnologicheskaya*, 2015, no.3, pp.126-130.

27. Rutman J., Ulitin V. Limit Dependences in Stability Calculations with Account for Physical Nonlinearity. *Journal of Mechanics*, 2017, vol.33, issue 2, pp.157-160. DOI: 10.1017/jmech.2016.72

28. Karpov V., Maslennikov A. Methods for Solving Non-Linear Problems for Calculating Construction Structures. *World Applied Sciences Journal. Problems of Architecture and Construction*, 2013, no.23, pp.178-183. DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035

29. Badalov F. Metod stepennykh ryadov v nelineynoy nasledstvennoy teorii vyazkouprugosti [Method of Power Series in the Nonlinear Hereditary Theory of Viscoelasticity]. *Tashkent, Fan*, 1980, 221 p.

30. Ilyin V.P., Karpov V.V., Maslennikov A.M. Chislennye metody resheniya zadach stroitel'noy mekhaniki [Numerical Methods for Solving Problems of Structural Mechanics]. *Minsk, Higher School*, 1990, 349 p.

31. Mirsaidov, M.M., Sultanov, T.Z. Assessment of Stress-strain State of Earth Dams with Allowance for Non-linear Strain of Material and Large Strains. *Magazine of Civil Engineering*, 2014, vol.49, iss. 5, pp.73-82. DOI: 10.5862/MCE.49.8

32. Volmir A.S. Ustoychivost deformiruemykh system [Stability of Deformable Systems]. *Moscow, Nauka*, 1967, 984 p.

33. Volmir A.S. Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear Dynamics of Plates and Shells]. *Moscow, Nauka*, 1972, 432 p.

34. Kornishin M.S. Nelineynye zadachi teorii plastin i pologikh obolochek i metody ikh resheniya [Nonlinear problems of the theory of plates and shallow shells and methods for their solution]. *Moscow, Nauka*, 1964, 192 p.

35. Badalov F.B., Eshmatov Kh., Yusupov M. O nekotorykh metodakh rezheniya system integro-differentsialnykh uravneniy, vstrechayutshikhsya v zadachakh vyazkouprugosti [Some methods of solving systems of integrodifferential equations in viscoelasticity problems]. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika,* 1987, no.51(5), pp.867-871.

36. Verlan A.F., Abdikarimov R.A., Eshmatov Kh. Chislennoe modelirovanie nelineynykh zadach dinamiki vyazkouprugikh system s peremennoy jestkost'yu [Numerical modeling of nonlinear problems of the dynamics of viscoelastic systems with variable rigidity]. *Elektronnoe modelirovanie*, 2010, vol.32, no.2, pp.3-14.

37. Abdikarimov R.A., Zhgoutov V.M. Geometrically nonlinear mathematical simulation the viscoelastic gently sloping variable thickness shell's dynamical steadiness. *Magazine of Civil Engineering*, 2011, no. 6(24), pp.12-22.

38. Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Vatin N.I., Zhgutov V.M., Khodzhaev D.A., Normuminov B.A. Nonlinear parametric oscillations of viscoelastic plate of variable thickness. *Magazine of Civil Engineering*, 2018, no. 6(82), pp.112-126. DOI: 10.18720/MCE.82.11

39. Abdikarimov R., Khodzhaev D., Vatin N. To calculation of rectangular plates on periodic oscillations, *MATEC Web of Conferences*, 2018, vol. 245, 01003. DOI: 10.1051/matecconf/201824501003

40. Mirsaidov M.M., Abdikarimov R.A., Khodzhaev D.A., Normuminov B.A. Study of parametric oscillations of viscoelastic cylindrical panel of variable thickness, *Vestnik MGSU*, 2018, vol.13, iss. 11, pp.1315-1325. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.11.1315-1325

41. Abdikarimov R.A., Khodzhaev D.A. Computer modeling of tasks in dynamics of viscoelastic thin-walled elements in structures of variable thickness, *Magazine of Civil Engineering*, 2014, no.5, pp.83-94. DOI: 10.5862/MCE.49.9

42. Khodzhaev D.A., Abdikarimov R.A., Vatin N.I. Nonlinear oscillations of a viscoelastic cylindrical panel with a concentrated mass, *MATEC Web of Conferences*, 2018, 245, 01001. DOI: 10.1051/matecconf/201824501001

43. Ilyushin A.A. Plastichnost' [Plasticity]. *Moscow, Gostekhizdat*, 1948, 376 p.

44. Amba-Rao C.L. On the Vibration of a Rectangular Plate Carrying a Concentrated Mass. *J. Appl. Mech.*, 1964, vol.31, pp.550-551.

45. Abdikarimov R.A., Khudayarov B.A. Study of vibrations of viscoelastic circular cylindrical panels of variable thickness, *Computational Continuum Mechanics*, 2012, vol.5. no.1, pp.11-18. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.1.2