УДК 620.1

Н.П. Копытов, Е.А. Митюшов

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, г. Екатеринбург

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК ИЗ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ И ПРОБЛЕМА РАВНОМЕРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Рассмотрена математическая модель армирования оболочек из волокнистых композиционных материалов и проблема равномерного распределения точек на поверхностях. Предлагаемый метод заключается в армировании оболочек произвольной формы равномерно распределенными короткими волокнами. Критерием оптимальности армирования является трансверсальная изотропия свойств оболочки. Предлагаемый алгоритм является универсальным для оболочек произвольной формы. Особое внимание уделено задаче равномерного распределения точек на различных поверхностях. Алгоритм является неотъемлемой частью предлагаемой модели армирования и актуален для других областей науки.

Ключевые слова: армирование оболочек, равномерное распределение точек.

1. Введение

Применение оболочечных конструкций из композиционных материалов занимает важное место в различных технологиях [1]. Большое распространение наряду с композиционными материалами на полимерной основе получили композиционные материалы с металлическими и углеродными матрицами [2, 3]. Эти материалы обладают высокой прочностью, легкостью, размеростабильностью, термостойкостью. Область их применения простирается от изготовления бытовых приборов до применения в архитектуре, строительстве, автомобилестроении, авиастроении, кораблестроении, ракетостроении, изготовлении космических аппаратов.

Технология изготовления углепластиковых и стеклопластиковых оболочек основана на укладке волокон, пропитке связующим веществом и дальнейшим его отверждением. Поэтому свойства подобных композиционных материалов зависят от применяемых при их изготовлении схем армирования.

Наиболее распространенным методом получения высокопрочных армированных конструкций из композиционных материалов является непрерывная намотка лент из волокон [4]. Однако для многих поверхностей данный метод не позволяет получить требуемую трансверсальную изотропию свойств.

Авторами предлагается метод армирования, основанный на укладке коротких волокон, произвольным образом ориентированных в касательных к оболочке плоскостях, с полюсами, равномерно распределенными на поверхности. Для равномерного распределения полюсов армирования на поверхности оболочки используются методы статистического моделирования.

Особое внимание уделяется задаче равномерного распределения точек на различных поверхностях (uniform distribution of points on surfaces), это также является актуальной проблемой для большого числа других научных областей. Задача распределения точек на поверхностях возникает в таких областях науки, как математика, химия, биология, численные методы и многих других [5]. В частности, задача распределения точек на сфере тесно связана с одной из математических задач XXI в. из списка Стивена Смейла (seventh Smales's problem [6, 7]), а также имеет обобщение для n-мерных пространств [8].

2. Формулирование проблемы

Приоритетным и эффективным способом укладки волокон является метод намотки с использованием специальных устройств с числовым управлением [4]. Однако увеличение разнообразия форм изделий, повышение требований к их свойствам обусловливают необходимость разработки новых методов армирования.

Схемы армирования, основанные на намотке, требуют индивидуального подхода к различным формам оболочки, что отражается в дополнительных затратах при разработке моделей и не в полной степени удовлетворяют требованиям к свойствам материала. Методы, использующие упорядоченные схемы армирования (например, продольная и поперечная укладка волокон), являются наиболее эффективными для разворачивающихся поверхностей, таких как конус, цилиндр, но менее эффективны для поверхностей второго порядка. Предлагаемый метод не имеет подобных ограничений и является универсальным. Он позволяет конфигурировать микроструктуру оболочечных изделий из волокнистого композиционного материала различных форм.

3. Предлагаемая методология

3.1. Общие вопросы

Предлагаемый метод заключается в укладке коротких армирующих волокон в оболочке. Критерием оптимальности армирования рассматривается достижение трансверсальной изотропии свойств оболочки.

Вышеописанный критерий будет выполнен, если будут выполнены следующие требования:

1. Число волокон на двух любых элементах поверхности оболочки с равными площадями одинаковое.

2. Волокна ориентированы таким образом, что направления их осей в касательных к оболочке плоскостях равновероятны.

Таким образом, возникают две задачи:

1. Задача равномерного распределения точек на поверхностях. Решение данной задачи показывает механизм распределения полюсов армирования. Равномерно распределенные точки – это и есть полюса армирования. Полюсом армирования будем называть точку, в которую помещается центр короткого волокна.

2. Задача равновероятной ориентации осей волокон в касательных к поверхности плоскостях, проведенных через полюса армирования. Процесс укладки волокна состоит из следующих шагов:

   1) Перемещение волокна из начальной точки к полюсу армирования таким образом, чтобы центр короткого волокна лежал в точке армирования, а волокно лежало в касательной к оболочке плоскости, проведенной через соответствующий полюс армирования.

   2) Задание поворота оси волокна относительно вектора нормали к поверхности оболочки. Угол поворота задается генератором случайной величины, которая равномерно распределена на интервале от 0 до π.

Решение двух описанных задач формирует математическую модель оптимального армирования оболочек короткими волокнами.

Необходимо отметить, что предлагаемый метод не является идеальным, его эффективность возрастает с увеличением числа и уменьшением длины волокон. Вопрос оптимальной длины волокна не рассматривается в данной статье, но остается открытым.

Предлагаемый метод относится к множеству методов статистического моделирования, что отчасти может вызвать недоверие. Поэтому отдельно оговаривается условие, что число волокон должно быть достаточно большим, в технологиях изготовления подобных материалов оно таковым и является. Учитывая величину числа волокон, применение статистического моделирования является оправданным. Метод является универсальным для армирования оболочек различной конфигурации в трехмерном пространстве.

3.2. Равномерное распределение точек на поверхностях

3.2.1. Равномерное распределение точек на поверхности сферы

Потребность равномерного распределения точек на сфере возникает во многих прикладных и фундаментальных исследованиях: в компьютерной графике, эхо- и радиолокации, при изучении поверхности вирусов и трещин в кристаллах. Равномерно распределить точки на плоскости нетрудно – достаточно помещать их в узлы координатной сетки. Однако для поверхностей сферы, эллипсоида или тора приходится использовать другие способы.

Возможны различные подходы к решению данной задачи:

1. Во-первых, это создание генератора псевдослучайных точек, сферические координаты которых удовлетворяют заданным условиям и ограничениям (этот подход может оказаться наиболее адекватным в случаях с достаточно большим количеством точек).

2. Во-вторых, это использование правильных многогранников (тел Платона, рис. 1) и дальнейшая аппроксимация сферы на их основе. Следует учесть, что тел Платона для трехмерного пространства только пять: тетраэдр, октаэдр, гексаэдр или куб, додекаэдр, икосаэдр.

3. В-третьих, это методы, основанные на физических интерпретациях поведения систем частиц (например, нахождение минимума потенциальной энергии [5, 6, 7]). Этот подход требуют больших вычислительных затрат, но занял прочное место в науке и его развивают различные группы ученых по всему миру.

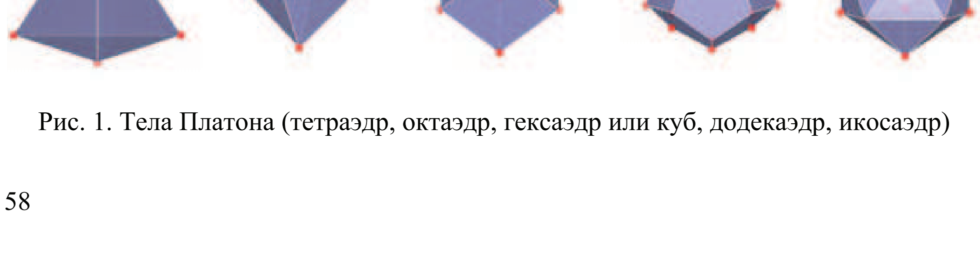


Рис. 1. Тела Платона (тетраэдр, октаэдр, гексаэдр или куб, додекаэдр, икосаэдр)

Задача распределения точек на поверхности сферы, включенная в список задач XXI в. Стивена Смейла под номером 7 (seventh Smale's problem), связана с отысканием экстремума так называемой логарифмической энергии (logarithmic kernel) [5, 6, 7]. Также задача имеет обобщение для n-мерных пространств [9, 10], представляя интерес для статистического моделирования различных процессов.

Интересными могут оказаться результаты, основанные на комбинировании различных подходов, например, использование тел Платона и моделирование их случайных положений с заданной совместной плотностью распределения сферических углов. В нашем исследовании применяется метод моделирования точек по совместной плотности распределения, которая определяется аналитически.

Рассмотрим единичную сферу. Элемент площади поверхности единичной сферы

$$dS = \sin\varphi d\theta d\varphi.$$

Находим отношение

$$\frac{dS}{S} = \frac{\sin\varphi d\theta d\varphi}{\int\limits_0^\pi\int\limits_0^{2\pi}\sin d\theta d\varphi} = \frac{\sin\varphi d\theta d\varphi}{4\pi}.$$

Отсюда совместная плотность распределения сферических углов, в данном случае равная произведению плотностей распределения каждого из углов,

$$f(\theta,\varphi) = f(\theta)f(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{4\pi}.$$

Методом взятия обратной функции находим определяющие соотношения для генерирования значений сферических углов:

$$\theta = \arccos(2\mathrm{Random} - 1),$$

$$\varphi = 2\pi\mathrm{Random},$$

где Random – случайное число с равномерным распределением на интервале $(0,1)$.

Распределение точек на сфере, полученное на основе соотношений (4), представлено на рис. 2.

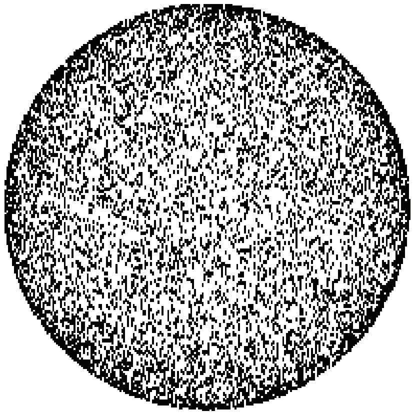


Рис. 2. Равномерное распределение точек на сферической оболочке

Известны и другие методы равномерного распределения точек на сфере и гиперсфере в n-мерном пространстве, также основанные на статистическом моделировании [8, 9, 10].

3.2.2. Равномерное распределение точек на поверхностях $z = z(x, y)$

Пусть поверхность задана функцией $z = z(x, y)$, которая непрерывна и всюду дифференцируема на области D, где $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$.

Найдем совместную плотность распределения координат для равномерного распределения точек на заданной поверхности.

Элемент площади поверхности согласно [12, 13]

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

Находим отношение

$$\frac{dS}{S} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}{\iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy}.$$

Отсюда совместная плотность распределения координат для равномерного распределения точек

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}{\iint\limits_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy}.$$

Генерируя значения по совместной плотности распределения, получим соответствующие координаты равномерно распределенных по поверхности точек.

Для примера рассмотрим поверхности (рис. 3). Получим равномерное распределение точек на данных поверхностях (рис. 4, 5).

$z=5\sin\left(\frac{xy}{5}\right)$ $\qquad$ $z=\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}$

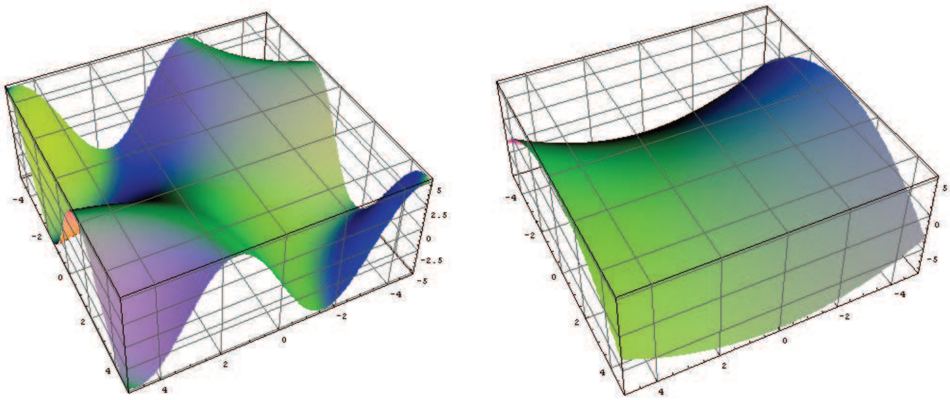
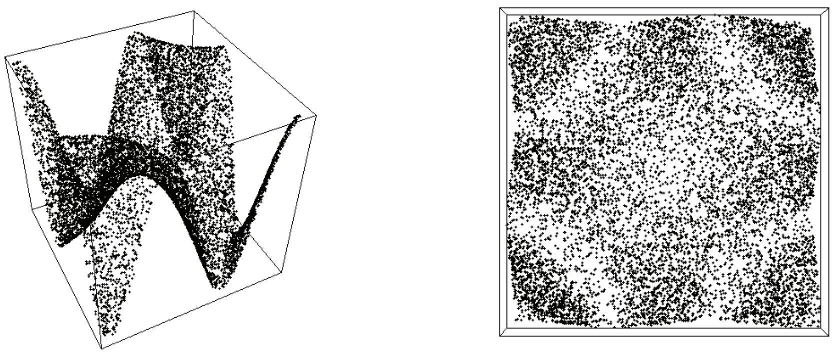


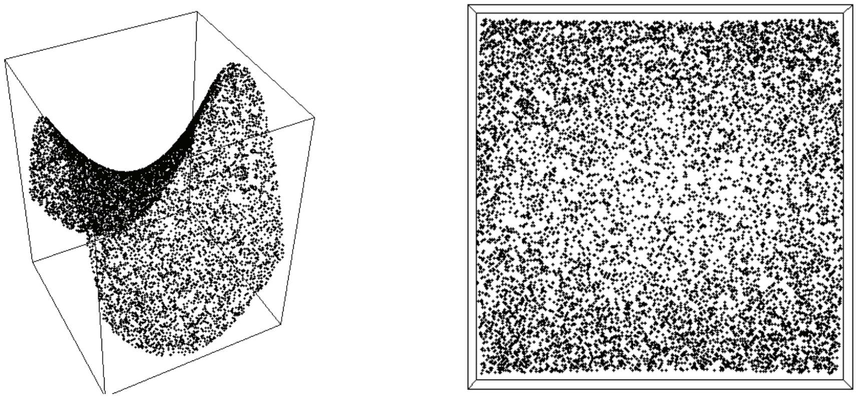
Рис. 3. Демонстрационные поверхности для распределения точек



а $\qquad$ *б*

Рис. 4. Равномерное распределение точек на поверхности $z=5\sin\left(\frac{xy}{5}\right)$.

Аксонометрии, задаваемые полюсами: *а* – ViewPoint $\rightarrow\{1, 2, 2\}$;
б – ViewPoint $\rightarrow\{0, 0, 20\}$



а *б*

Рис. 5. Равномерное распределение точек на поверхности $z = \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{3}$.
Аксонометрии, задаваемые полюсами: *а* – ViewPoint $\to\{1, 2, 2\}$;
б – ViewPoint $\to\{0, 0, 20\}$

3.2.3. Генерирование случайной величины по совместной плотности распределения

Для моделирования случайной величины применяются различные методы. Например, метод взятия обратной функции [10, 11] является удобным в случаях, когда можно получить аналитическое соотношение. Этот способ используется в подразд. 3.2.1. Однако применение данного метода усложняется для функции совместной плотности распределения, которая не разделяется на независимые функции. Поэтому в подразд. 3.2.2 используется обобщенный метод Неймана (метод усечения) [10, 11, 14]. Для одномерного случая выполняются следующие действия:

1) Функция плотности распределения вписывается в прямоугольник.

2) Генерируются два независимых числа эталонным генератором случайной величины с равномерным распределением на интервале (0, 1) и масштабируются по сторонам прямоугольника.

3) Если полученная точка попадает в область под графиком, то точка принимается, иначе отбрасывается.

4) Повторяются действия 1–3.

Иллюстрация метода представлена на рис. 6. Аналогичный метод используется для многомерной случайной величины.

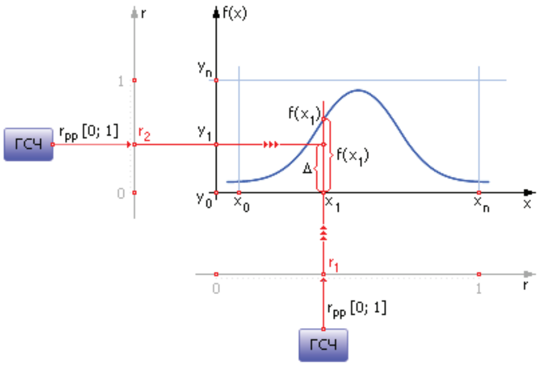


Рис. 6. Иллюстрация метода Неймана (метода усечения) [14]

3.3. Армирование оболочки короткими волокнами

После получения равномерного распределения точек на поверхностях, т.е. полюсов армирования, распределяем волокна в касательных к оболочке плоскостях, выполняя следующие действия:

1) Перемещаем волокно из начальной точки к полюсу армирования таким образом, чтобы центр короткого волокна лежал в точке армирования, а волокно лежало в касательной к оболочке плоскости, проведенной через соответствующий полюс армирования.

2) Задаем поворот оси волокна относительно вектора нормали поверхности оболочки. Угол поворота задается генератором случайной величины, которая равномерно распределена на интервале от 0 до π.

Рассмотрим оболочку в виде параболоида, заданного уравнением $x^2 + y^2 = 2pz$. Уравнение оси короткого волокна длины *l*, случайным образом ориентированного в касательной плоскости к параболоиду в точке $\vec{r} = \{x, y, z\}^T$ с нормалью $\vec{n} = \{n_x, n_y, n_z\}^T = \{\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta\}^T$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \left[\frac{l}{2}(1-t) - \frac{l}{2}t\right]\sin\varphi \\ y + \left[-\frac{l}{2}(1-t) + \frac{l}{2}t\right]\cos\varphi \\ z \end{pmatrix} + \left[(1-\cos\psi)N^2 + \sin\psi N\right] \begin{pmatrix} \left[\frac{l}{2}(1-t) - \frac{l}{2}t\right]\sin\varphi \\ \left[-\frac{l}{2}(1-t) + \frac{l}{2}t\right]\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

где $N = \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$.

Значение угла ψ поворота оси волокна относительно вектора нормали задается генератором случайной величины, которая равномерно распределена на интервале от 0 до π. Полученные результаты распределения волокон на параболической оболочке представлены на рис. 7.

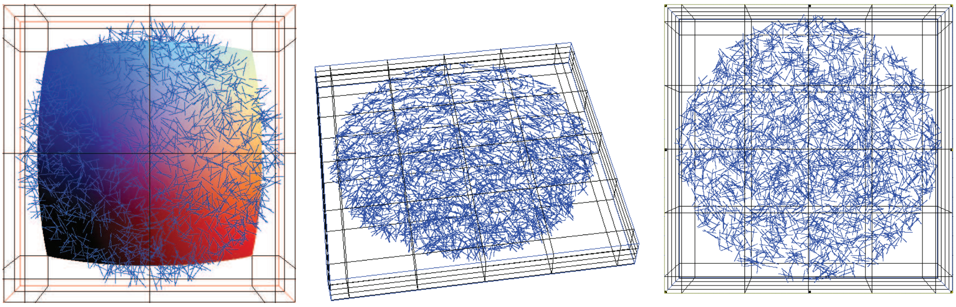


Рис. 7. Распределение армирующих волокон на параболической оболочке

4. Выводы

Главным преимуществом предлагаемого метода является то, что он позволяет получить оптимальную модель армирования для оболочек произвольной формы, в равной степени удовлетворяя требованию трансверсальной изотропии свойств конструкции. В перспективе подход будет усовершенствован до модели армирования оболочек, поверхность которых задается параметрическим способом. Также необходимо отметить, что данный подход может быть применен для конфигурирования структуры волокнистого материала с анизотропными свойствами.

Предлагаемый метод распределения точек на различных поверхностях эффективен и универсален в задачах с большим числом точек. Разработанный алгоритм также может быть модернизирован для случая с параметрическим способом задания поверхностей, что снимет практически все ограничения на его использование не только для данной задачи, но и других областей науки. Это является особенно важным фактором, учитывая большое число исследований данной задачи, проводимых по всему миру, и ее высокую важность. Необходимо отметить, что предложенный подход может быть обобщен для распределения точек в многомерных пространствах. Но это вопрос будущих исследований.

Библиографический список

1. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1977. – 144 с.

2. Анциферов В.Н., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Волокнистые композиционные материалы на основе титана. – М.: Наука, 1990. – 136 с.

3. Технология и проектирование углерод-углеродных композитов и конструкций / Ю.В. Соколкин [и др.]. – М.: Наука, 1996. – 240 с.

4. Аюшеев Т.В. Геометрические вопросы адаптивной технологии изготовления конструкций намоткой из волокнистых композиционных материалов. – Улан-Уде: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. – 212 с.

5. Estimation of Fekete Points / E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, J.M. Gesto // J. Comput. Phys. – 225 (2007). – P. 2354–2376.

6. Computational Cost of the Fekete Problem I: The Forces Method on the 2-Sphere, preprint, accessible / E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, J.M. Gesto. – URL: http://www-ma3.upc.es/users/bencar/articulos/YJCPH2424.pdf.

7. Computational Cost of the Fekete Problem II: on Smale's 7th Problem, preprint, accessible / E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, J.M. Gesto. – URL: http://www-ma3.upc.es/users/bencar/articulos/OnSmales7thproblem.pdf.

8. Weisstein E.W. Sphere Point Picking // MathWorld–A Wolfram Web Resource. – URL: http://mathworld.wolfram.com/SpherePointPicking.html.

9. Marsaglia G. Choosing a Point from the Surface of a Sphere // Ann. Math. Stat. – 1972. – Vol. 43. – P. 645–646.

10. Rubinstein R.Y., Kroese D.P. Simulation and the Monte Carlo methods. Second Edition. – Wiley-Interscience, 2007. – 345 p.

11. Монаков А.А. Основы математического моделирования радиотехнических систем: учеб. пособие. – СПб., 2005. – 100 с.

12. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – СПб.: БХВ-Петербург, 2010. – 624 с.

13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978. – 832 с.

14. Моделирование случайной величины с заданным законом распределения. – URL: http://www.stratum.ac.ru/textbooks/modelir/lection24.html.

Получено 21.11.2010