

А.А. Каменских, Н.А. Труфанов

Пермский государственный технический университет,

В.П. Матвееenko

Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА КАСТИЛЬЯНО

Рассмотрен вариант метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно, в основной процедуре которого используется метод конечных элементов в напряжениях. Представлены результаты сравнения данного подхода с аналитическим решением для толстостенной трубы под действием внутреннего давления и результаты численного решения плоской задачи теории упругости для неканонической области, демонстрирующие практическую сходимость итерационной процедуры погружения, качество выполнения естественных граничных условий и характер распределения компонент тензора напряжений в области. Рассмотренный метод позволяет достигнуть высокой точности решения в напряжениях при достаточно небольшом числе элементов, эффективно решать задачи для конструкций неканонической формы в напряжениях.

Ключевые слова: численные методы, математическое моделирование, метод геометрического погружения, метод конечных элементов, вариационный принцип минимума дополнительной энергии.

Для решения задач теории упругости тел сложной, в том числе и пространственной, конфигурации предложены эффективные итерационные методы: метод геометрического погружения [1], метод фиктивных областей [2, 3]. Метод геометрического погружения представляет собой процедуру сведения краевой задачи, сформулированной на области произвольной конфигурации, к итерационной последовательности задач на некоторой канонической области. Существует обобщение идеи метода геометрического погружения на класс задач линейной и нелинейной вязкоупругости [4–6], упругопластичности [7]. В перечисленных работах итерационно-вариационная процедура метода геометрического погружения строится в рамках вариационного принципа минимума общей потенциальной энергии. Метод геометрического погружения используется в совокупности с каким-либо численным методом. Использование метода конечных элементов в основной процедуре

метода геометрического погружения позволяет получать конечномерные аналогии краевых задач со многими полезными качествами, зачастую не присущими обычным формулировкам метода конечных элементов. Реализация метода конечных элементов в рамках напряжений осуществляется в единичных случаях для тел канонической формы. Основная причина этого состоит в трудностях аппроксимации напряжений в конечном элементе. Решение задач в напряжениях обладает рядом преимуществ: автоматически исчезают проблемы, возникающие при вычислении напряжений в вариантах метода конечных элементов, основанных на постановке задачи в перемещениях; полученное решение представляет собой верхнюю грань оценки точного решения, а также отсутствуют проблемы для тел, изготовленных из несжимаемых и слабосжимаемых материалов. Представляет интерес формулировка и реализация метода геометрического погружения в рамках вариационного принципа минимума дополнительной энергии, в том числе конечно-элементная реализация.

Запишем функционал дополнительной энергии деформируемого тела в общем виде:

$$П_C = \int_V \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV - \int_{S_u} \vec{t} \cdot \vec{U} dS_u, \quad (1)$$

где V – объем, занимаемый исходной областью, S_u – часть поверхности на которой заданы кинематические граничные условия, $\vec{t}$ – вектор усилий на S_u , $\vec{U}$ – вектор заданных перемещений на S_u , $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений, $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформаций.

Функционал $П_C$ определен на множестве функций σ_{ij} (компоненты тензора напряжений), удовлетворяющих в области V уравнениям равновесия и статическим граничным условиям на границе S_σ .

Следуя идее метода геометрического погружения [1], выполним тождественное преобразование выражения (1):

$$П_C = \int_V \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV_\Delta - \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV_\Delta - \int_{S_u} \vec{t} \cdot \vec{U} dS_u, \quad (2)$$

где V_Δ – объем области, дополняющей исходную область V до канонической V_0 ($V_0 = V \cup V_\Delta$).

Функционал (2) можно привести к виду

$$\Pi_C = \int_{V_0} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV - \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV_\Delta - \int_{S_u} \vec{t} \cdot \vec{U} dS_u. \quad (3)$$

Из функционала (3) следует вариационное уравнение

$$\int_{V_0} \delta \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \delta \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon} dV_\Delta + \int_{S_u} \delta \vec{t} \cdot \vec{U} dS_u. \quad (4)$$

Будем решать уравнение (4) итерационным методом в виде

$$\int_{V_0} \delta \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\sigma}^{k+1}) dV = \frac{1}{2} \int_{V_\Delta} \delta \hat{\sigma} \cdot \hat{\varepsilon}(\hat{\sigma}^k) dV_\Delta + \int_{S_u} \delta \vec{t} \cdot \vec{U} dS_u, \quad (5)$$

где k – номер итерации метода геометрического погружения; $\hat{\sigma}^0 \equiv 0$.

Таким образом, метод геометрического погружения сводится к итерационной процедуре, где на каждой итерации решается задача теории упругости в напряжениях в области V_0 . Область V_0 является канонической, для которой решение задачи теории упругости получить значительно проще.

В данной работе рассмотрены примеры реализации метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно.

В качестве первого шага рассмотрим решение плоской задачи теории упругости, известное как аналитическое решение. На данном этапе решалась осесимметричная задача об определении напряжений в кольцевой области, внутренний радиус которой $r_1 = 10^{-2}$ м, внешний $r_2 = 2 \cdot 10^{-2}$ м, жестко закрепленной по внешнему радиусу и нагруженной по внутреннему радиусу постоянным давлением $P_r = 100$ кг/см², касательные напряжения на внутренней поверхности отсутствуют (рис. 1). Решение ведется в полярной системе координат с использованием функций напряжений. Область разбивается кольцевыми элементами, связанными друг с другом только в узловых окружностях.

При построении конечно-элементных соотношений для задачи, сформулированной на основе принципа Кастильяно, требуется обеспечить равновесное поле напряжений внутри элемента и на межэлементных границах. Использование функции напряжений обеспечивает ус-

ловие равновесия внутри элемента. Равновесие на границах элементов для данной задачи можно обеспечить, если будут совпадать значения функции напряжений φ и ее производной $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ в узловых окружностях соседних элементов. Для этого выберем их в качестве узловых неизвестных элемента:

$$\{\varphi^e\} = \left\{ \varphi_i, \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \varphi_j, \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right\}^T, \quad (6)$$

где i, j – номера соседних узловых окружностей, $\{\varphi^e\}$ – вектор узловых неизвестных элемента.

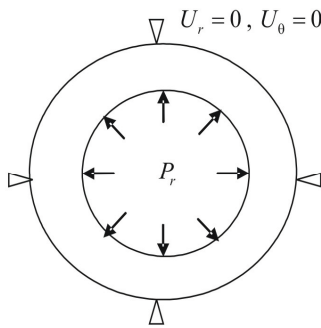


Рис. 1. Схема кольцевой области

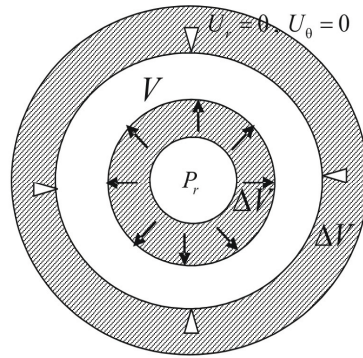


Рис. 2. Схема погружения

Изменение функции напряжений в элементе представлено в виде полинома:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot r + \alpha_3 \cdot r^2 + \alpha_4 \cdot r^3. \quad (7)$$

Функцию напряжений можно записать в другом виде:

$$\varphi = N_{0i} \varphi_i + N_{1i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + N_{0j} \varphi_j + N_{1j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r}, \quad (8)$$

где $N_{0i}, N_{1i}, N_{0j}, N_{1j}$ – функции формы конечного элемента.

Неизвестные коэффициенты полинома (7) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ находим из условий:

$$\frac{d^f N_{gn}(r_m)}{dr^f} = \delta_{gf} \delta_{nm}, \quad f, g = \overline{0, 1}, \quad n, m = \overline{i, j}. \quad (9)$$

Результаты, полученные методом конечных элементов, сравниваются с точным аналитическим решением, в результате чего получены зависимости погрешностей радиального напряжения, окружного напряжения и перемещений от числа узловых неизвестных M .

$$\Delta\sigma_{rr} = \max_i \left| \sigma_{rr_i}^u - \sigma_{rr_i}^a \right| / \left\| \sigma^a \right\|, \quad (10)$$

$$\Delta\sigma_{\theta\theta} = \max_i \left| \sigma_{\theta\theta_i}^u - \sigma_{\theta\theta_i}^a \right| / \left\| \sigma^a \right\|, \quad (11)$$

$$\Delta u_r = \max_i \left| u_{r_i}^u - u_{r_i}^a \right| / \left\| u^a \right\|, \quad (12)$$

где $\left\| \sigma^a \right\| = \max_i \left(\sigma_{rr_i}^a, \sigma_{\theta\theta_i}^a \right)$, $\sigma_{rr_i}^a$, $\sigma_{\theta\theta_i}^a$ – значения напряжений точного аналитического решения в i -й узловой окружности, $\left\| u^a \right\| = \max_i \left(u_{r_i}^a \right)$, $u_{r_i}^a$ – значение перемещения точного аналитического решения в i -й узловой окружности, $\sigma_{rr_i}^u$, $\sigma_{\theta\theta_i}^u$ – значения напряжений численного решения в i -й узловой окружности, $u_{r_i}^u$ – значение перемещения численного решения в i -ой узловой окружности, i – целое число, пробегает значения от 1 до M .

Из рис. 3–5 видно, что с увеличением количества элементов погрешность метода конечных элементов уменьшается. По результатам метода конечных элементов для данной задачи можно говорить о сходимости метода к точному решению.

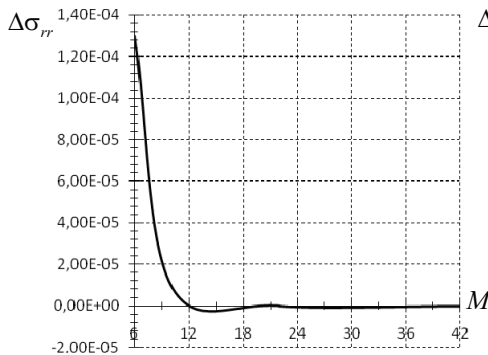


Рис. 3. Зависимость относительной погрешности σ_{rr} от числа узловых неизвестных

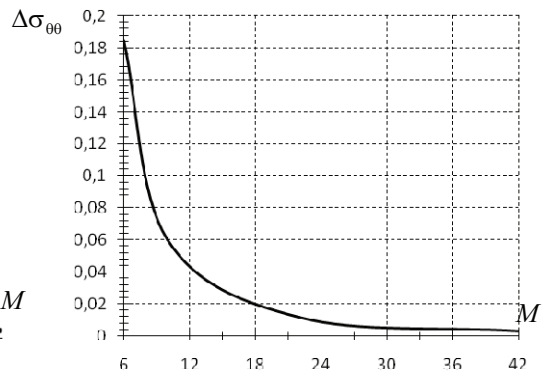


Рис. 4. Зависимость относительной погрешности $\sigma_{\theta\theta}$ от числа узловых неизвестных

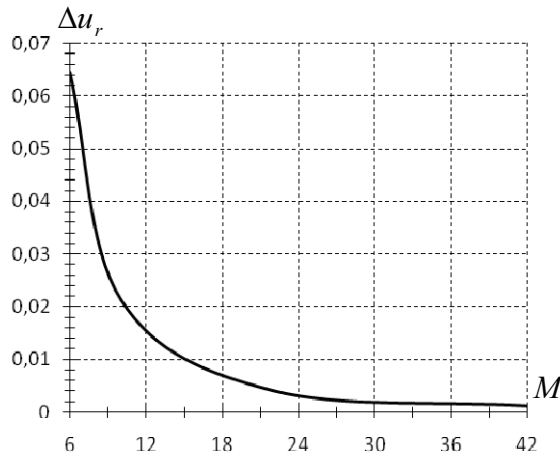


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности u от числа узловых неизвестных

Рассмотрим далее в качестве иллюстрации применение процедуры метода геометрического погружения (3) для решения данной задачи. Для этого осуществим погружение конструкции в некоторую каноническую область, в качестве которой выберем кольцо меньшего внутреннего $r_1' = 0,5 \cdot 10^{-2}$ м и большего наружного радиусов $r_2' = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м (рис. 2). В итерационной процедуре метода геометрического погружения для решения задачи теории упругости на канонической области используется ранее описанная схема метода конечных элементов. Для канонической области V_0 сетка содержит 40 элементов, из них 20 приходится на область V , 20 – на область V_Δ . Остановка итерационной процедуры происходила при выполнении условия

$$\max_n \left| \frac{\varphi_n^k - \varphi_n^{k-1}}{\varphi_n^{k-1}}, \frac{\frac{\partial \varphi_n^k}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_n^{k-1}}{\partial r}}{\frac{\partial \varphi_n^{k-1}}{\partial r}} \right| \leq \delta, \quad (13)$$

где $n = \overline{1, M}$. Полученные результаты сравнивались с аналитическим решением. При выбранном $\delta = 10^{-7}$ для достижения требуемой точности потребовалось 10 итераций.

Относительная погрешность напряжений и перемещений метода геометрического погружения отличается от погрешности метода ко-

нечных элементов максимально на 10^{-4} . Графики зависимостей аналогичны графикам, представленным на рис. 3–5. Таким образом, для данной задачи метод геометрического погружения сходится и дает результаты, близкие к точному решению.

Графики, представленные на рис. 6, демонстрируют распределение найденных напряжений и перемещений от радиуса, а также выполнение естественных граничных условий в перемещениях. Результаты метода геометрического погружения показаны с учетом добавочной области V_{Δ} .

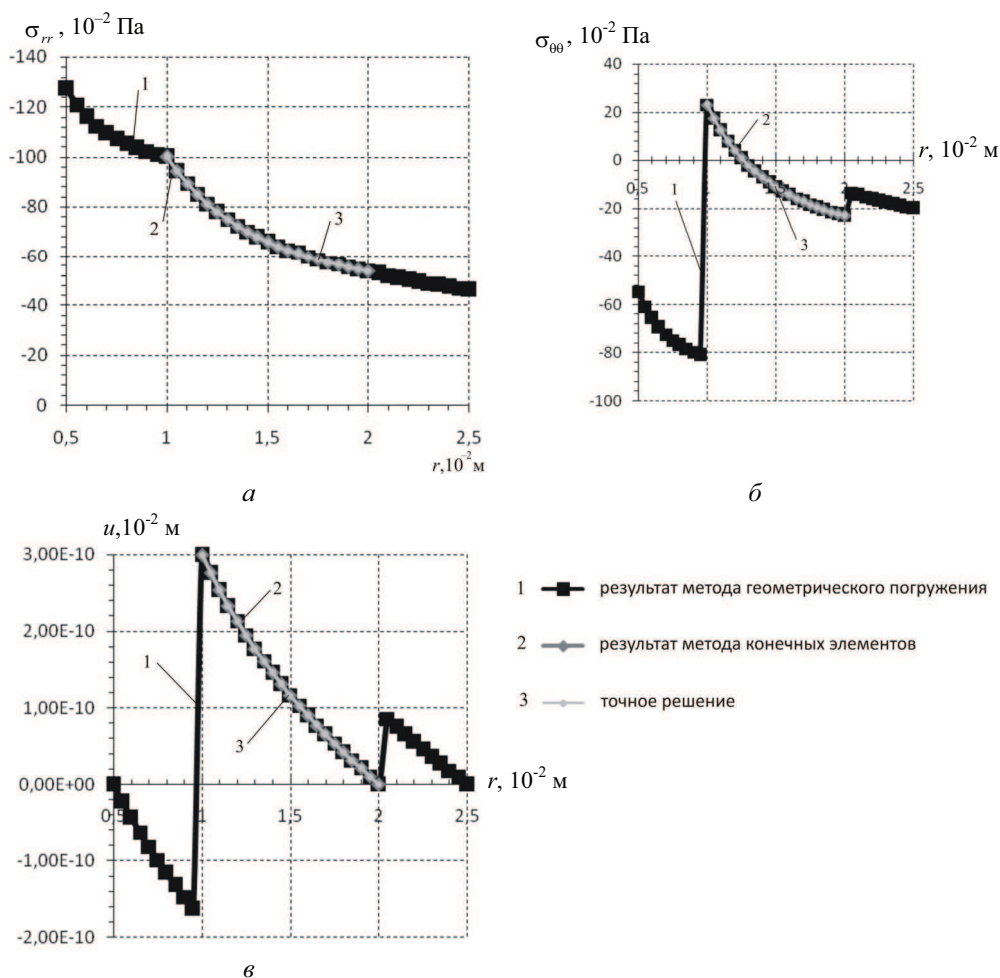


Рис. 6. Результаты решения первой задачи: *a* – радиальные напряжения; *б* – окружные напряжения; *в* – перемещения

Рис. 7 демонстрирует сходимость итерационной процедуры метода геометрического погружения: результаты первой итерации наиболее отличаются от точного решения задачи, уже на третьей итерации метод близок к точному решению: относительная погрешность радиального напряжения $\Delta\sigma_{rr} = 0,2614 \cdot 10^{-4}$, окружного напряжения $\Delta\sigma_{\theta\theta} = 0,9470 \cdot 10^{-4}$, перемещений $\Delta u_r = 0,4658 \cdot 10^{-4}$.

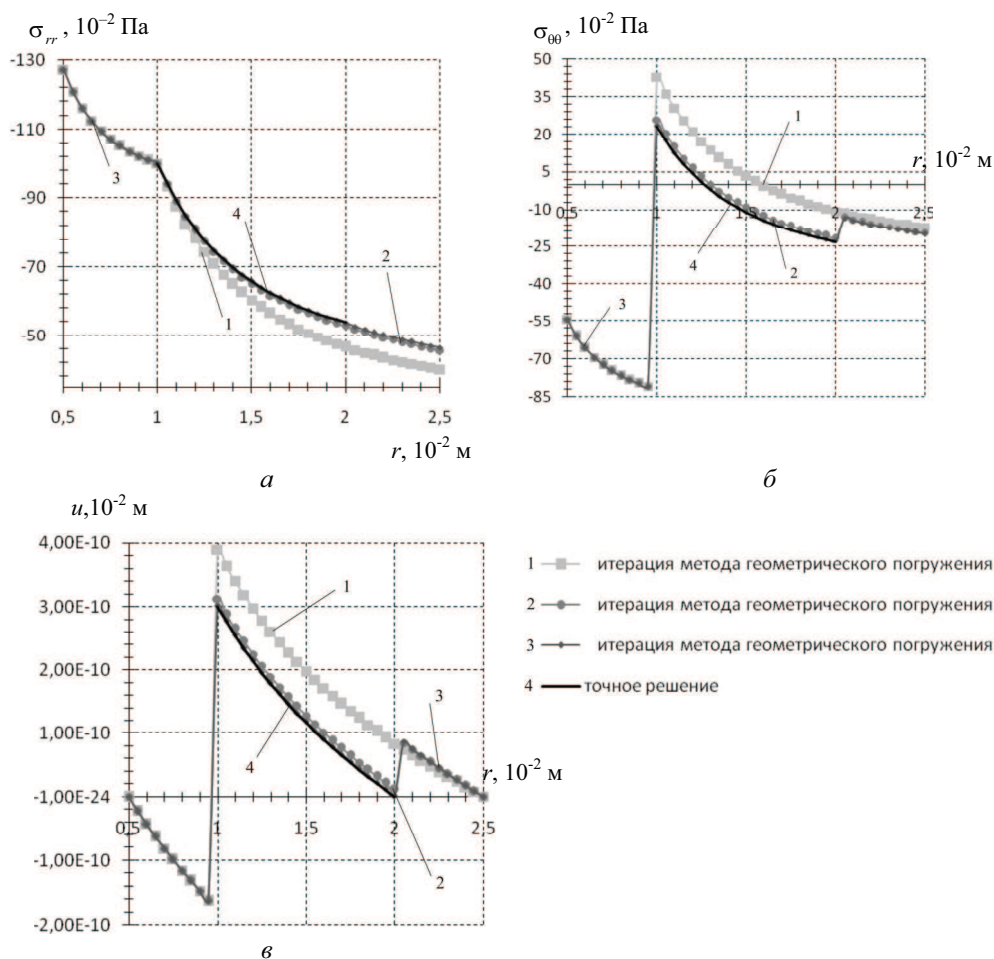


Рис. 7. Результаты решения первой задачи для первых трех итераций метода геометрического погружения: а – радиальные напряжения; б – окружные напряжения; в – перемещения

В качестве более сложного иллюстративного примера осуществим реализацию алгоритма метода геометрического погружения для задачи, не имеющей аналитического решения, с усложненной геомет-

рической конфигурацией. Решалась задача об определении напряжений в круговой области, внешний радиус которой $r = 2 \cdot 10^{-2}$ м, с внутренним эллиптическим вырезом, малая полуось которого $a = 10^{-2}$ м, большая – $b = 1,5 \cdot 10^{-2}$ м. На внутренней эллиптической поверхности заданы нормальные к границе области перемещения $U_n = 0,01 \cdot 10^{-2}$ м, на внешней поверхности – статические граничные условия $\sigma_r = -1$ кг/см² и $\tau_{r\theta} = 0$ кг/см² (рис. 8). Задача плоская, решение ведется в рамках линейной теории упругости в полярной системе координат, с использованием метода конечных элементов в напряжениях. Погружение осуществлялось в кольцо с внутренним радиусом $r_1' = 10^{-2}$ м и внешним радиусом $r_2' = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м (рис. 9). Каноническая область разбивается кольцевыми элементами, связанными друг с другом только в узловых окружностях.

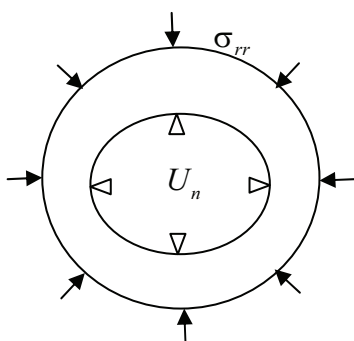


Рис. 8. Схема круговой области с эллиптическим вырезом

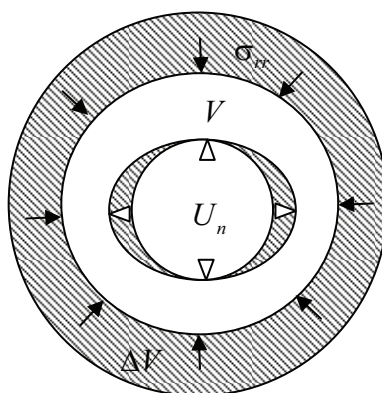


Рис. 9. Схема погружения

Каноническая область является телом вращения, поэтому функцию напряжений можно разложить в ряд по окружной координате:

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\varphi_n(r) \cdot \cos(n\theta) + \overline{\varphi_n(r)} \cdot \sin(n\theta) \right). \quad (14)$$

Непрерывное поле напряжений внутри элемента и на межэлементных границах обеспечивалось путем выражения неизвестных коэффициентов линейной комбинации, удовлетворяющей бигармониче-

скому уравнению, через напряжения в узловых окружностях. Функция напряжений аппроксимировалась следующими зависимостями:

$$\begin{aligned}\varphi_0(r) &= A_1^{(0)}r^2 + A_2^{(0)}r, \\ \varphi_1(r) &= A_1^{(1)}r^3 + A_2^{(1)}r^2 + A_3^{(1)}r^{-1} + A_4^{(1)}r^{-2}, \\ \varphi_n(r) &= A_1^{(n)}r^3 + A_2^{(n)}r^2 + A_3^{(n)}r + A_4^{(n)}, \quad n > 1.\end{aligned}$$

Выражения для $\overline{\varphi_n(r)}$ при $n \geq 1$ аналогичны $\varphi_n(r)$, при $n = 0$ $\overline{\varphi_n(r)} = 0$. Напряжения ищутся в виде

$$\begin{cases} \sigma_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sigma_r^{(n)}(r) \cdot \cos(n\theta) + \overline{\sigma_r^{(n)}(r)} \cdot \sin(n\theta) \right), \\ \sigma_\theta(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sigma_\theta^{(n)}(r) \cdot \cos(n\theta) + \overline{\sigma_\theta^{(n)}(r)} \cdot \sin(n\theta) \right), \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\tau_{r\theta}^{(n)}(r) \cdot \cos(n\theta) + \overline{\tau_{r\theta}^{(n)}(r)} \cdot \sin(n\theta) \right), \end{cases} \quad (15)$$

где $\sigma_r^{(n)}(r)$, $\sigma_\theta^{(n)}(r)$, $\tau_{r\theta}^{(n)}(r)$ – коэффициенты при соответствующих гармониках:

при $n = 0$

$$\begin{cases} \sigma_r^{(0)} = 2A_1^{(0)} + A_2^{(0)}r^{-1}, \\ \sigma_\theta^{(0)} = 2A_1^{(0)}, \\ \tau_{r\theta}^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (16)$$

при $n = 1$

$$\begin{cases} \sigma_r^{(1)} = 2A_1^{(1)}r + A_2^{(1)} - 2A_3^{(1)}r^{-3} - 3A_4^{(1)}r^{-4}, \\ \sigma_\theta^{(1)} = 6A_1^{(1)}r + 2A_2^{(1)} + 2A_3^{(1)}r^{-3} + 6A_4^{(1)}r^{-4}, \\ \tau_{r\theta}^{(1)} = A_1^{(1)}r + A_2^{(1)} + A_3^{(1)}r^{-3} + 3A_4^{(1)}r^{-4}, \end{cases} \quad (17)$$

при $n > 1$

$$\begin{cases} \sigma_r^{(n)} = 2A_1^{(n)}r + A_2^{(n)} - 2A_3^{(n)}r^{-3} - 3A_4^{(n)}r^{-4}, \\ \sigma_\theta^{(n)} = 6A_1^{(n)}r + 2A_2^{(n)} + 2A_3^{(n)}r^{-3} + 6A_4^{(n)}r^{-4}, \\ \tau_{r\theta}^{(n)} = A_1^{(n)}r + A_2^{(n)} + A_3^{(n)}r^{-3} + 3A_4^{(n)}r^{-4}, \end{cases} \quad (18)$$

Выражения для $\overline{\sigma_r^{(n)}(r)}$, $\overline{\sigma_\theta^{(n)}(r)}$, $\overline{\tau_{r\theta}^{(n)}(r)}$ при $n \geq 1$ аналогичны $\sigma_r^{(n)}(r)$, $\sigma_\theta^{(n)}(r)$, $\tau_{r\theta}^{(n)}(r)$, при $n = 0$ $\overline{\sigma_r^{(n)}(r)} = 0$, $\overline{\sigma_\theta^{(n)}(r)} = 0$, $\overline{\tau_{r\theta}^{(n)}(r)} = 0$.

Коэффициенты $A_1^{(0)} - A_4^{(n)}$ выражаются через значения узловых напряжений $\sigma_{ri}^{(0)}$, $\sigma_{rj}^{(0)}$, $\sigma_{ri}^{(1)}$, $\sigma_{rj}^{(1)}$, $\sigma_{\theta i}^{(1)}$, $\sigma_{\theta j}^{(1)}$, $\sigma_{ri}^{(n)}$, $\sigma_{rj}^{(n)}$, $\tau_{r\theta i}^{(n)}$, $\tau_{r\theta j}^{(n)}$ ($n > 1$) из условий:
при $n = 0$

$$\begin{cases} \sigma_r^{(0)}(r_i) = \sigma_{ri}^{(0)}, \\ \sigma_r^{(0)}(r_j) = \sigma_{rj}^{(0)}, \end{cases} \quad (19)$$

при $n = 1$

$$\begin{cases} \sigma_r^{(1)}(r_i) = \sigma_{ri}^{(1)}, \sigma_r^{(1)}(r_j) = \sigma_{rj}^{(1)}, \\ \sigma_\theta^{(1)}(r_i) = \sigma_{\theta i}^{(1)}, \sigma_\theta^{(1)}(r_j) = \sigma_{\theta j}^{(1)}, \end{cases} \quad (20)$$

при $n > 1$

$$\begin{cases} \sigma_r^{(n)}(r_i) = \sigma_{ri}^{(n)}, \sigma_r^{(n)}(r_j) = \sigma_{rj}^{(n)}, \\ \tau_{r\theta}^{(n)}(r_i) = \tau_{r\theta i}^{(n)}, \tau_{r\theta}^{(n)}(r_j) = \tau_{r\theta j}^{(n)}. \end{cases} \quad (21)$$

Аналогично вычисляются коэффициенты $\overline{A_1^{(1)}} - \overline{A_4^{(n)}}$, $n > 1$.

После того как все выражения для базисных функций сформулированы, реализуется метод конечных элементов в итерационной процедуре метода геометрического погружения.

На рис. 10, 11 представлены результаты решения методом геометрического погружения для исходной области V при угле $\theta = 0$, на рис. 12, 13 – для $\theta = \pi/2$ радиан. Из графиков прослеживается зависимость решения от окружной координаты. Относительная погрешность выполнения естественных граничных условий не превышает 0,56 %. Для канонической области V_0 сетка содержит 60 элементов. Остановка итерационной процедуры происходит в соответствии с (13) при $\delta = 10^{-7}$. Для достижения требуемой точности потребовалось 15 итераций.

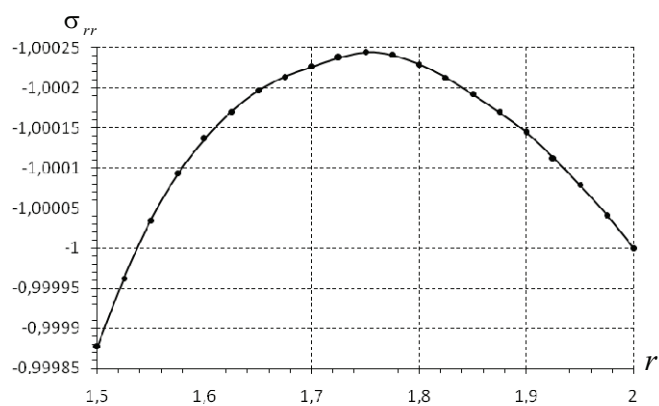


Рис. 10. Радиальные напряжения при $\theta = 0$

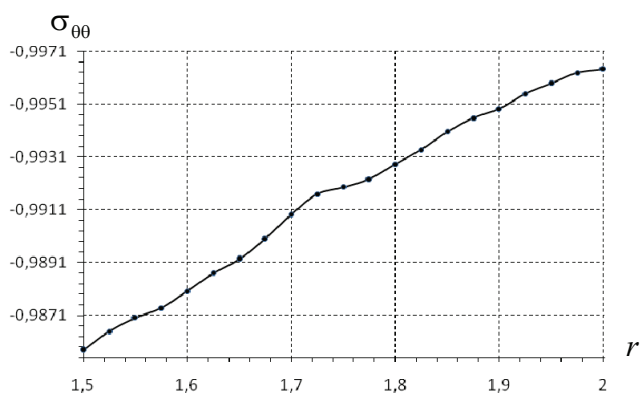


Рис. 11. Окружные напряжения при $\theta = 0$

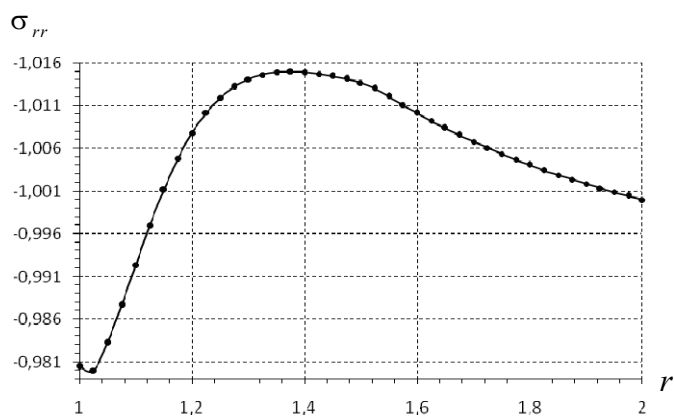


Рис. 12. Радиальные напряжения при $\theta = \pi/2$

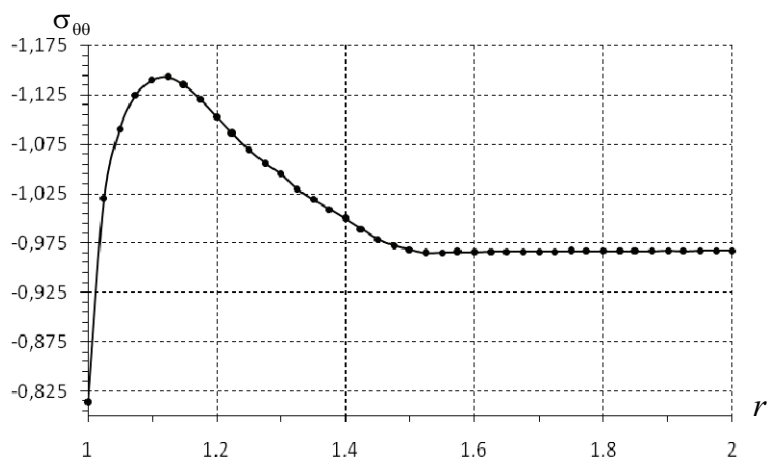


Рис. 13. Окружные напряжения при $\theta = \pi/2$

Таким образом, представлены результаты численного решения плоской задачи теории упругости для неканонической области, демонстрирующие практическую сходимость итерационной процедуры погружения, качество выполнения естественных граничных условий и характер распределения компонент тензора напряжений в области. Рассмотренный вариант метода геометрического погружения на основе вариационного принципа Кастильяно позволяет достигнуть высокой точности решения в напряжениях при достаточно небольшом числе элементов, эффективно решать задачи для конструкций неканонической формы в напряжениях.

Библиографический список

1. Шардаков И.Н., Труфанов Н.А., Матвеев В.П. Метод геометрического погружения в теории упругости / УрО РАН. – Екатеринбург, 1999. – 298 с.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
3. Коновалов А.Н. Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды. – 1973. – Т. 4, № 2. – С. 109–115.
4. Светашков А.А. Определение эффективных характеристик неоднородных вязкоупругих тел // Вычислительные технологии. – 2001. – Т. 6. № 1. – С. 52–64.

5. Павлов С.М., Светашков А.А. Итерационный метод решения задач линейной вязкоупругости // Известия высших учебных заведений. Физика. – 1993. – Т. 36. № 4. – С. 129–137.

6. Куликов Р.Г., Труфанов Н.А. Итерационный метод решения квазистатических нелинейных задач вязкоупругости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т.2, № 3. – С. 44–56.

7. Шардаков И.Н. Теоретические положения метода геометрического погружения для краевых задач упругопластического тела // Общие задачи и методы исследования пластичности и вязкоупругости материалов и конструкций. – Свердловск, 1986. – С. 123–127.

Получено 10.11.2010