

Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. О напряжениях в контурных точках одиночных подземных выработок различного поперечного сечения, подверженных всестороннему равномерному давлению // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2018. – Т. 9, № 3. – С. 54–70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06

Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. About stresses in a contour points in a single underground mines of different cross sections, subject to an overall uniform pressure. *Bulletin of PNRPU. Construction and Architecture*. 2018. Vol. 9. No. 3. Pp. 54-70. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06



**ВЕСТНИК ПНИПУ.
СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА**
Т. 9, № 3, 2018
**PNRPU BULLETIN.
CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE**
<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2018.3.06

УДК 624.131.522

О НАПРЯЖЕНИЯХ В КОНТУРНЫХ ТОЧКАХ ОДИНОЧНЫХ ПОДЗЕМНЫХ ВЫРАБОТОК РАЗЛИЧНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВСЕСТОРОННЕМУ РАВНОМЕРНОМУ ДАВЛЕНИЮ

А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, А.Н. Ушаков

Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 29 января 2018

Принята: 17 мая 2018

Опубликована: 28 сентября 2018

Ключевые слова:

отображающая функция, растягивающие и сжимающие напряжения, равномерное давление, подземная выработка.

АННОТАЦИЯ

Приведен вывод формулы тангенциальных нормальных напряжений для подземных горизонтальных выработок различных форм сечения, расположенных на заданной глубине при равномерной нагрузке, приложенной в точках контуров выработок; представлены формулы нахождения нулей и экстремальных значений тангенциальных нормальных напряжений. Рассмотрено решение задачи о напряженном состоянии на контуре трапециевидной выработки заданных размеров, а также выработки эллиптической формы сечения, находящихся на заданной глубине при определенных значениях величин равномерного давления, приложенного в точках контуров выработок при двух фиксированных значениях коэффициента бокового распора. Исследованы предельные случаи сечения эллиптической формы – круглое сечение и прямолинейная щель. Для всех случаев, рассмотренных в задаче, построены изолинии тангенциальных нормальных напряжений.

© ПНИПУ

© **Богомолов Александр Николаевич** – доктор технических наук, профессор, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.

Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.

Ушаков Андрей Николаевич – кандидат технических наук, профессор, e-mail: ushakov.andrej2012@yandex.ru.

Alexander N. Bogomolov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.

Oksana A. Bogomolova – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.

Andrei N. Ushakov – Ph.D. in Technical Sciences, Professor, e-mail: ushakov.andrej2012@yandex.ru.

ABOUT STRESSES IN A CONTOUR POINTS IN A SINGLE UNDERGROUND MINES OF DIFFERENT CROSS SECTIONS, SUBJECT TO AN OVERALL UNIFORM PRESSURE

A.N. Bogomolov, O.A. Bogomolova, A.N. Ushakov

Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 29 January 2018
Accepted: 17 May 2018
Published: 28 September 2018

Keywords:

displaying function, tensile and compressive stresses, uniform pressure, underground production.

ABSTRACT

The paper presents the conclusion of the formula of the tangential normal stresses for underground horizontal workings of different cross-section forms located at a given depth at a uniform load applied at the points of workings contours; formulas for finding zeros and extreme values of the tangential normal stresses are given. The solution of the problem of the stress state on the trapezoidal development circuit of the specified dimensions, as well as the development of the elliptic cross-section shape at a given depth at certain values of the values of the uniform pressure applied at the points of the workings contours at two fixed values of the side-pressure coefficient is considered. The limiting cases of the elliptic cross – section-a circular cross-section and a rectilinear slit-are investigated. For all cases considered in the problem, the isolines of tangential normal stresses are constructed.

© PNRPU

Хорошо известно, что одной из центральных проблем геомеханики является задача о напряженно-деформированном состоянии вокруг выработок различных форм сечения в горном или грунтовом массиве [1–4]. При этом особенно важной является задача о распределении напряжений на контуре выработки. Поскольку один из размеров – как правило, длина – во много раз превышает два других, то задача по вычислению компонент напряжений может быть сведена к плоской. Для решения плоских задач теории упругости весьма эффективным является применение методов теории функций комплексного переменного [5–13]. При этом сечение выработки можно получить при помощи функции комплексного переменного $z = \omega(\zeta)$, осуществляющей конформное отображение внутренности или внешности единичного круга на внешность бесконечной односвязной области с отверстиями различной конфигурации, форма которых зависит от значений коэффициентов отображающей функции.

Однако построение функции, совершающей конформное отображение, представляет собой довольно трудную задачу, и даже если удастся получить для нее аналитические выражения – как правило, достаточно громоздкое, то приходится отказываться от этих выражений, заменяя их наиболее удобными и хорошо изученными функциями. К последним следует отнести прежде всего полиномы. Это обстоятельство способствовало разработке приближенных методов построения отображающих функций [9, 14–16]. К классу полиномов относится и предложенная В.К. Цветковым [17, 18] отображающая функция, используемая в настоящей работе.

Целью данного исследования является получение и анализ формулы для определения напряжений по контурам одиночных отверстий подземных выработок заданных конфигураций в случае, когда эти контуры подвержены равномерному давлению p .

Рассмотрим бесконечную односвязную область, границей которой является семейство простых замкнутых кривых. Следуя [17, 18], функцию, отображающую эту область на внутренность единичного круга, примем в виде

$$z = \omega(\zeta) = i(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3), \quad (1)$$

где A, B, C, D – действительные числа.

Полагая в выражении (1) $\zeta = e^{i\theta}$ и отделяя вещественную часть от мнимой, получим уравнения контуров отверстий в параметрическом виде:

$$\begin{aligned} x(\theta) &= (A - B)\sin \theta - C \sin 2\theta - D \sin 3\theta, \\ y(\theta) &= (A + B)\cos \theta + C \cos 2\theta + D \cos 3\theta, \end{aligned} \quad (2)$$

где $0 < \theta \leq 2\pi$.

Рассмотрим подземную выработку неограниченной длины и сечения, конфигурация которого определяется при помощи отображающей функции (1) и задается параметрическим уравнением (2). Пусть контур этой выработки подвержен равномерному давлению p . Тогда напряженное состояние в горном массиве, ослабленном выработкой, имеет вид

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = p, \quad (3)$$

где p – постоянная величина, причем будем полагать [2], что при $p > 0$ контур выработки испытывает равномерное сжатие постоянной величины p , а при $p < 0$ – равномерное растяжение той же интенсивности.

Для нахождения компоненты тангенциального нормального напряжения введем функцию комплексного переменного:

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \quad (4)$$

где $\varphi_1(\zeta)$ соответствует напряженному состоянию в не нарушенном выработкой горном массиве, а $\varphi_0(\zeta)$ определяет компоненту напряжения, вызванную наличием выработки.

Тогда, учитывая (1) и (3), имеем

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{pi}{2}(A\zeta^{-1} + B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3). \quad (5)$$

Теперь необходимо получить выражение для функции $\varphi_0(\zeta)$.

Рассмотрим граничное условие вида [9, с. 60]

$$\varphi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma) \overline{\varphi_0'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \overline{b_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (6)$$

где ζ – точка, лежащая внутри единичного круга γ ; σ – значение переменной ζ на единичной окружности; $f_1^0 + if_2^0$ – приведенное контурное условие для функции $\varphi_0(\zeta)$.

Поскольку функция $\varphi_0(\zeta)$ голоморфна в круге γ , то положим

$$\varphi_0(\zeta) = a_1 i \zeta + a_2 i \zeta^2 + a_3 i \zeta^3 + \dots, \quad (7)$$

где a_1, a_2, a_3, \dots – действительные числа.

Тогда

$$\overline{\varphi_0'(\sigma)} = -a_1 i - 2a_2 i \frac{1}{\sigma} - 3a_3 i \frac{1}{\sigma^2} \dots \quad (8)$$

Далее

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{C}{A} + \frac{D}{A}\sigma + \frac{B(A+D)\sigma^3 + C(B+2D)\sigma^2 + (A^2 + 2C^2 + 3D^2)\sigma + 3CD}{A(A\sigma^4 - B\sigma^2 - 2C\sigma - 3D)}. \quad (9)$$

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

в котором функция $\varphi_0(\zeta)$ имеет вид (7). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[\frac{C}{A} + \frac{D}{A}\sigma + \frac{B(A+D)\sigma^3 + C(B+2D)\sigma^2 + (A^2 + 2C^2 + 3D^2)\sigma + 3CD}{A(A\sigma^4 - B\sigma^2 - 2C\sigma - 3D)} \right] \times \\ & \quad \times \left[-a_1 i - 2a_2 i \frac{1}{\sigma} - 3a_3 i \frac{1}{\sigma^2} - \dots \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{i}{A} (Ca_1 + 2Da_2 + Da_1 \zeta). \end{aligned} \quad (10)$$

Перейдем к вычислению интеграла, стоящего в правой части граничного условия (6). Для рассматриваемого случая имеем

$$f_1^0 + if_2^0 = -pi \left(\frac{A}{\sigma} + B\sigma + C\sigma^2 + D\sigma^3 \right).$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma = -pi (B\zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3). \quad (11)$$

Подставляя значения интегралов (10), (11) в граничное условие (6) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ζ , получим

$$a_1 = -\frac{AB}{A-D} p, \quad a_2 = -Cp, \quad a_3 = -Dp, \quad a_4 = a_5 = \dots = 0. \quad (12)$$

Таким образом, с учетом значений (12) из (7) имеем

$$\varphi_0(\zeta) = -pi \left(\frac{AB}{A-D} \zeta + C\zeta^2 + D\zeta^3 \right); \quad (13)$$

при этом компонента напряжения $\varphi_1(\zeta)$ описывается формулой (5).

Для нахождения напряжений по контурам отверстий воспользуемся соотношением Г.В. Колосова – Н.И. Мусхелишвили [6]:

$$\sigma_p + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta), \quad (14)$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} = \frac{p}{2} - p \frac{\frac{AB}{A-D} \zeta^2 + 2C\zeta^3 + 3D\zeta^4}{-A + B\zeta^2 + 2C\zeta^3 + 3D\zeta^4}. \quad (15)$$

Положим $\zeta = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Тогда числитель дроби (15) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{AB}{A-D}(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + 2C(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + 3D(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \\ & = \frac{AB}{A-D} \cos 2\theta + 2C \cos 3\theta + 3D \cos 4\theta + i \left(\frac{AB}{A-D} \sin 2\theta + 2C \sin 3\theta + 3D \sin 4\theta \right); \end{aligned}$$

знаменатель дроби имеет вид

$$\begin{aligned} & -A + B(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) + 2C(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + 3D(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \\ & = (-A + B \cos 2\theta + 2C \cos 3\theta + 3D \cos 4\theta) + i(B \sin 2\theta + 2C \sin 3\theta + 3D \sin 4\theta). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{AB}{A-D} \cos 2\theta + 2C \cos 3\theta + 3D \cos 4\theta, \\ R_2 &= \frac{AB}{A-D} \sin 2\theta + 2C \sin 3\theta + 3D \sin 4\theta, \\ S_1 &= -A + B \cos 2\theta + 2C \cos 3\theta + 3D \cos 4\theta, \\ S_2 &= B \sin 2\theta + 2C \sin 3\theta + 3D \sin 4\theta. \end{aligned} \tag{16}$$

Тогда соотношение (14) с учетом обозначений (16) принимает вид

$$\sigma_p + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta) = 2p \left(1 - 2 \frac{R_1 S_1 + R_2 S_2}{S_1^2 + S_2^2} \right), \tag{17}$$

причем

$$\begin{aligned} S_1^2 + S_2^2 &= A^2 + B^2 + 4C^2 + 9D^2 + 4C(B + 3D) \cos \theta + 2B(3D - A) \cos 2\theta - \\ & - 4AC \cos 3\theta - 6AD \cos 4\theta. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$K = A^2 + B^2 + 4C^2 + 9D^2, \quad L = 4C(B + 3D), \quad M = 2B(3D - A), \quad N = -4AC, \quad R = -6AD. \tag{18}$$

Тогда

$$S_1^2 + S_2^2 = K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta. \tag{19}$$

Далее, с учетом соотношений (16) и (18), формула (17) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sigma_p + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta) = \\ & = 2p \left(1 - 2 \frac{U + V \cos \theta + W \cos 2\theta + 0,5N \cos 3\theta + 0,5R \cos 4\theta}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta} \right), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$U = \frac{AB^2}{A-D} + 4C^2 + 9D^2,$$

$$V = \frac{2C}{A-D} [AB + (A-D)(B+6D)], \quad (21)$$

$$W = \frac{B}{A-D} [6AD - A^2 - 3D^2].$$

Поскольку к контуру отверстия приложено давление интенсивности p , формула тангенциального нормального напряжения (20) принимает вид

$$\sigma_\theta = p \left(1 - 4 \frac{U + V \cos \theta + W \cos 2\theta + 0,5N \cos 3\theta + 0,5R \cos 4\theta}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta} \right). \quad (22)$$

Проведем исследование соотношения (22) как функции аргумента θ , т.е. $\sigma_\theta = \sigma(\theta)$.

Нетрудно видеть, что функция $\sigma(\theta)$ регулярна при любых значениях аргумента θ . Действительно, согласно (19) знаменатель дроби (22) неотрицателен при всех значениях аргумента θ . Из вывода формулы (22) следует, что коэффициент отображающей функции $A \neq 0$. Тогда, поскольку два последних выражения из формулы (16) не обращаются в нуль одновременно, заключаем, что знаменатель дроби (22) не обращается в нуль ни при каких значениях аргумента θ .

Нахождение нулей функции $\sigma(\theta)$ сводится к решению уравнения

$$8Rt^4 + 4Nt^3 - (2M - 8W + 8R)t^2 - (L - 4V + 3N)t + 4U + M + R - K - 4W = 0, \quad (23)$$

где $t = \cos \theta$, $|t| \leq 1$.

Заметим, что при $D = 0$ уравнение (23) является кубическим, а при $C = D = 0$ – квадратным. Согласно [18] это означает, что в случае сечений полуэллиптической формы значения тангенциальных нормальных напряжений имеют на контурах выработки не более трех нулей, а для сечений эллиптической формы – не более двух.

Найдем экстремальные значения функции $\sigma(\theta)$. Для этого вычислим ее производную. Преобразовывая получившееся выражение и приравнявая его к нулю, имеем два уравнения для нахождения критических значений:

$$\sin \theta = 0,$$

$$32a_1 \cos^5 \theta + 16a_2 \cos^4 \theta + 8(a_3 - 4a_1) \cos^3 \theta + 4(a_4 - 3a_2) \cos^2 \theta + 2(3a_1 - 2a_3 + a_5) \cos \theta + (a_2 - a_4 + a_6) = 0, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 2RW - 1/2 RM, \quad a_2 = 3/2 VR - 3/4 RL - 1/4 MN + 1/2 NW, \\ a_3 &= 4RU - 1/2 NL + VN - 2RK, \\ a_4 &= 3NU - 3/2 NK - 5/4 RL + 5/2 RV + 1/2 MV - 1/2 WL, \\ a_5 &= 2UM - 3/2 MR + 2VN + 3RW - LN - 2WK, \\ a_6 &= UL - 3/2 WL + 3/2 MV + 5/2 NW - 5/4 MN - VK. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнение $\sin \theta = 0$ дает значения $\theta_1 = 0$ и $\theta_2 = \pi$, а уравнение (24) можно решить на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ приближенно.

Наконец, заметим, что для всех значений аргумента θ выполняется равенство $\sigma(\pi - \theta) = \sigma(\pi + \theta)$, т.е. график функции $\sigma(\theta)$ симметричен относительно прямой $\theta = \pi$.

В работе [17] приведена формула тангенциальных нормальных напряжений, использованная автором для определения при заданных напряжениях на контурах выработок, возникающих от действия собственного веса пород, форм поперечных сечений, построенных при помощи отображающей функции (1) подземных и открытых выработок в зависимости от коэффициента бокового распора ненарушенного однородного, линейно деформируемого горного массива. Приведем ее с учетом выбора знаков для растягивающих и сжимающих напряжений. Имеем

$$\sigma_{\theta} = -\frac{\gamma H(F + G \cos \theta + Q \cos 2\theta)}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta}, \quad (26)$$

где

$$F = (1 + \mu)(9D^2 + 4C^2 - A^2) + BS; \quad Q = (1 + \mu)(A + 3D)B + (3D - A)S; \quad (27)$$

$$G = 2C((1 + \mu)(B + 6D) + S);$$

$$S = \frac{(1 + \mu)(A + D)B - 2(1 - \mu)A^2}{A - D};$$

коэффициенты, стоящие в знаменателе дроби (26), вычисляются по формулам (18); γ – объемный вес пород; μ – коэффициент бокового распора; H – глубина заложения выработки.

Вывод формулы (26) приведен в монографии [19].

Формула (26) получена в предположении, что глубина заложения выработки H существенна. Следуя [4], будем полагать, что

$$H \geq 50R_{\max}, \quad (28)$$

где R_{\max} – наибольший линейный размер сечения выработки.

Складывая формулы (22) и (26), получим формулу тангенциальных нормальных напряжений для решения поставленной задачи, т.е.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = & -\frac{\gamma H(F + G \cos \theta + Q \cos 2\theta) - p(K - 4U + (L - 4V) \cos \theta)}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta} + \\ & + \frac{(M - 4W) \cos 2\theta - N \cos 3\theta - R \cos 4\theta}{K + L \cos \theta + M \cos 2\theta + N \cos 3\theta + R \cos 4\theta}. \end{aligned} \quad (29)$$

Формула (29) описывает напряженное состояние на контуре выработки заданного сечения при условии равномерного давления интенсивности p в точках контура.

Нахождение нулей тангенциальных нормальных напряжений сводится к решению уравнения

$$\begin{aligned} 8Rpt^4 + 4Npt^3 + 2(Q\gamma H - (4W - M - 4R)p)t^2 + (G\gamma HL + (4V - L - 3N)p)t + \\ + (F - Q)\gamma H + (M - 4W + R - K + 4U)p = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

где $t = \cos \theta$, $|t| \leq 1$.

С учетом результатов работы [20] заметим, что экстремальные значения функции (29) могут быть получены из уравнений:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 0, \\ 32a_1 \cos^5 \theta + 16a_2 \cos^4 \theta + 8(a_3 - 4a_1) \cos^3 \theta + 4(a_4 - 3a_2) \cos^2 \theta + \\ &+ 2(3a_1 - 2a_3 + a_5) \cos \theta + (a_2 - a_4 + a_6) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= -RQ\gamma H + (2RM - 4RW)p, \\ a_2 &= -(3/2GR + 1/2NQ)\gamma H + (3RL - 6RV + MN - 2NW)p, \\ a_3 &= -(GN + 4FR)\gamma H + (8RK + 2NL - 4VN - 16RU)p, \\ a_4 &= (1/2QL - 1/2MG - 5/2GR - 3FN)\gamma H + \\ &+ (5RL + 2WL + 6NK - 10RV - 2VM - 12NU)p, \\ a_5 &= (2QK - 2MF - 2GN - 3RQ)\gamma H + \\ &+ (6MR + 4LN + 8WK - 12RW - 8VN - 8MU)p, \\ a_6 &= (GK + 3/2QL - 5/2NQ - 3/2MG - FL)\gamma H + \\ &+ (5MN + 6WL + 4VK - 10NW - 6VM - 4LU)p. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь, используя представленные выше соотношения, приведем пример решения задачи, требующей применения формулы (29).

Задача. Исследовать напряженное состояние в точках границы односвязной бесконечной области, имеющей заранее заданное очертание и находящейся под действием всестороннего равномерного давления, при различных значениях величины коэффициента бокового распора.

Решение задачи проведем для контуров, имеющих вид трапеции и эллипса.

Рассмотрим в качестве вмещающей породы гранит с объемным весом $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$ и пределами прочности при растяжении $R_{\text{рас}} = -17 \text{ МПа}$ и сжатии $R_{\text{сж}} = 200 \text{ МПа}$. Поскольку наибольший линейный размер трапециевидной выработки – ее ширина, равная 5 м, то, с учетом (25), положим $H = 250 \text{ м}$. Тогда $\gamma H = 625 \text{ 000 кг/м}^2$.

При решении задачи используем два значения величины коэффициента бокового распора: $\mu_1 = 0,25$ и $\mu_2 = 1$. Первое из них соответствует величине коэффициента Пуассона ν , которая для горных пород составляет в среднем 0,02 [4]. Второе соответствует величине коэффициента Пуассона $\nu = 0,5$ и предполагает гидростатическое распределение напряжений в горном массиве, которое принимается при определении напряжений на достаточно больших глубинах [1].

1. Выработка трапециевидного сечения. Рассмотрим выработку трапециевидного сечения (рис. 1), соответствующую коэффициентам отображающей функции (1), имеющим следующие значения:

$$A = 2,44, \quad B = -0,24, \quad C = 0,17, \quad D = -0,2. \quad (33)$$

Заметим, что значения коэффициентов (21) не зависят от величины коэффициента бокового распора и в обоих случаях составляют:

$$\begin{aligned} U = 0,529, \quad V = 0,084, \quad W = 0,818; \\ K = 6,487, \quad L = -0,571, \quad M = 1,459; \quad N = -1,659, \quad R = 2,928. \end{aligned} \quad (34)$$

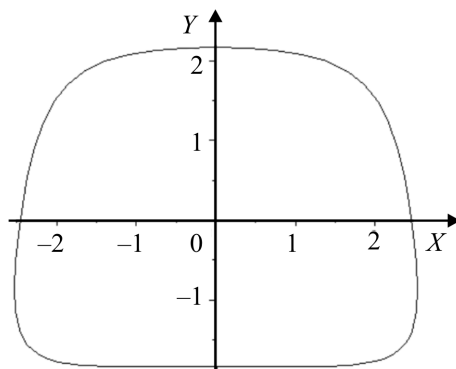


Рис. 1. Выработка трапецевидного сечения
 Fig. 1. Production of trapezoid-visible cross-section

Случай $\mu_1 = 0,25$.

На основании формул (27) получаем:

$$F_1 = -5,974; \quad G_1 = -1,848; \quad Q_1 = 10,505. \quad (35)$$

Тогда уравнение (30) принимает вид

$$\begin{aligned} 23,424p \cos^4 \theta - 6,636p \cos^3 \theta + (21,011\gamma H - 19,795p) \cos^2 \theta + \\ + (-1,848\gamma H + 5,886p) \cos \theta - 16,479\gamma H - 3,257p = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Для нахождения нулей необходимо задать значения давления p . Из условий задачи следует, что необходимо выбирать значения $p < 0$.

В качестве значений напряжений, приложенных к контуру выработки, положим:

$$p_1 = 0,1 \text{ МПа}, \quad p_2 = 1 \text{ МПа}, \quad p_3 = 2 \text{ МПа}. \quad (37)$$

Прямые вычисления по формуле (35) с учетом (36) дают следующие значения нулей:

при $p_1 = 0,1 \text{ МПа}$ $\theta_1 = 0,409$, $\theta_2 = 2,516$;

при $p_2 = 1 \text{ МПа}$ $\theta_1 = 0,858$, $\theta_2 = 1,981$;

при $p_3 = 2 \text{ МПа}$ $\theta_1 = 1,120$, $\theta_2 = 1,748$.

Перейдем к вычислению экстремальных значений тангенциальных нормальных напряжений.

По формулам (31) и (32) с учетом (34), (35) получим:

при $p_1 = 0,1 \text{ МПа}$ имеем $\theta_1 = 1,077$, $\theta_2 = 1,391$, $\theta_3 = 2,099$.

Присоединяя к полученным значениям $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем:

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) = 1260541,046, \quad \sigma(\theta_4) = -198334,510, \\ \sigma(\theta_2) = 1213969,911, \quad \sigma(\theta_5) = -295701,299, \\ \sigma(\theta_3) = 1902525,345, \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{\min}(\theta_5) = -295701,299, \quad \sigma_{\max}(\theta_3) = 1902525,345. \quad (38)$$

При

$$p_2 = 1 \text{ МПа} \text{ имеем } \theta_1 = 0,564, \theta_2 = 1,465, \theta_3 = 2,313.$$

Пусть $\theta_4 = 0, \theta_5 = \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= -518693,514, & \sigma(\theta_4) &= -237925,337, \\ \sigma(\theta_2) &= 905522,678, & \sigma(\theta_5) &= -218674,846. \\ \sigma(\theta_3) &= -2285189,351, \end{aligned}$$

Значит,

$$\sigma_{\min}(\theta_3) = -2285189,351, \quad \sigma_{\max}(\theta_2) = 905522,678. \quad (39)$$

И наконец, при

$$p_3 = 2 \text{ МПа} \text{ имеем } \theta_1 = 0,691, \theta_2 = 1,446, \theta_3 = 2,269.$$

Дополняя значения аргумента значениями $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, имеем

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= -1618216,705, & \sigma(\theta_4) &= -281914,144, \\ \sigma(\theta_2) &= 557837,19, & \sigma(\theta_5) &= -133089,898. \\ \sigma(\theta_3) &= -6129468,054, \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sigma_{\min}(\theta_3) = -6129468,054, \quad \sigma_{\max}(\theta_2) = 557837,19. \quad (40)$$

Проведенные вычисления позволяют выделить участки, на которых при заданных значениях равномерного давления (37) действуют растягивающие напряжения, а именно:

при $p_1 = 0,1 \text{ МПа}$ имеем $\theta \in (0; 0,409) \cup (2,516; 3,767) \cup (5,874; 2\pi)$;

при $p_1 = 1 \text{ МПа}$ имеем $\theta \in (0; 0,858) \cup (1,981; 4,302) \cup (5,425; 2\pi)$;

при $p_1 = 2 \text{ МПа}$ имеем $\theta \in (0; 1,120) \cup (1,748; 4,535) \cup (5,163; 2\pi)$.

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки трапециевидной формы сечения при заданных значениях равномерного давления p_1, p_2 и p_3 в случае $\mu_1 = 0,25$ приведены на рис. 2.

Опираясь на результаты работы [19] и значения (38)–(40), исследуем прочность рассматриваемой выработки при данных значениях (34) давления. Для этого необходимо выполнение следующих неравенств:

$$|\sigma_{\min}(\theta)| < R_{\text{рас}}/g, \quad |\sigma_{\max}(\theta)| < R_{\text{сж}}/g. \quad (41)$$

Проверка показывает, что при $p_1 = 0,1 \text{ МПа}$ оба неравенства (41) выполняются; при $p_2 = 1 \text{ МПа}$ и $p_3 = 2 \text{ МПа}$ выполняется лишь второе из неравенств (41). Таким образом,

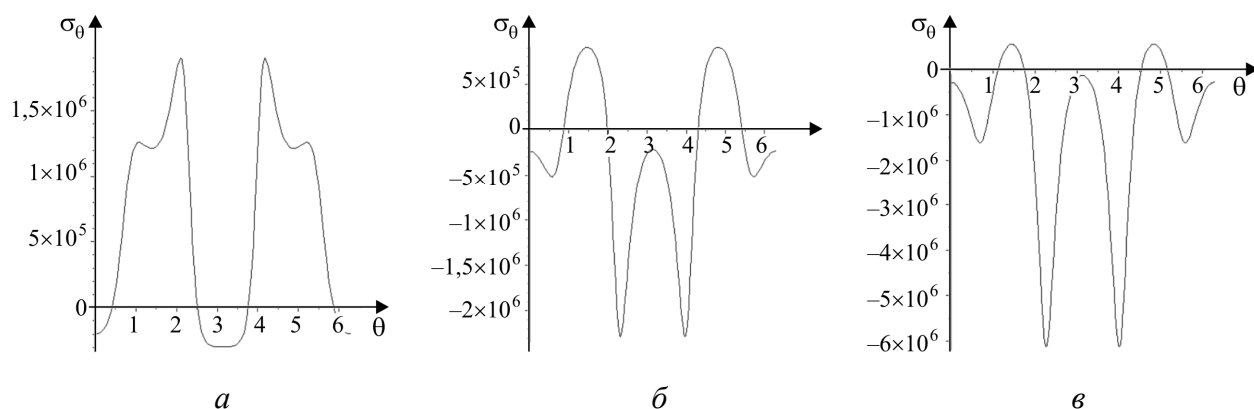


Рис. 2. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений
 Fig. 2. Diagrams of tangential normal stresses

данная трапециевидная выработка при давлении, равном $p_1 = 0,1$ МПа, является прочной, а при остальных двух значениях давления выработка теряет прочность, поскольку растягивающее напряжение, прикладываемое к точкам контура выработки, превышает предельно допустимое значение.

Случай $\mu_2 = 1$.

Формулы (27) дают

$$F_2 = -10,858; G_2 = -1,117; Q_2 = 0,355. \quad (42)$$

Тогда уравнение (30) принимает вид

$$23,424p \cos^4 \theta - 6,636p \cos^3 \theta + (0,710\gamma H - 19,795p) \cos^2 \theta + (-1,117\gamma H + 5,886p) \cos \theta - 11,213\gamma H - 3,257p = 0. \quad (43)$$

Прямые вычисления по формуле (43) с учетом (37) дают следующие значения нулей: при $p_1 = 0,1$ МПа нулей нет;

при $p_2 = 1$ МПа $\theta_1 = 1,899$, $\theta_2 = 2,597$;

при $p_3 = 2$ МПа $\theta_1 = 0,469$, $\theta_2 = 1,206$, $\theta_3 = 1,606$, $\theta_4 = 2,765$.

Аналогично предыдущему случаю, вычислим экстремальные значения тангенциальных нормальных напряжений.

При $p_1 = 0,1$ МПа имеем $\theta_1 = 0,754$, $\theta_2 = 1,492$, $\theta_3 = 2,229$.

Пусть $\theta_4 = 0$, $\theta_5 = \pi$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(\theta_1) &= 1561492,011, & \sigma(\theta_4) &= 835891,682, \\ \sigma(\theta_2) &= 828152,256, & \sigma(\theta_5) &= 456197,872. \\ \sigma(\theta_3) &= 2291719,722, \end{aligned}$$

Тогда

$$\sigma_{\min}(\theta_5) = 456197,872, \quad \sigma_{\max}(\theta_3) = 2291719,722. \quad (44)$$

При $p_2 = 1$ МПа имеем $\theta_1 = 0,846$, $\theta_2 = 1,340$, $\theta_3 = 2,249$.

Тогда, с учетом $\theta_4 = 0$ и $\theta_5 = \pi$, получим:

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= 406566,728, & \sigma(\theta_4) &= 796300,855, \\ \sigma(\theta_2) &= 531092,285, & \sigma(\theta_5) &= 533224,325; \\ \sigma(\theta_3) &= -1289352,193,\end{aligned}$$

$$\sigma_{\min}(\theta_3) = -1289352,193, \quad \sigma_{\max}(\theta_4) = 796300,855. \quad (45)$$

И наконец, при $p_3 = 2$ МПа имеем $\theta_1 = 0,792$, $\theta_2 = 1,413$, $\theta_3 = 2,242$.

Тогда, полагая $\theta_4 = 0$, $\theta_5 = \pi$, получим:

$$\begin{aligned}\sigma(\theta_1) &= -852540,364, & \sigma(\theta_4) &= 752311,047, \\ \sigma(\theta_2) &= 177260,982, & \sigma(\theta_5) &= 618809,273; \\ \sigma(\theta_3) &= -5261060,096,\end{aligned}$$

$$\sigma_{\min}(\theta_3) = -5261060,096, \quad \sigma_{\max}(\theta_4) = 752311,047. \quad (46)$$

Как и для предыдущего случая, выделим участки, на которых при заданных значениях равномерного давления (37) действуют растягивающие напряжения. Имеем:

при $p_1 = 0,1$ МПа на интервале $(0, 2\pi)$ действуют только сжимающие напряжения;

при $p_1 = 1$ МПа $\theta \in (1,899; 2,597) \cup (3,686; 4,384)$;

при $p_1 = 2$ МПа $\theta \in (0,469; 1,206) \cup (1,606; 2,765) \cup (3,518; 4,677) \cup (5,077; 5,814)$.

На остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки трапецевидной формы сечения при заданных значениях равномерного давления p_1, p_2 и p_3 в случае $\mu_2 = 1$ приведены на рис. 3.

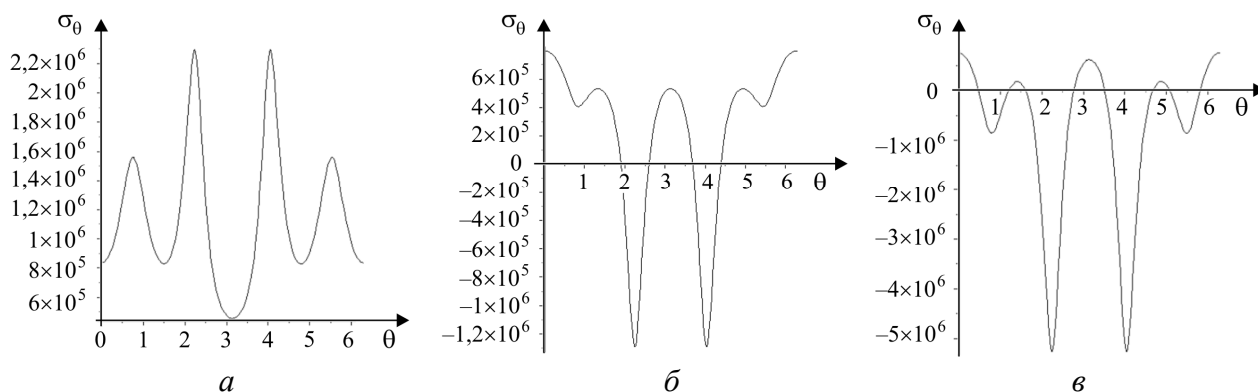


Рис. 3. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений
Fig. 3. Diagrams of tangential normal stresses

Для определения прочности выработки воспользуемся неравенствами (41). Проверка справедливости этих неравенств с учетом значений (44)–(46) показывает, что не выполняется лишь первое из неравенств при $p_3 = 2$ МПа, что означает потерю прочности трапецевидной выработки при данном растяжении.

2. Выработка эллиптического сечения

Полагая в отображающей функции (1)

$$A = R, B = nR, C = D = 0, \quad R > 0, \quad -1 < n \leq 0, \quad (47)$$

получим

$$z = \omega(\zeta) = iR(\zeta^{-1} + n\zeta). \quad (48)$$

Функция (48) осуществляет конформное отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием, причем окружности $|\zeta| = 1$ соответствует эллипс с центром в начале координат и полуосями $a = R(1-n)$, $b = R(1+n)$. Задавая значения R и n , можно получать эллипсы любой формы и размера. Если $n = 0$, то эллипс обращается в окружность. В предельном случае $n \rightarrow -1$ эллипс обращается в отрезок оси Ox длины $4R$, заключенный между точками $x = \pm 2R$, и область обращается в бесконечную плоскость с прямолинейной щелью.

Согласно (21)

$$U = n^2 R^2, V = 0, W = -nR^2, K = (1+n^2)R^2, L = 0, M = -2nR^2, N = R = 0. \quad (49)$$

С учетом соотношений (49) формулы (27) дают:

– при $\mu_1 = 0,25$

$$F_1 = R^2(1,25n^2 - 1,5n - 1,25), G_1 = 0; Q_1 = 1,5R^2; \quad (50)$$

– при $\mu_2 = 1$

$$F_2 = 2R^2(n^2 - 1), G_2 = 0, Q_2 = 0. \quad (51)$$

Уравнение (30) для коэффициентов (50) и (51) принимает соответственно вид:

$$(3\gamma H - 4np) \cos^2 \theta + (1,25n^2 - 2,75 - 1,5n)\gamma H + (3n^2 + 2n - 1)p = 0; \quad (52)$$

$$-4np \cos^2 \theta + 2(n^2 - 1)\gamma H + (3n^2 + 2n - 1)p = 0. \quad (53)$$

Уравнение (31) с учетом (32), (49)–(51) на отрезке $0 \leq \theta \leq \pi$ в обоих случаях дает значение $\theta_1 = \pi/2$.

Формула для тангенциальных нормальных напряжений с учетом значений коэффициентов (49), (50) принимает вид

$$\sigma_\theta = -\gamma H \left(\frac{1,25n^2 - 1,5n - 1,25 + 1,5 \cos 2\theta}{1 + n^2 - 2n \cos 2\theta} \right) + p \left(1 - 4 \frac{n^2 - n \cos 2\theta}{1 + n^2 - 2n \cos 2\theta} \right). \quad (54)$$

Аналогично предыдущему случаю, учитывая (49), (51), имеем

$$\sigma_\theta = -\gamma H \left(\frac{2n^2 - 2}{1 + n^2 - 2n \cos 2\theta} \right) + p \left(1 - 4 \frac{n^2 - n \cos 2\theta}{1 + n^2 - 2n \cos 2\theta} \right). \quad (55)$$

Полагая в формулах (54) и (55) $n = 0$, получим формулы тангенциального нормального напряжения для круглой выработки:

$$\sigma_\theta = \gamma H(1,25 - 1,5 \cos 2\theta) + p; \quad (56)$$

$$\sigma_\theta = 2\gamma H + p. \quad (57)$$

Подставляя данные задачи в соотношение (56) и приравнявая его к нулю, выделим участки, на которых при заданных значениях равномерного давления (37) действуют растягивающие напряжения. Имеем

при $p_1 = 0,1$ МПа $\theta \in (0; 0,379) \cup (2,763; 3,521) \cup (5,896; 2\pi)$;

при $p_1 = 1$ МПа $\theta \in (0; 0,903) \cup (2,238; 4,045) \cup (5,380; 2\pi)$; на остальных участках интервала $(0, 2\pi)$ действуют сжимающие напряжения;

при $p_1 = 2$ МПа на всем участке $(0, 2\pi)$ действуют лишь растягивающие напряжения.

Эпюры тангенциальных нормальных напряжений для выработки круглого сечения при $\mu_1 = 0,25$ и заданных значениях равномерного давления приведены на рис. 4.

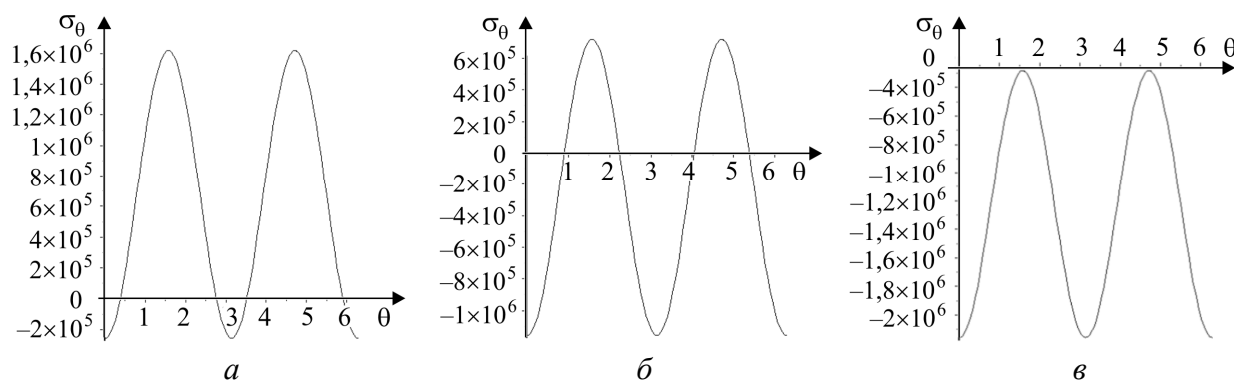


Рис. 4. Эпюры тангенциальных нормальных напряжений
Fig. 4. Diagrams of tangential normal stresses

Нетрудно видеть, что при $\mu_2 = 1$ растягивающие напряжения переходят в сжимающие и наоборот – при значениях равномерного давления, превышающего величину $2\gamma H$, равную, с учетом принятых в данной задаче значений давления (37), 1,25 МПа. Таким образом, при $p_1 = 0,1$ МПа и $p_2 = 1$ МПа в точках контура будут действовать сжимающие, а при $p_3 = 2$ МПа – растягивающие напряжения.

Наконец, устремляя в формулах (54) и (55) $n \rightarrow -1$, получим формулы тангенциальных нормальных напряжений для прямолинейной щели длины $4R$ на оси абсцисс. Имеем

$$\sigma_\theta = -0,75\gamma H - p. \quad (58)$$

$$\sigma_\theta = -p. \quad (59)$$

Таким образом, в случае коэффициента бокового распора $\mu_1 = 0,25$, прикладывая в точках контура растягивающее равномерное давление, тангенциальные нормальные напряжения будут сохранять знак при $p < 0,75\gamma H$, т.е. в условиях нашей задачи $p < 468750$ Па, что отвечает значению $p_1 = 0,1$ МПа; при $p_2 = 1$ МПа и $p_3 = 2$ МПа в точках контура в этом случае будут сжимающие напряжения. В случае $\mu_2 = 1$, как следует из формулы (59), прикладывая, например, в точках контура растягивающее равномерное давление, получим сжимающие напряжения той же интенсивности.

Выводы

1. Получены в замкнутом виде выражения для вычисления тангенциальных нормальных напряжений для подземных горизонтальных выработок различной формы поперечного сечения, расположенных на заданной глубине при равномерном давлении, распределенном по контуру выработки. Формулы для нахождения нулевых и экстремальных значений тангенциальных нормальных напряжений представляют собой тригонометрические уравнения, соответственно четвертого и пятого порядков, которые могут быть решены приближенно с достаточной для практики степенью точности. Вычисленные по анонсированным формулам величины напряжений зависят от численных значений объемного веса и коэффициента бокового распора (коэффициента Пуассона) вмещающей горной породы.

2. Использование формулы (29) позволяет вычислить величины нормального тангенциального напряжения в точках границы односвязной области (контур выработки), описываемой функцией (1). Выделить участки границы, на которых действуют либо сжимающие, либо растягивающие напряжения, вычислить их минимальные и максимальные значения в зависимости от типа вмещающей породы, глубины заложения выработки и значения интенсивности равномерного всестороннего давления, распределенного по этой границе.

3. Если выработка имеет форму окружности, то при $\mu = 1$ и при значениях интенсивности равномерного давления, превышающих некоторую величину, на ее контуре могут возникать тривиальные распределения напряжений.

Библиографический список

1. Турчанинов И.А., Иофис М.А., Каспарьян Э.В. Основы механики горных пород. – Л.: Недра. 1989. – 488 с.
2. Булычев Н.С. Механика подземных сооружений. – М.: Недра, 1989. – 270 с.
3. Глушко В.Т., Гавеля С.П. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов горных пород. – М.: Недра, 1986. – 221 с.
4. Цимбаревич П.М. Механика горных пород. – М.: Углетехиздат, 1948. – 184 с.
5. Колосов Г.В. Применение комплексных переменных диаграмм и теории функций комплексного переменного к теории упругости. – М.: ОНТИ. 1935. – 224 с.
6. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука. 1966. – 708 с.
7. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости. – М.: Наука, 1973. – 304 с.
8. Космодамианский А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища школа, 1975. – 228 с.
9. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наукова думка, 1968. – 888 с.
10. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
11. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. – М.: Мир. 1988. – 344 с.
12. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. – М.: Наука. 1981. – 688 с.
13. Jian-ke, Lu Complex variable methods in plane elasticity. – World Scientific, 1995. – P. 237.

14. Фильчаков П.Ф. Приближенные методы конформных отображений: справ. рук. – Киев: Наукова думка, 1964. – 536 с.
15. Фильчакова В.П. Конформные отображения областей специального типа: справ. рук. – Киев: Наукова думка, 1972. – 252 с.
16. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: ГИТТЛ, 1962. – 709 с.
17. Цветков В.К. Определение форм сечений горных выработок с заданными напряжениями на контурах // ФТПРПИ. – 1986. – № 2. – С. 24–29.
18. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок. – М.: Недра, 1993. – 251 с.
19. Богомолов А.Н., Ушаков А.Н. Методы теории функций комплексного переменного в задачах геомеханики. – Волгоград: ВолгГАСУ: Изд-во ВГСПУ «Перемена», 2014. – 227 с.
20. Богомолов А.Н., Богомолова О.А., Ушаков А.Н. Определение глубины заложения горизонтальной выработки на основе анализа напряженного состояния вмещающего массива // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2017. – № 5. – С. 2–9.

References

1. Turchaninov I.A., Iofis M.A., Kaspar'yan E.V. *Osnovy mekhaniki gornyx porod* [Fundamentals of rock mechanics]. Leningrad, Nedra, 1989, 488 p.
2. Bulychev N.S. *Mekhanika podzemnykh sooruzhenij* [Mechanics of underground structures]. Moscow, Nedra, 1989, 270 p.
3. V.T. Glushko, S.P. Gavelya *Otsenka napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya massivov gornyx porod* [Assessment of stress-strain state of rock massifs]. Moscow, Nedra, 1986, 221 p.
4. Tsimbarevich P.M. *Mekhanika gornyx porod* [Rock mechanics]. Moscow, Ugletekhizdat, 1948, 184 p.
5. Kolosov G.V. *Primenenie kompleksnykh peremennykh diagramm i teorii funktsii kompleksnogo peremennogo k teorii uprugosti* [Application of complex variable diagrams and the theory of functions of complex variable to the theory of elasticity]. Moscow, ONTI, 1935, 224 p.
6. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some basic problems of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1966, 708 p.
7. Kalandiya A.I. *Matematicheskie metody dvumernoj uprugosti* [Mathematical methods of two-dimensional elasticity]. Moscow, Nauka, 1973, 304 p.
8. Kosmodamianskij A.S. *Ploskaya zadacha teorii uprugosti dlya plastin s otverstiyami, vyrezami i vystupami* [The plane problem of elasticity theory for plates with holes, notches and protrusions]. Kiev, Vishha shkola, 1975, 228 p.
9. Savin G.N. *Raspredelenie napryazhenij okolo otverstij* [Stress distribution near holes]. Kiev, Naukova dumka, 1968, 888 p.
10. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. *Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo* [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka, 1987. 688 s.
11. Khan Kh. *Teoriia uprugosti. Osnovy lineinoi teorii i ee primeneniia* [Theory of elasticity. Fundamentals of linear theory and its application]. Moscow, Mir, 1988, 344 p.
12. Parton V.Z., Perlin P.I. *Metody matematicheskoi teorii uprugosti* [Methods of mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1981, 688 p.
13. Jian-ke, Lu *Complex variable methods in plane elasticity*. *World Scientific*, 1995, pp. 237.

14. Fil'chakov P.F. Priblizhennyye metody konformnykh otobrazhenij [Approximate methods of conformal maps]. Kiev, Naukova Dumka, 1964, 536 p.
15. Fil'chakova V.P. Konformnyye otobrazheniya oblastej spetsial'nogo tipa [Conformal mappings of areas of a special type]. Kiev, Naukova Dumka, 1972, 252 p.
16. Kantorovich L.V., Krylov V.I. Priblizhennyye metody vysshego analiza [Approximate methods of higher analysis]. Moscow, GITTL, 1962, 709 p.
17. Tsvetkov V.K. Opredelenie form sechenij gornyx vyrabotok s zadannymi napryazheniyami na konturakh [Determining the forms of cross sections of mine workings with the specified voltages in the circuits]. FTPRPI. 1986. № 2. S. 24–29.
18. Tsvetkov V.K. Raschet ratsional'nykh parametrov gornyx vyrabotok [Calculation of rational parameters of mine workings]. Moscow: Nedra, 1993. 291 p.
19. Bogomolov A.N., Ushakov A.N. Metody teorii funktsij kompleksnogo peremennogo v zadachakh geomekhaniki [Methods of the theory of functions of a complex variable in problems of geomechanics]. Volgograd, VolgGASU, Peremena, 2014, 227 p.
20. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Ushakov A.N. Opredelenie glubiny zalozheniya gorizontальной vyrabotki na osnove analiza napryazhennogo sostoyaniya vmeshhayushhego massiva [Determination of the depth of the horizontal output on the basis of the analysis of the stress state of the host array]. *Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov*, 2017, no. 5, pp. 2–9.