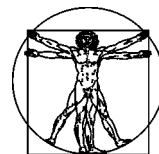


DOI: 10.15593/RZhBiomech/2018.2.05

УДК 531/534:[57+61]



**Российский
Журнал
Биомеханики**
www.biomech.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ ТРУБКИ ПРИ ПРОТЕКАНИИ ЧЕРЕЗ НЕЕ СТЕПЕННОЙ ЖИДКОСТИ

А.Б. Порошина, В.В. Веденеев

Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 119192, Москва, Мичуринский проспект, 1, e-mail: poroshina@imec.msu.ru, vasily@vedeneev.ru

Аннотация. Неустойчивость упругих трубок с текущей внутри жидкостью теоретически и экспериментально исследована во многих работах, связанных с биологическими приложениями. Ранее исследовалось протекание в упругих трубках только ньютоновских жидкостей, однако существуют условия, при которых некоторые жидкости, например кровь и желчь, обладают неньютоновскими свойствами. Важной особенностью течения биологических жидкостей в упругих сосудах является возможность колебательного характера протекания. Возможны несколько механизмов возникновения такого режима течения. Ранее в литературе рассматривалась неустойчивость, вызванная падением давления в жидкости, потерей устойчивости трубки и ее периодическими схлопываниями. Вместе с тем режим течения может быть колебательным из-за несуществования стационарного течения. В данной работе теоретически исследованы существование и единственность осесимметричных состояний упругих трубок при протекании степенных жидкостей. Проведено качественное аналитическое исследование уравнений движения стационарного состояния трубки. В результате доказано, что для движения идеальной жидкости с заданным профилем скорости стационарное состояние всегда существует для коротких трубок и при определенных условиях для сколь угодно длинных трубок. Однако при учете вязкости трубка может иметь лишь конечную длину, что приводит к возникновению нестационарного движения как единственного возможного при достаточно большой длине трубки. Более того, если стационарное состояние трубки, удовлетворяющее граничным условиям, существует, то оно может быть неединственным в зависимости от значения числа Рейнольдса и некоторых дополнительных условий.

Ключевые слова: одномерные модели, стационарное состояние, неединственность, упругие трубки, неньютоновские жидкости, колебания.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что изменения в геометрии кровеносных сосудов, желчных протоков и других биологических сосудах, такие как пережатие или перегибы, могут привести к качественным изменениям в потоке биологической жидкости, способствующим неправильному функционированию организма человека или животного. Колебания подобного вида трубок влияют на ограничения расхода и перепад давления. В связи с этим к колебаниям упругих трубок и их биологическому приложению был проявлен большой интерес [5, 25, 32, 33].

Для анализа устойчивости упругих трубок простейшие теоретические одномерные модели были впервые использованы в работах [25, 37]. Для учета изменения поперечного сечения каждая трубка характеризуется зависимостью площади сечения от трансмурального давления (разности внутреннего и внешнего давлений). На начальном этапе колебаний трубки, когда трансмуральное давление отрицательное, а скорость потока велика, трубка теряет устойчивость, схлопывается, и ее сопротивление увеличивается. В свою очередь, это приводит к замедлению скорости потока и увеличению трансмурального давления. Далее трубка раздувается, скорость течения растет и трансмуральное давление вновь падает, замыкая цикл колебаний. Во время каждого цикла колебаний деформирование трубки неосесимметрично, а поток внутри нее имеет достаточно сложную зависимость: в течение части периода колебаний происходит отрыв потока от поверхности трубки.

В работе [36] на основе одномерной модели исследовалось стационарное течение невязкой жидкости в упругой трубке и доказано, что, во-первых, в пространстве параметров есть области, где такого течения не существует, а, во-вторых, если оно существует, то в общем случае неединственно. В статье [24] решалась та же задача с учетом потери энергии потока из-за отрыва от стенки на выходе из суженного участка. Оказалось, что в такой постановке решение существует всегда, хотя его неединственность в общем случае сохраняется. Результаты работы имеют качественное согласие с экспериментом, однако авторы [24] отмечают важность включения в модель вязкости жидкости во всем течении, а не только в области отрыва.

В работе [33] рассматриваются недостатки существующих одномерных моделей и их усовершенствования на основе двумерных моделей. Значительное развитие одномерных моделей и их качественное согласие с трехмерной моделью демонстрируется в [41]. Множество исследований посвящено аналитическим и численным расчетам течения жидкости в упругой трубке на основе двумерной модели [28–30].

Несмотря на это, в биомеханике в течение последних двадцати лет моделирование кровотока развивается в значительной мере с использованием одномерных моделей [1–3, 9, 10, 12, 17–20, 23, 34, 35, 40], а также одновременным использованием одномерных и трехмерных моделей [15, 16]. Авторами статей [1, 2] рассматривается методика расчета и структура программных средств, предназначенных для численного моделирования гемодинамики сердечно-сосудистой системы и исследования кровообращения в организме в целом под действием периодического сокращения сердца. В [20] рассматриваются одномерные модели течения крови и распространения волн давления в артериальной системе, являющиеся альтернативными более сложным трехмерным моделям. Данные модели используются для изучения влияния на пульсовую волну геометрической и механической артериальной модификации, например, из-за стеноза или при размещении протеза. В [34] приводится обзор использования одномерных моделей для моделирования сети кровеносных сосудов и описаны варианты моделей, количественно верно описывающих распространение пульсовой волны.

На данный момент исследования упругих трубок рассматривались только для ньютоновских (линейно-вязких) жидкостей, хотя известно, что при ряде условий биологические жидкости, такие как кровь [13, 26] или желчь [27], могут обладать неньютоновскими свойствами. В работе [39] приведены параметры крови сердечного цикла, которые эквивалентны показателю степенной среды $n = 1/8$ в реологическом законе. Также в работе [22] отмечается влияние псевдопластических свойств на распределение скоростей в больших артериях.

Во всех работах, где на основе одномерной постановки задачи моделируется сеть кровеносных сосудов [35], нестационарный расчет должен начинаться с некоторого стационарного состояния, являющегося решением соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения. В настоящей работе доказывается, что такое состояние в общем случае неединственно: помимо «обычного» состояния раздутого сосуда, соответствующего положительному трансмуральному давлению, существует ряд состояний, в которых сосуд имеет одно или несколько пережатий. В зависимости от выбора начального состояния, в результате расчета нестационарной задачи могут в общем случае получаться разные результаты, из которых лишь один является физически корректным. Таким образом, при проведении расчетов задач гемодинамики необходим дополнительный контроль получаемого решения, что ранее в литературе не изучалось.

В настоящей работе рассматривается осесимметричное стационарное состояние упругой трубки при протекании степенных жидкостей на основе одномерной модели. В модели трубки учитываются ее радиальная жесткость и продольное натяжение. Проведено качественное аналитическое исследование уравнения, описывающего такое состояние. Метод исследования в целом аналогичен работам [24, 36], однако в отличие от них, здесь учитывается вязкость жидкости, ее неньютоновская реология и соответствующий ей ламинарный профиль скорости в трубке. Получены условия существования стационарного состояния. Доказано, что, как и в [24, 36], в общем случае такое состояние неединственно, и исследованы его возможные виды. В качестве примера рассмотрены стационарные течения крови в кровеносных сосудах человека.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнения движения

Рассматривается цилиндрическая трубка длиной L с упругими границами и текущей по ней неньютоновской жидкостью (рис. 1). Взаимодействие между жидкостью и трубкой происходит за счет равенства нормальных напряжений и совпадения области течения с формой трубки. Продольными перемещениями трубки пренебрегаем. С ней связана цилиндрическая система координат так, что ось Oz совпадает с ее осью симметрии, а трубка занимает область $z \in [0; L]$. Течение предполагается осесимметричным.

Деформирование трубки происходит так, что каждое поперечное сечение оболочки $S(z, t)$ остается круговым, а ее точки перемещаются только радиально. Положение оболочки задается радиусом сечения трубки $R(z, t)$ в точке z в момент времени t .

Уравнение движения стенки трубки, включающее ее инерцию и продольное натяжение, имеет вид

$$\beta(R - R_0) - N \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = P - m \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где β – радиальная жесткость трубки, $\beta = \frac{Eh}{(1 - \nu^2)R_0^2}$; m – поверхностная плотность

стенки; N – продольное натяжение трубки, $N = \sigma h$; R_0 – радиус недеформированной трубки; E и ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; h – толщина стенки трубки; σ – растягивающее напряжение, P – давление жидкости.

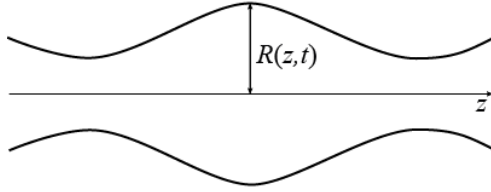


Рис. 1. Деформирование цилиндрической трубки

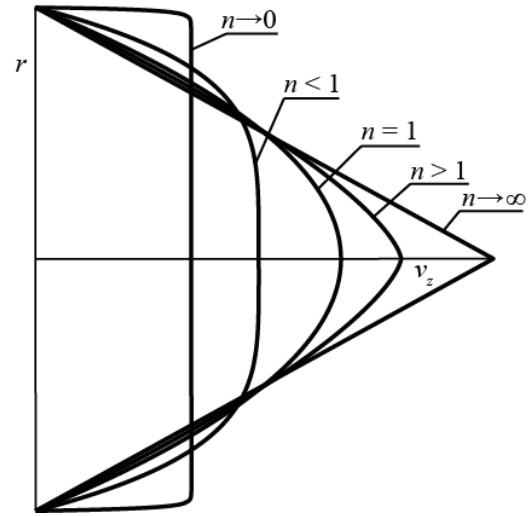


Рис. 2. Профили скорости при различных n

Определяющим соотношением степенной жидкости, обобщающим закон Навье – Стокса, является

$$\tau^{ij} = 2\mu \left(\sqrt{2} I_2(e) \right)^{n-1} e^{ij}, \quad I_2 = \sqrt{e^{ij} e_{ij}}, \quad (2)$$

где τ^{ij} – тензор вязких напряжений; e^{ij} – тензор скоростей деформации.

В частном случае чистого сдвига соотношение (2) имеет вид

$$\tau^{12} = \mu \left(\frac{\partial v^1}{\partial x_2} \right)^n.$$

Система уравнений для жидкости в предположении несжимаемости и отсутствия массовых сил в произвольной системе координат имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \\ \frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla^i p + \frac{1}{\rho} \nabla_j \tau^{ij}, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3)$$

На поверхности трубки для жидкости ставится условие прилипания.

Одномерное уравнение, описывающее стационарное состояние

Рассмотрим стационарное состояние трубки. В таком случае расход и радиус не зависят от времени: $Q = Q(z)$, $R = R(z)$. Тогда согласно закону сохранения массы $\partial Q / \partial z = 0$, т.е. $Q \equiv Q_0$, Q_0 – произвольно заданный расход.

Будем предполагать, что изменение радиуса трубки вдоль оси достаточно медленное, так что в каждом сечении устанавливается пуазейлевское распределение скорости степенной жидкости [6] (рис. 2) в предположении о малости параметра $v_r / v_z \sim R / L \sim \varepsilon$:

$$v_z(r) = \frac{Q_0}{\pi R^2} \frac{1+3n}{1+n} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{(n+1)/n} \right). \quad (4)$$

Заметим, что при $n=1$ это распределение совпадает со стандартным параболическим профилем в линейно-вязкой жидкости.

Проинтегрируем уравнение движения жидкости (второе уравнение системы (3)) по сечению:

$$\int_{S(z,t)} \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dS = - \int_{S(z,t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dS +$$

$$+ \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\rho} \int_{S(z,t)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mu}{r} I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) \right] dS,$$

где ρ – плотность жидкости.

Преобразуем полученное выражение с использованием профиля скорости (4):

$$\int_{S(z,t)} v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} dS = \int_{S(z,t)} v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} dS = \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left(\frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right).$$

Слагаемое, содержащее давление, в предположении о постоянстве давления по сечению (что имеет место при пуазейлевском распределении скоростей) переписывается в следующем виде:

$$\int_{S(z,t)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dS = \frac{\pi R^2}{\rho} \frac{dp}{dz}.$$

Два первых вязких слагаемых могут быть приведены к виду

$$\frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R}{\rho} \int_0^R \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right) + \frac{\mu}{r} I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right] dr = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R}{\rho} \left(\mu I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \right).$$

После ряда преобразований с учетом длинноволнового приближения

$$\frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi R}{\rho} \mu I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = - \frac{\mu}{\rho} \frac{2(3n+1)^n Q^n}{n^n \pi^{n-1} R^{3n-1}}.$$

Последний вязкий член

$$\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{\rho} \int_{S(z,t)} \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu I_2^{n-1} \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right) dS$$

имеет порядок ε^2 , и им можно пренебречь.

Далее для удобства задача рассматривается в безразмерном виде. В качестве размерно-независимых переменных выбраны расход Q_0 , входной радиус сечения трубки R_0 , плотность жидкости ρ . Безразмерные параметры (обозначенные волной) выражаются через размерные так:

$$\tilde{\beta} = \frac{R_0^5}{\rho Q_0^2} \beta, \tilde{N} = \frac{R_0^3}{\rho Q_0^2} N, \tilde{P}_{in} = \frac{R_0^4}{\rho Q_0^2} P_{in}, Re = \frac{\rho R_0^n \left(\frac{Q_0}{\pi R_0^2} \right)^{2-n}}{\mu} \frac{8n^n}{(3n+1)^n}, \quad (5)$$

где Re – обобщенное число Рейнольдса–Мецнера–Рида [31]. Далее все параметры считаются безразмерными, волну для краткости будем опускать.

В результате безразмерное уравнение движения примет вид

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{(3n+1)Q^2}{(2n+1)\pi R^2} \right) + \frac{16Q^n}{\pi \text{Re} R^{3n-1}} + \pi R^2 \frac{\partial P}{\partial z} = 0.$$

После подстановки в данное соотношение обезразмеренного выражения для давления (1) получено уравнение

$$\frac{NR^{3n+1}}{\beta} \frac{d^3 R}{dz^3} + \left(\frac{2(3n+1)R^{3n-4}}{(2n+1)\pi^2\beta} - R^{3n+1} \right) \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{16}{\pi^2\beta \text{Re}} = 0. \quad (6)$$

Оно имеет третий порядок и требует три граничных условия. Будем считать, что упругая трубка имеет одинаковый радиус на входе и на выходе (как, например, в экспериментах на установках *Starling resistor*, где она надета на концы металлических трубок). Также задано значение входного трансмурального давления $P = P_{in}$:

$$R(0) = R(L) = 1, \quad \frac{d^2 R(0)}{dz^2} = -\frac{P_{in}}{N}.$$

Таким образом, уравнение (6) с приведенными граничными условиями представляет собой безразмерную краевую задачу, описывающую стационарное состояние трубки с протекающей внутри жидкостью.

Уравнение (6) может быть приведено к виду

$$\frac{d}{dz} \left[-\frac{N}{\beta} \frac{d^2 R}{dz^2} + \left(\frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta} R^{-5} + 1 \right) R \right] = -\frac{16}{\pi^2\beta \text{Re} R^{3n+1}}. \quad (7)$$

Без учета натяжения (т.е. при $N=0$) одномерное уравнение (7) было получено и исследовано в статье [11]. В этом случае оно превращается в уравнение первого порядка и интегрируется в явном виде, причем при заданном входном радиусе $R(0) = 1$ решение всегда единственно и существует лишь на конечной длине $L < L_{\max}$. При учете натяжения ($N \neq 0$) уравнение (7) представляет собой уравнение третьего порядка с переменными коэффициентами и в явном виде не интегрируется. В связи с этим следующие разделы посвящены качественному исследованию свойств краевой задачи для уравнения (7).

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ БЕЗ УЧЕТА ВЯЗКОСТИ

Анализ стационарных точек

Сначала рассмотрим случай, когда значение числа Рейнольдса стремится к бесконечности, $\text{Re} \rightarrow \infty$, тогда дифференциальное уравнение (7) имеет первый интеграл

$$-\frac{N}{\beta} \frac{d^2 R}{dz^2} + \left(\frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta} R^{-5} + 1 \right) R + A = 0, \quad (8)$$

где в силу граничных условий при $z=0$

$$A = -\left(\frac{P_{in}}{\beta} + \frac{(3n+1)}{2(2n+1)\pi^2\beta} + 1 \right).$$

Обозначим $R = x$ и $\partial R / \partial z = y$, тогда с учетом (8) получается система

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 N x^4} + \frac{\beta x}{N} + \frac{\beta A}{N}, \end{cases} \quad (9)$$

где штрихом обозначена производная по z .

В рамках новых обозначений оставшиеся граничные условия имеют вид

$$x(0) = x(L) = 1. \quad (10)$$

Для того чтобы найти решение краевой задачи (9), (10), необходимо подобрать начальное значение $y(0)$ на прямой $x(0) = 1$ таким образом, чтобы значение z , за которое траектория $x(z)$, $y(z)$ вернется на прямую $x = 1$, было равно длине трубки L .

Для исследования системы (9) выясним качественную картину ее фазовой плоскости. Сначала найдем стационарные точки (x_0, y_0) системы (9). Очевидно, что $y_0 = 0$, а x_0 является решением уравнения

$$T(x) = x^5 + Ax^4 + \kappa = 0, \quad \kappa = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2\beta} > 0. \quad (11)$$

Нетрудно доказать, что уравнение (11) может иметь не больше трех действительных корней. При $A < A_{cr}$ один всегда присутствующий корень отрицателен, а два корня положительны, причем один меньше $x_{cr} = -4A/5$, а другой больше; при $A = A_{cr}$ один кратный корень $x = x_{cr}$ положителен, другой – отрицателен; при $A > A_{cr}$ имеется только один отрицательный корень (индексом cr обозначаются критические значения). Значение

$$A_{cr} = -\frac{5}{4^{4/5}} \kappa^{1/5}$$

соответствует кратному корню уравнения (11), равному x_{cr} – значению, при котором производная функции $T(x)$ обращается в 0.

В качестве примера при заданных значениях $\beta = 0,7$, $n = 0,2$ и значениях $A = A_{cr} = -1,00$, $A = -1,08 < A_{cr}$ ($P_{in} = -0,005$), $A = -0,37 > A_{cr}$ ($P_{in} = -0,500$) построен график зависимости $T(x)$ от x (рис. 3).

Поскольку x имеет смысл радиуса трубки, физический смысл имеют только положительные корни $x_0 > 0$. Можно показать, что траектории системы (9) не могут пересекать ось $x = 0$, поэтому далее ограничимся изучением полуплоскости $x > 0$ фазовой плоскости (11).

В дальнейшем нам понадобится значение A при $P_{in} = 0$:

$$A = A_0 = -(\kappa + 1).$$

Значение A_0 совпадает со значением A_{cr} при $\kappa = 1/4$, а в остальных случаях всегда $A_0 < A_{cr}$, поскольку функция

$$A_{cr} - A_0 = -\frac{5}{4^{4/5}} \kappa^{1/5} + \kappa + 1$$

всегда положительна при $\kappa \neq 1/4$ (рис. 4).

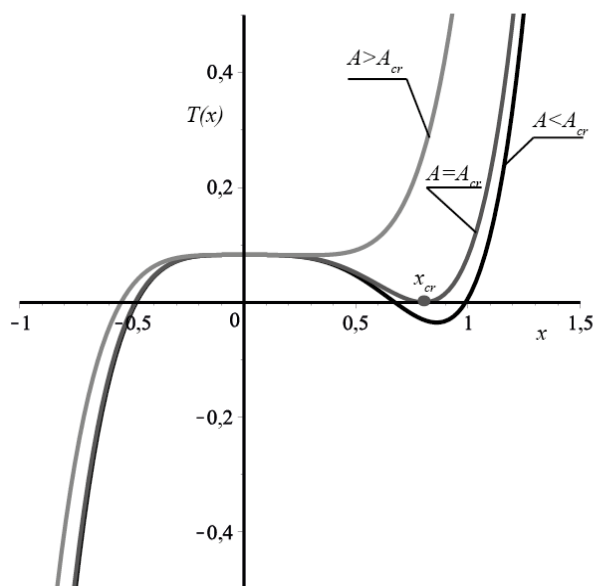


Рис. 3. График функции $T(x)$

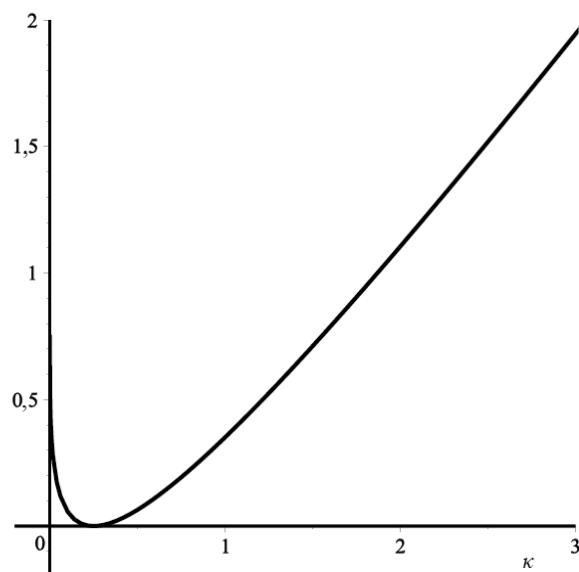


Рис. 4. График функции $(A_{cr} - A_0)$

Рассмотрим типы стационарных точек при $A \leq A_{cr}$ (в противоположном случае стационарных точек $x_0 > 0$ нет). После линеаризации второго уравнения системы (9) относительно точки $(x_0, 0)$ она примет вид

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \frac{\beta}{N} \left(5 + \frac{4A}{x_0} \right) x. \end{cases} \quad (12)$$

Характер поведения фазовых траекторий системы (12) на фазовой плоскости определяют корни λ_1 и λ_2 характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ \frac{\beta}{N} \left(5 + \frac{4A}{x_0} \right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В зависимости от собственных значений

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{\beta}{N} \left(5 + \frac{4A}{x_0} \right)}$$

получаем:

- 1) большая стационарная точка – седло;
- 2) меньшая стационарная точка – центр.

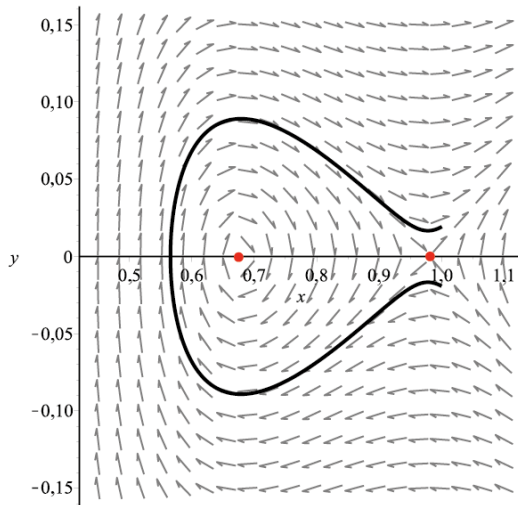


Рис. 5. Фазовый портрет для (13),
 $P_{in} = -0,010, A_0 < A < A_{cr}$

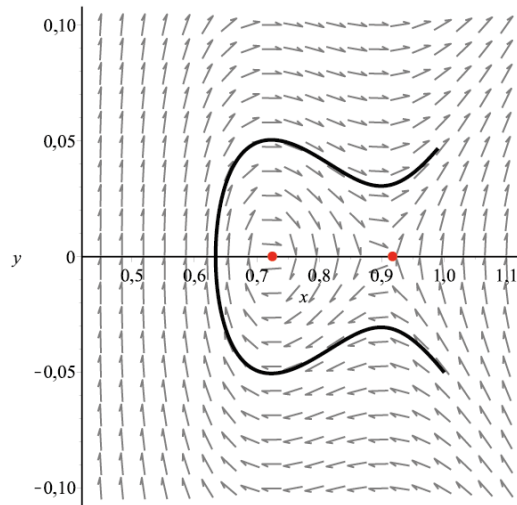


Рис. 6. Фазовый портрет для (13),
 $P_{in} = -0,040, A_0 < A < A_{cr}$

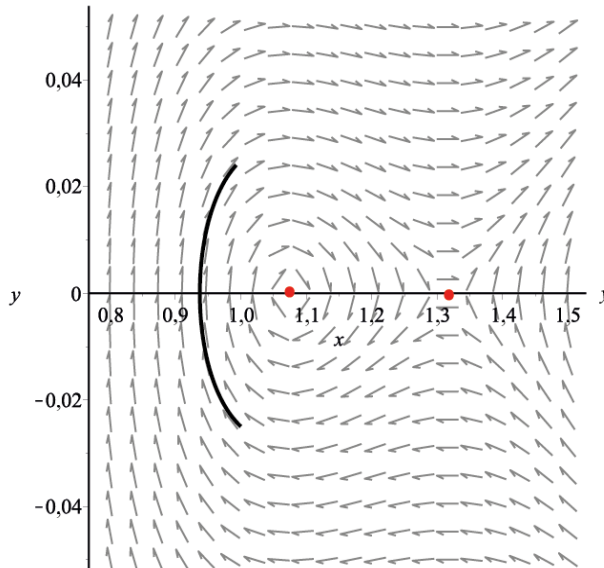


Рис. 7. Фазовый портрет для $x_0 > 1$,
 $P_{in} = -0,040, A_0 < A < A_{cr}$

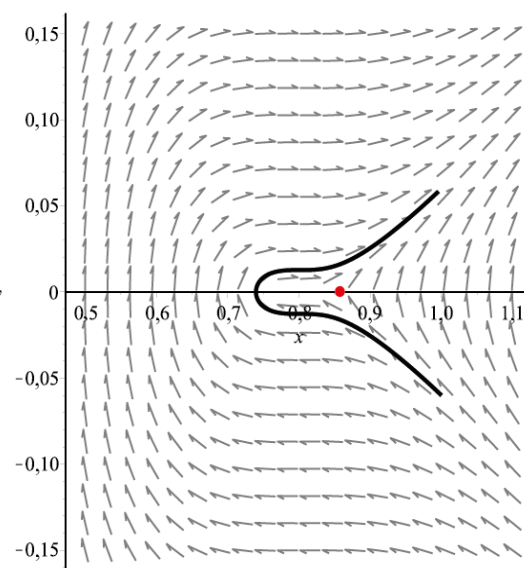


Рис. 8. Фазовый портрет для (13), $A = A_{cr}$

Рассмотрим три возможных типа фазовых траекторий в зависимости от значения A . Ряд примеров ниже приведен для значений параметров

$$\beta = 0,7, N = 2,4, n = 0,2, \quad (13)$$

тогда $A_0 = -1,08, A_{cr} = -1,00$. Также введем значение входного давления P_{cr} , при котором $A = A_{cr}$:

$$P_{cr} = \beta \left(\frac{5}{4^{4/5}} \kappa^{1/5} - (\kappa + 1) \right) < 0.$$

1. $A_0 < A < A_{cr}$.

Входное давление в трубке P_{in} отрицательное, но не слишком большое по абсолютной величине ($0 > P_{in} > P_{cr}$). Имеются две стационарные точки, одна из которых центр, а другая – седло.

1.1. При $\kappa < 1/4$ обеим точкам соответствует $x_0 < 1$, т.е. суженное состояние трубки. Для примера на рис. 5 показан фазовый портрет для (13) и $P_{in} = -0,010$, тогда $A = -1,06$.

При увеличении абсолютного значения трансмурального давления стационарные точки сближаются: точка, соответствующая центру, смещается в сторону увеличения по оси OX , а точка, соответствующая седлу, смещается от $x_0 = 1$ (одно из возможных значений x_0 при $P_{in} = 0$) в сторону уменьшения по оси OX . Примером может служить фазовая плоскость для (13) и $P_{in} = -0,040$, тогда $A = -1,02$ (рис. 6).

1.2. При $\kappa > 1/4$ обе стационарные точки соответствуют $x_0 > 1$, при увеличении $|P_{in}|$ происходит сближение точек, аналогичное предыдущему случаю. Примером является фазовый портрет (рис. 7) при значениях параметров

$$\beta = 0,1, N = 2,4, n = 0,2, P_{in} = -0,007.$$

2. $A \geq A_{cr}$.

Входное давление P_{in} отрицательное и достаточно большое по абсолютной величине ($0 > P_{cr} \geq P_{in}$). При $A = A_{cr}$ стационарные точки сливаются и при $A > A_{cr}$ исчезают. Примером являются фазовые портреты для значений (13) и $P_{in} = P_{cr}$, при которых $A = A_{cr}$ (рис. 8), и $P_{in} = -0,100$, при котором $A = -0,93 > A_{cr}$ (рис. 9).

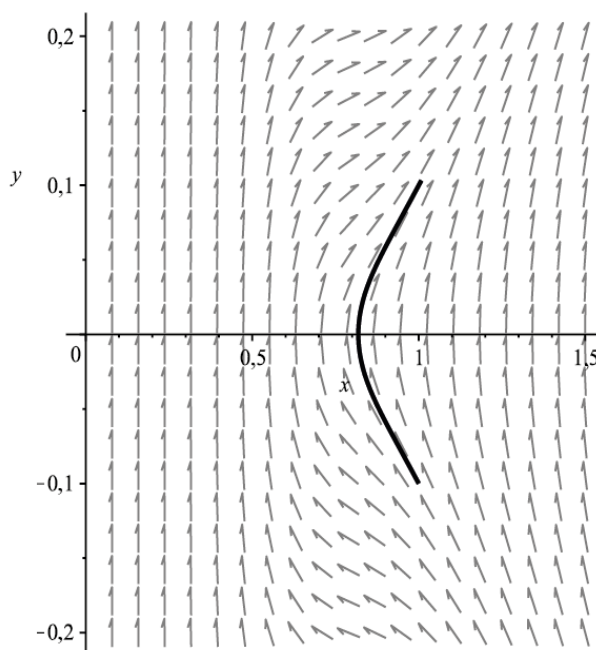


Рис. 9. Фазовый портрет для (13),
 $P_{in} = -0,100, A > A_{cr}$

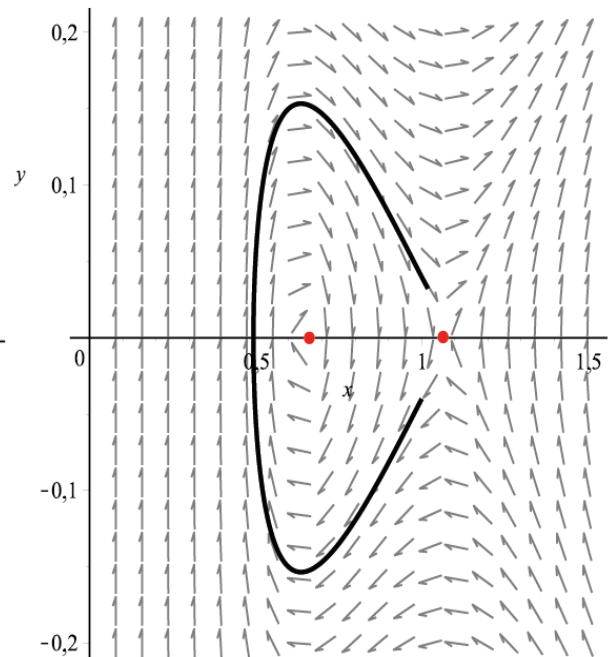


Рис. 10. Фазовый портрет для (13),
 $P_{in} = 0,040, A < A_0$

3. $A < A_0$, значение $P_{in} > 0$ – входное давление повышено.

В данном случае существуют две стационарные точки, одна из которых центр, а другая – седло, причем седловая точка имеет значение $x_0 > 1$, а центр $-x_0 < 1$, что соответствует раздутому и суженному состоянию трубки соответственно. Фазовый портрет, построенный для (13) и $P_{in} = 0,040$, при котором $A = -1,13 < A_0$, представлен на рис. 10.

При увеличении значения трансмурального давления стационарная точка, соответствующая центру, смещается ближе к нулю, а стационарная точка, соответствующая седлу, смещается от значения, равного 1, в сторону увеличения по оси OX . Пример фазовой плоскости для (13) и $P_{in} = 0,500$, при котором $A = -1,79 < A_0$, показан на рис. 11.

Важно отметить, что система (9) не имеет сингулярностей при $x > 0$ и, следовательно, не испытывает бифуркаций фазовой плоскости, кроме слияния и исчезновения стационарных точек при $A = A_{cr}$. Таким образом, приведенные выше примеры фазовых плоскостей для случаев 1, 2, 3 качественно не меняются при других параметрах задачи.

Анализ максимальной возможной длины трубки

Далее исследуем, при каком значении $z = L$ фазовая траектория возвращается на прямую $x=1$ при $x(0)=1$ и различных значениях $y(0)$.

Если начальное значение $y(0) \rightarrow +\infty$, то $dx/dz \rightarrow +\infty$, и из структуры фазовых портретов видно, что трубка неограниченно расширяется, так что решения краевой задачи не существует.

Докажем, что если начальное значение $y(0) \rightarrow -\infty$, то время прохождения траектории до ее возвращения на прямую $x=1$ (значение z) стремится к нулю. Примером подобной траектории может служить фазовый портрет для (13) при $y(0) \rightarrow -\infty$ (рис. 12).

Траектория может быть разбита на три участка:

1. $y \rightarrow -\infty$.

На данном участке траектория близка к прямой, параллельной оси OX . Согласно первому уравнению системы (9) $x' = y$, значит значение $dx/dz \rightarrow -\infty$, что свидетельствует о большой скорости прохождения данного участка. В то же время значение x (пройденное расстояние) не больше 1, а значит, значение z (время прохождения этого участка) будет стремиться к нулю.

2. Участок траектории от $y \rightarrow -\infty$ до $y \rightarrow +\infty$.

На данном участке значение $x \rightarrow 0$, а скорость изменения y , согласно второму уравнению системы (9), является величиной порядка $1/x^4$, и можно пренебречь остальными слагаемыми. Откинув их, рассмотрим упрощенные уравнения для определения времени движения траектории по вертикальному участку

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 N x^4}, \end{cases}$$

или

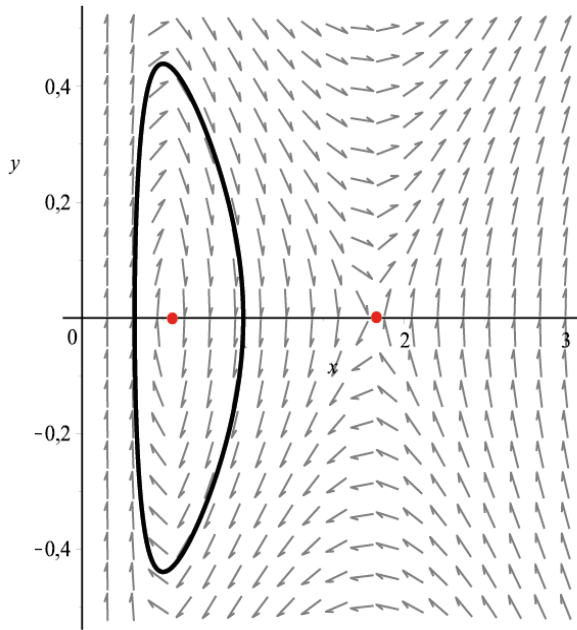


Рис. 11. Фазовый портрет для (13),
 $P_{in} = 0,500, A < A_0$

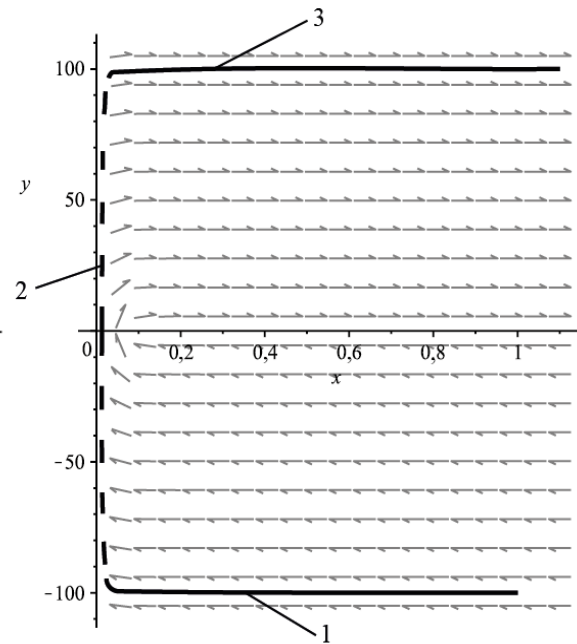


Рис. 12. Фазовый портрет для (13),
 $y(0) \rightarrow -\infty$

$$x'' = \frac{3n+1}{2(2n+1)\pi^2 N x^4}. \quad (14)$$

С учетом соотношения

$$x'' = y' = \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial x} y$$

уравнение (14) может быть проинтегрировано, в результате чего получаем уравнение первого порядка

$$y^2 = -\frac{3n+1}{(2n+1)\pi^2 N 3x^3} + C, \quad (15)$$

где в силу начального условия $x(0) = 1$

$$C = \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N} + y(0)^2.$$

Уравнение (15) интегрируется второй раз, в результате чего получается решение уравнения (14):

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{C - \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N \zeta^3}}} = \pm z + C_2, \quad C_2 = \text{const.}$$

Положив в силу начального условия $C_2 = 0$, рассмотрим решение

$$\int_x^1 \frac{d\zeta}{\sqrt{C - \frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N \zeta^3}}} = z.$$

Заменой переменных

$$\zeta = \xi \left(\frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 NC} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\chi(C) = \left(\frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 NC} \right)^{\frac{1}{3}}$$

решение переписывается в виде

$$\left(\frac{3n+1}{3(2n+1)\pi^2 N} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{1}{C^{5/6}} \int_{\chi(C)x}^{\chi(C)} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{-3}}} = z. \quad (16)$$

Интеграл в соотношении (16) при $\xi \rightarrow 1$ (приближение вертикального участка к $x=0$) сходящийся и имеет порядок $\chi(C)$, т.е. порядка $C^{1/3}$, а значит, z имеет порядок $C^{-1/2} \sim |y(0)|^{-1}$. Таким образом, время z прохождения вертикального участка траектории стремится к 0 при $y(0) \rightarrow -\infty$.

3. $y \rightarrow +\infty$.

В данном случае траектория близка к прямой, параллельной оси OX , и значение z стремится к 0 аналогично участку траектории, при котором $y \rightarrow -\infty$.

Тем самым $L \rightarrow 0$ при $|y(0)| \rightarrow +\infty$, поэтому максимальная длина трубки L_{\max} , при которой существует решение краевой задачи, может достигаться только при ограниченных $|y(0)|$.

При ограниченном $|y(0)|$ значение L может быть неограниченно большим, только если траектория проходит вблизи седловой точки, так как в ее окрестности скорость на траектории падает почти до нуля, и она может оставаться в этой окрестности сколь угодно долго. Если значение x_0 точки центра равно 1 (т.е. $\kappa > 1/4$, $P_{in} = 0$), тогда трубка не будет раздуваться или сужаться, а всегда будет сохранять свою начальную форму, а значит, значение длины трубки L может быть неограниченно большим. В других случаях точка-центр не может подойти, поскольку фазовые траектории в ее окрестности замкнуты, охватывают особую точку, а значит траектория, начинающаяся с $x(0) = 1$, не может слишком близко подойти к особой точке-центру.

Рассмотрим значения L_{\max} для ранее разобранных трех случаев.

1. $A_0 < A \leq A_{cr}$.

В этом случае трубка может быть сколь угодно длинной при $y(0)$, близких к сепаратрисе, соответствующей седловой точке.

1.1. Пример такой траектории показан для стационарных точек $x_0 < 1$ и значений (13) (при $P_{in} = -0,050$, $A = -1,01$, $y(0) \approx -0,051$), близких к сепаратрисе седловой точки (рис. 13).

1.2. Для стационарных точек $x_0 > 1$ примером служит траектория для значений параметров $\beta = 0,1$, $N = 2,4$, $n = 0,2$, $P_{in} = -0,007$, $y(0) \approx 0,025$ (рис. 14).

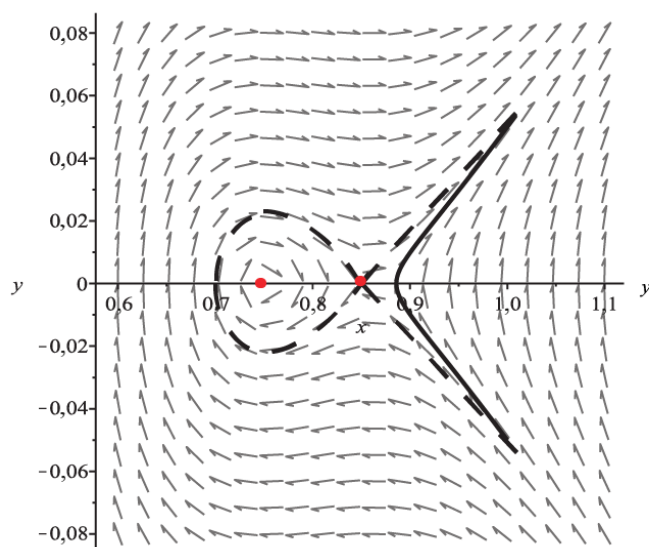


Рис. 13. Фазовый портрет для (13),
 $P_{in} = -0,050, A_0 < A \leq A_{cr}$

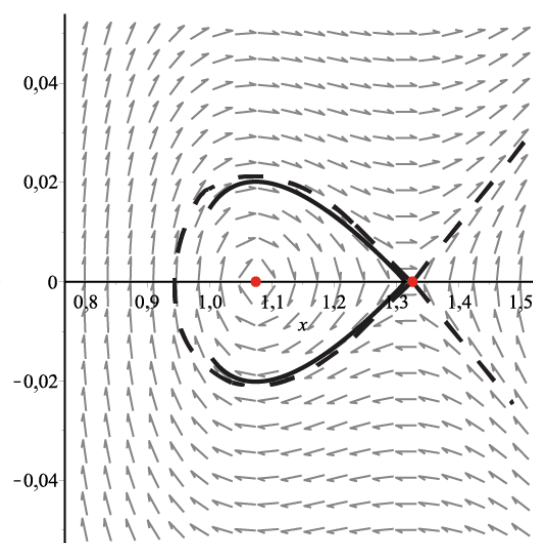


Рис. 14. Фазовый портрет для $x_0 > 1$,
 $P_{in} = -0,007, A_0 < A \leq A_{cr}$

2. $A > A_{cr}$.

Поскольку стационарных точек нет, то значение L_{max} конечно. Таким образом, стационарных состояний трубки с протекающей жидкостью для достаточно длинных трубок в этом случае не существует.

3. $A < A_0$.

В случае, когда входное давление повышено, трубка также может быть сколь угодно длинной при $y(0)$, достаточно близких к сепаратрисе, соответствующей

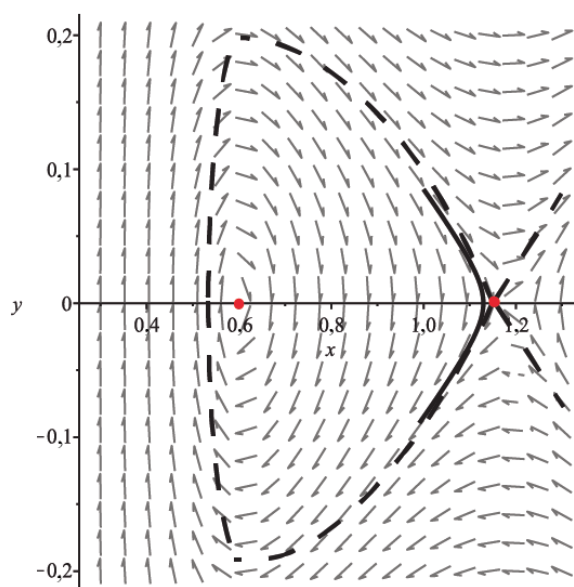


Рис. 15. Фазовый портрет для (13),
 $P_{in} = 0,100, A < A_0$

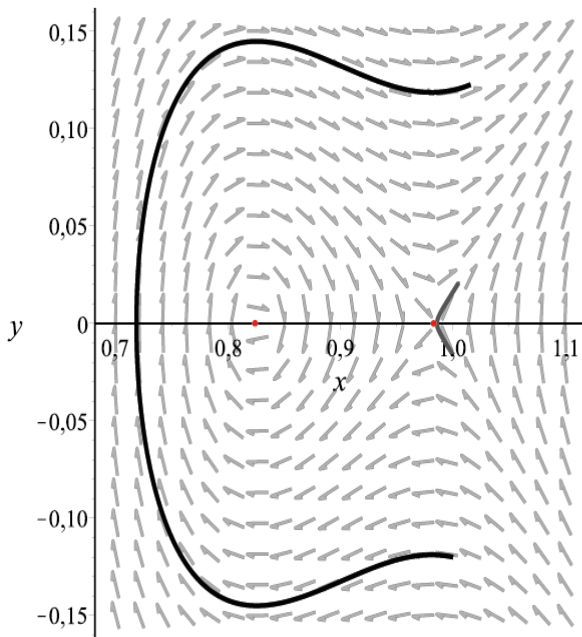


Рис. 16. Фазовый портрет для (17),
 $P_{in} = -0,003, A_0 < A \leq A_{cr}, L = 5$

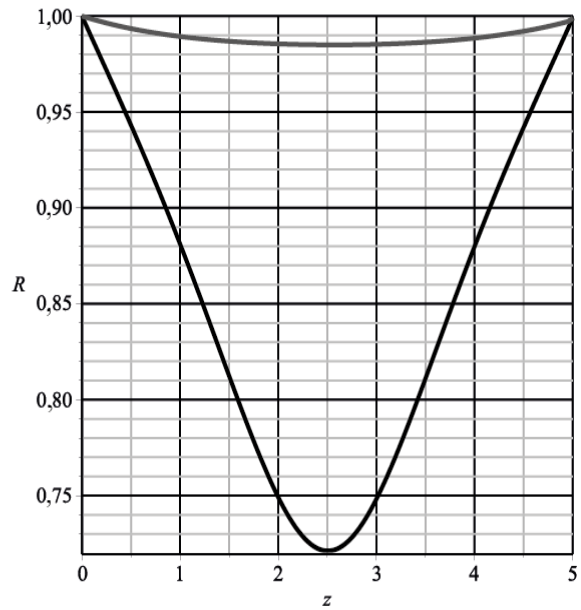


Рис. 17. График $R(z)$ для (17),
 $P_{in} = -0,003, A_0 < A \leq A_{cr}, L = 5$

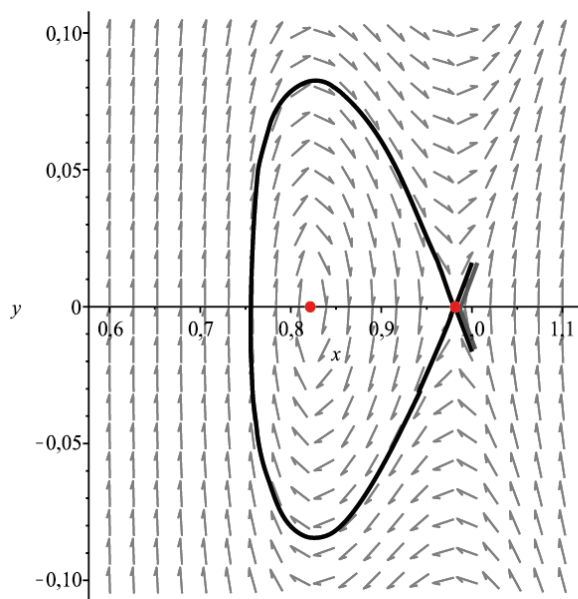


Рис. 18. Фазовый портрет для (17),
 $P_{in} = -0,003, A_0 < A \leq A_{cr}, L = 25$

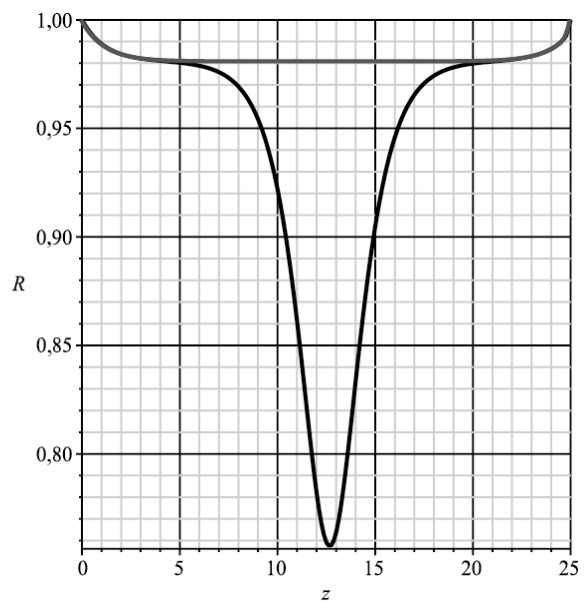


Рис. 19. График $R(z)$ для (17),
 $P_{in} = -0,003, A_0 < A \leq A_{cr}, L = 25$

седловой точке. Примером служит траектория для значений параметров (13) и $P_{in} = 0,100$, $A = -1,01$, $y(0) \approx 0,085$, соответствующих сепаратрисе седловой точки (рис. 15).

Следовательно, при стационарном состоянии трубка может быть сколь угодно длинной только при $A \leq A_{cr}$, т.е. при $P_{in} \geq P_{cr}$.

Неединственность решения

В настоящем разделе рассматривается возможность неединственности решения краевой задачи (9), (10) в зависимости от значения параметра A для разных длин трубок.

Большинство рассматриваемых ниже примеров приведены для значений безразмерных параметров

$$\beta = 0,4, \quad N = 0,2, \quad n = 0,2, \quad (17)$$

тогда $A_0 = -1,14$, $A_{cr} = -1,12$.

1. $A_0 < A \leq A_{cr}$.

1.1. В данном случае для стационарных точек $x_0 < 1$ и для любых значений длины L имеется неединственность решения, а именно при одинаковом значении L существуют две траектории, по которым можно вернуться на прямую $x=1$. Одно решение соответствует $y_s < y(0) < 0$, где y_s – пересечение сепаратрисы, приходящей в седловую точку, с прямой $x=1$, а второе решение соответствует $y(0) < y_s < 0$, причем в этом случае траектория обходит точку-центр.

Например, для значений параметров (17) и $P_{in} = -0,003$, $A = -1,13$ и значений $y(0) \approx -0,11400$ и $y(0) \approx -0,01635$ получаются две траектории, соответствующие $L=5$ (рис. 16). График зависимости радиуса трубки R от координаты z , соответствующий этим решениям, показан на рис. 17. Другой пример, соответствующий значению $L=25$, приведен на рис. 18, 19 ($y(0) \approx -0,01672$ и $y(0) \approx -0,01674$).

Рассмотрим зависимость длины трубки от различных начальных значений $y(0)$. График имеет асимптоту $y(0) = y_s$, соответствующую значению, при котором $y(0)$ принадлежит сепаратрисе седловой точки. Так, для ранее рассмотренного примера, со значениями параметров (17), график имеет асимптоту $y(0) = y_s \approx -0,01673$ (рис. 20). Решение существует только при отрицательных значениях $y(0)$. Расчеты показывают, что убывание L при уменьшении $y(0)$ монотонно, поэтому в данном случае при любых L существует два решения, с обходом и без обхода центра.

1.2. Если стационарные точки соответствуют значениям $x_0 > 1$, то в данном случае количество решений зависит от длины трубки. При достаточно малых значениях $L < L_{cr1}$ существуют две траектории, соответствующие разным начальным $y(0)$, аналогично случаю $A > A_{cr}$, который будет рассмотрен ниже. При $L_{cr2} > L > L_{cr1}$ решений не существует. Далее, при $L_{cr3} > L > L_{cr2}$ появляются еще два решения, соответствующие одному дополнительному обходу точки центра, причем при симметричном отражении относительно середины трубки одно превращается во второе. Затем при $L > L_{cr3} > L_{cr2}$ появляются еще два дополнительных решения. При достаточно больших L существует любое наперед заданное четное количество решений. Каждый обход точки центра соответствует локальному сужению трубки и последующему расширению до исходного радиуса.

Например, значению $L=40$ соответствует четыре решения: одно без обхода центра, два с одним обходом и одно с полуторным обходом (рис. 21).

График зависимости L от начального значения $y(0)$ имеет две асимптоты, y_{s+} и y_{s-} , соответствующие двум сепаратрисам седловой точки (рис. 22). При $y(0) > y_{s+}$ или

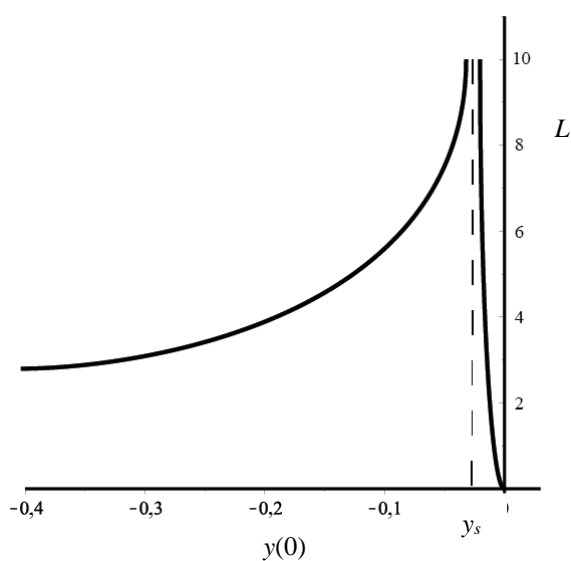


Рис. 20. График $L(y(0))$ при (17),
 $P_{in} = -0,003$, $A_0 < A \leq A_{cr}$

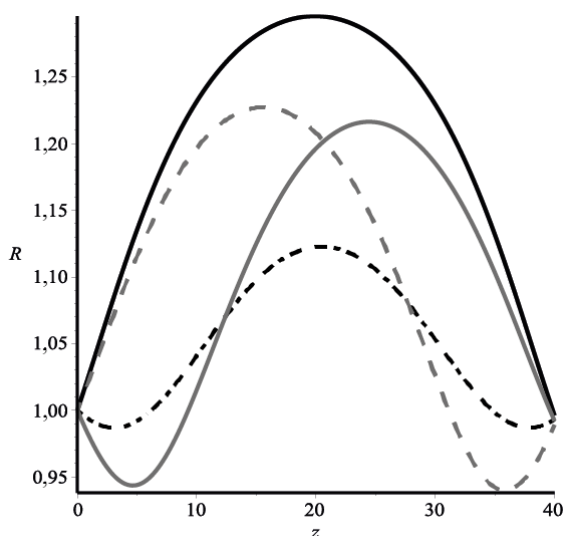


Рис. 21. График $R(z)$ для $x_0 > 1$,
 $P_{in} = -0,005$, $A_0 < A \leq A_{cr}$, $L = 40$

при $L_{cr1} < L < L_{cr2}$ решения краевой задачи не существует. При $y(0) < y_{s+}$ и малом значении длины трубки $L < L_{cr1}$ имеется два решения. При $y(0) < 0$ и $L = L_{cr1}$ или при $0 < y(0) < y_{s+}$ и $L = L_{cr2}$ имеется единственность решения. При $y(0) < y_{s-}$ и $L > L_{cr1}$ решения краевой задачи не существует. При $y_{s-} < y(0) < y_{s+}$ и при больших значениях длины трубки ($L > L_{cr2}$) возможно существование множества решений, соответствующих числу возврата на прямую $x = 1$ при обходе точки-центра.

2. $A > A_{cr}$.

Ввиду того что стационарных точек нет, для больших значений L решения не существует. Другими словами, не существует траектории, возвращающейся в точку $x(L) = 1$. Однако для малых значений есть два решения, т.е. существуют две различные траектории, соответствующие различным начальным значениям $y(0)$ и одинаковым значениям L , такие что $x(L) = 1$.

Поскольку $L = 0$ при $y(0) = 0$ и $y(0) \rightarrow -\infty$, график зависимости длины трубки L от начального значения $y(0)$ (рис. 23) имеет максимум, соответствующий единственному возможному случаю единственности решения. Таким образом, при $L > L_{max}$ решения не существует, при $L = L_{max}$ есть единственное решение, при $L < L_{max}$ – два решения. $y(0)$ принимает отрицательные значения, поскольку в данном случае только при них возможно существование решения.

Для примера на рис. 24 показана фазовая плоскость для значений (17) и $P_{in} = -0,100$, $A = -0,89$. При различных начальных значениях $y(0) \approx -0,2$, $y(0) \approx -2$ существуют две различные траектории, соответствующие одному значению $L = 0,83$.

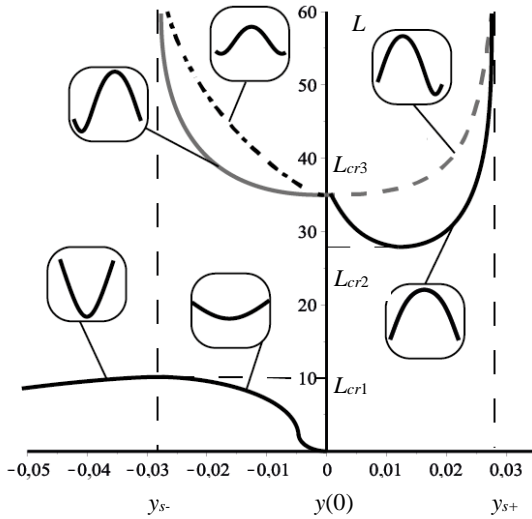


Рис. 22. График $L(y(0))$ при $x_0 > 1$,
 $P_{in} = -0,005$ (в выносках показан
качественный характер графика $R(z)$,
соответствующей каждому решению)

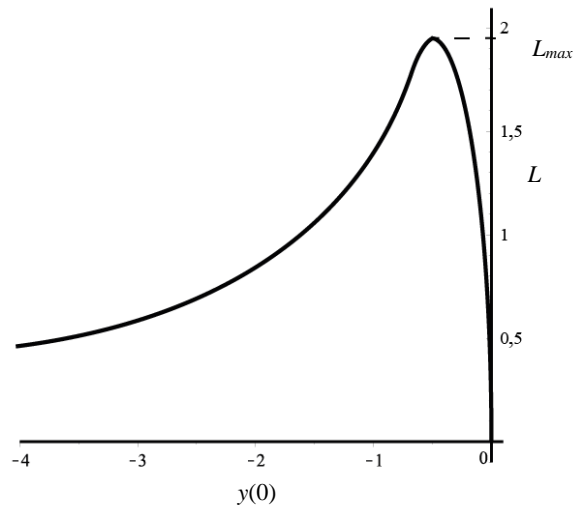


Рис. 23. График $L(y(0))$ при (17)
при $P_{in} = -0,100$, $A > A_{cr}$

Оба решения в виде зависимости радиуса трубки R от координаты z для трубок одинаковой длины L показаны на рис. 25. График зависимости L от $y(0)$ имеет максимум в точке $y(0) \approx -0,52$ и значение $L_{cr} \approx 1,955$ (рис. 23).

3. $A < A_0$.

В данном случае, когда значение седловой стационарной точки $x_0 > 1$, а центра – $x_0 < 1$, всегда имеется неединственность решения. При достаточно малых значениях L существуют две траектории, соответствующие разным начальным $y(0)$. Аналогично случаю $A_0 < A \leq A_{cr}$ одно решение соответствует $0 < y(0) < y_{s+}$, а второе – $y(0) < y_{s-} < 0$, причем в этом случае траектория обойдет точку-центр.

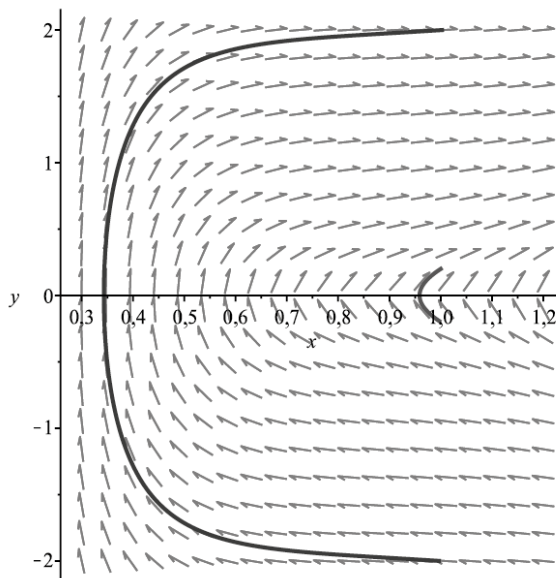


Рис. 24. Фазовый портрет для (17)
при $P_{in} = -0,100$, $A > A_{cr}$, $L = 0,83$

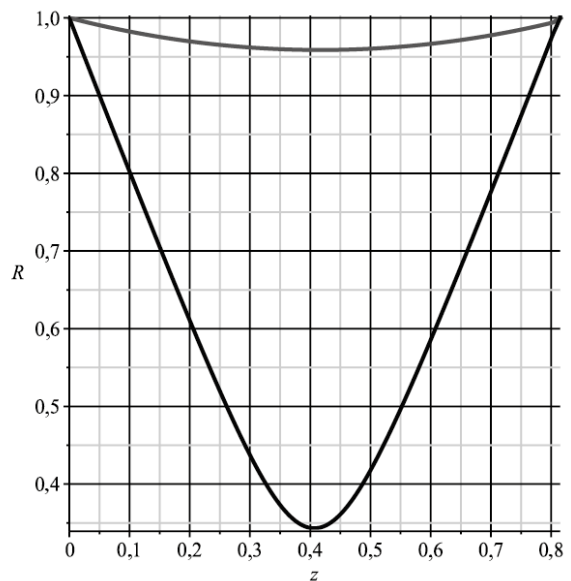


Рис. 25. График $R(z)$ для (17)
при $P_{in} = -0,100$, $A > A_{cr}$, $L = 0,83$

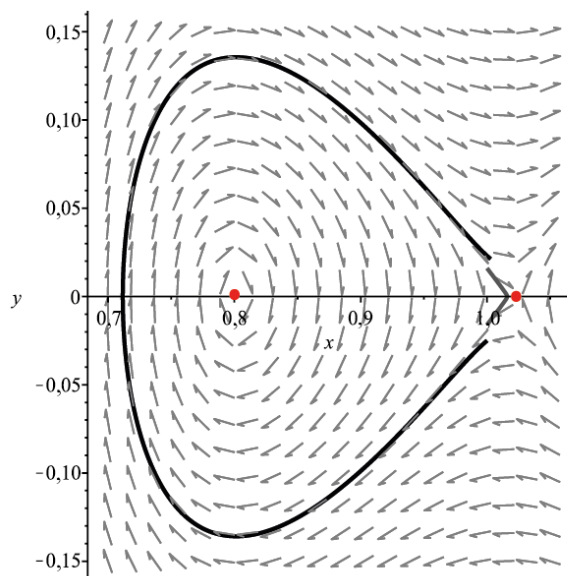


Рис. 26. Фазовый портрет для (17) при $P_{in} = 0,003$, $y(0) \approx -0,025$, $y(0) \approx 0,016$

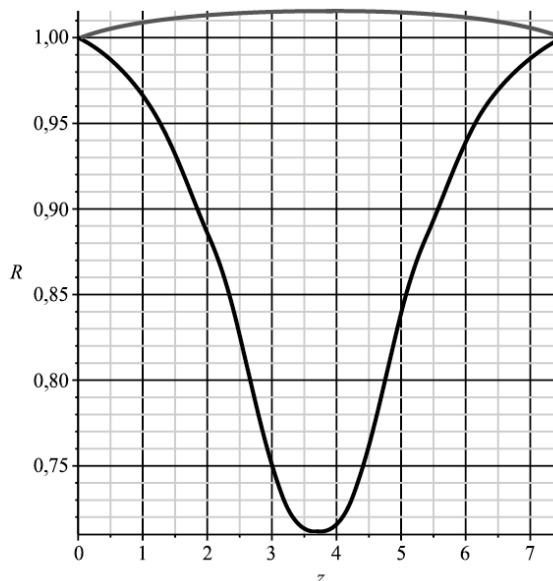


Рис. 27. График $R(z)$ для (17) при $P_{in} = 0,003$, $y(0) \approx -0,025$, $y(0) \approx 0,016$

Например, для $P_{in} = 0,003$, при котором значение $A = -1,15$, и заданных начальных значениях $y(0) \approx -0,025$, $y(0) \approx 0,016$ получаются две траектории, соответствующие одному значению $L = 7,5$ (рис. 26, 27).

При $L > L_{cr1} > 0$ появляются еще два решения, соответствующие одному дополнительному обходу точки центра, причем при симметричном отражении относительно середины трубки одно превращается во второе. При $L > L_{cr2} > L_{cr1}$ появляются еще четыре дополнительных решения. При достаточно больших L существует любое наперед заданное количество решений. Каждый обход точки-центра соответствует локальному сужению трубки и последующему расширению до исходного радиуса.

Например, значению $L = 20$ соответствует восемь решений: одно без обхода центра, три с одним обходом и четыре с двумя обходами (рис. 28).

График зависимости L от начального значения $y(0)$ имеет две асимптоты, y_{s+} и y_{s-} , соответствующие двум сепаратрисам седловой точки (рис. 29). При $y(0) > y_{s+}$ решения краевой задачи не существует. При $y(0) < y_{s+}$ и малом значении длины трубки L имеется два решения. При $y(0) < y_{s-}$ и большом значении L решения краевой задачи не существует. При $y_{s-} < y(0) < y_{s+}$ и при больших значениях длины трубки L возможно существование множества решений, соответствующих числу возврата на прямую $x = 1$ при обходе точки-центра.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ВЯЗКОСТИ

Если значение числа Рейнольдса конечно, тогда в уравнении (8) величина $A \neq \text{const}$, а именно $A = A(z)$ является растущей функцией координаты. Причем при ограниченных значениях $R(z) < M$, где $M = \text{const}$, производная этой функции ограничена снизу некоторой константой D ($A'(z) > D > 0$). Поэтому движение

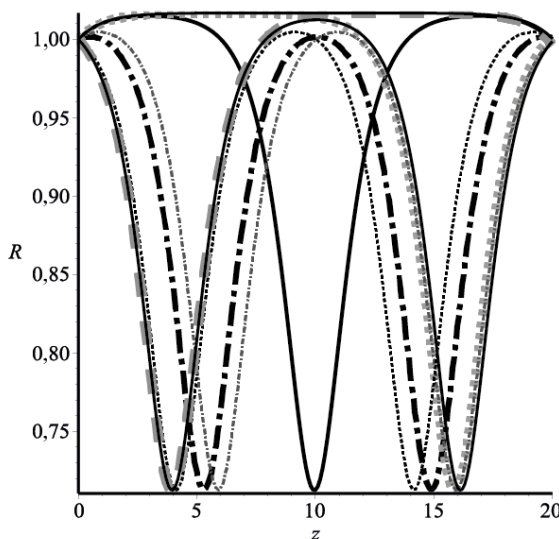


Рис. 28. График $R(z)$ для (17),
 $P_{in} = -0,003$, $L = 20$

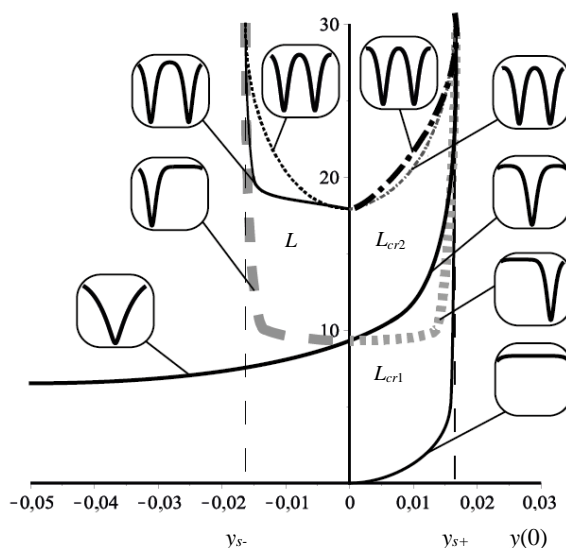


Рис. 29. График $L(y(0))$ при (17),
 $P_{in} = 0,003$ (в выносках показан
качественный характер графика $R(z)$,
соответствующего каждому решению)

траектории $x(z)$, $y(z)$ можно представить как движение вдоль векторного поля (9) с одновременной эволюцией этого поля из-за роста A . Поскольку функция $A = A(z)$ растущая, то через некоторое конечное z задача сведется к случаю $A > A_{cr}$. Физически это соответствует падению давления в трубке ниже P_{cr} из-за вязких потерь. После этого траектория за конечное время покинет область $x \leq 1$ и больше не вернется на прямую $x = 1$. Таким образом, решение краевой задачи существует лишь при $L \leq L_{max}(Re)$, а при превышении длины L_{max} стационарного состояния не существует.

В зависимости от Re и, соответственно, скорости увеличения A , может иметь место неединственность решения, аналогичная невязкому случаю. Например, для значений (17) $P_{in} = 0$ и $Re = 1000$ получаются две траектории, соответствующие одному значению $L = 10$ (рис. 30). При этом в решении с обходом центра «провал» радиуса расположен ближе к концу трубки.

Для сравнения с полученными ранее результатами в невязком случае, например с рис. 17 (рис. 31, пунктирные линии), была построена зависимость $R(z)$ для (17), $P_{in} = -0,003$ и $Re = 250$ для $y(0) \approx -0,092$ и $y(0) \approx -0,018$ (рис. 31, сплошные линии). Из построения видно, что в обоих решениях «провал» радиуса сдвигается под действием вязкости к концу трубки. Кроме того, в решении с обходом центра «провал» радиуса становится меньше, а в решении без обхода центра он увеличивается.

При больших конечных значениях числа Рейнольдса Re и положительном входном трансмуральном давлении $P_{in} > 0$ (а также при $P_{cr} < P_{in} < 0$, $\kappa > 1/4$) возможен случай возникновения неединственности, аналогичный случаю $A < A_0$ с несколькими обходами центра. Примером служит график и зависимости $R(z)$ для значений (17), $P_{in} = 0,03$ и $Re = 1500$. Два сужения имеют место при $y(0) = 0,0745$, $y(0) = -0,0316$ и $y(0) = 0,0292$, одно сужение – при $y(0) = -0,0317$ и $y(0) = 0,0293$, раздутая трубка – при $y(0) = -0,0746$ (рис. 32).

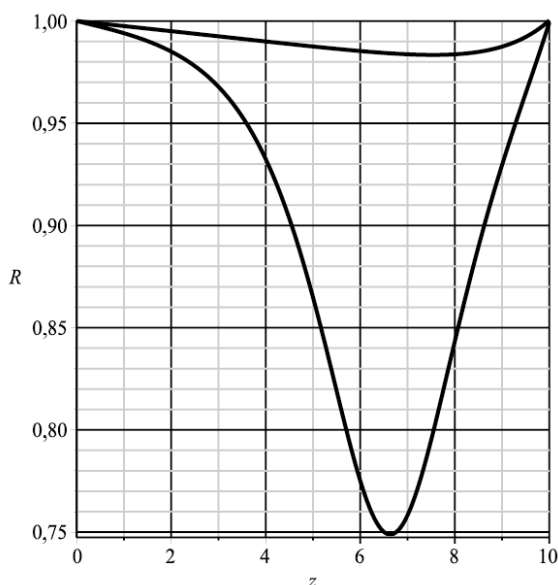


Рис. 30. График $R(z)$ для (17) при $P_{in} = 0$, $Re = 1000$

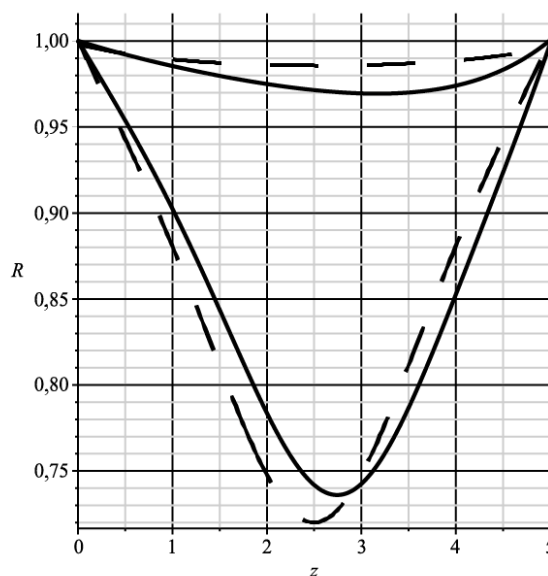


Рис. 31. График $R(z)$ для (17) при $P_{in} = -0,003$, $L = 5$

КРОВЕНОСНЫЕ СОСУДЫ

Сердечно-сосудистая система человека состоит из сердца и сосудов – артерий, капилляров и вен. Кровь по сосудам движется под действием перепада давления от области высокого к области низкого давления. Поскольку сосудистая стенка эластична, изменения трансмурального давления сопровождаются изменениями диаметра и степени растяжения.

Механические свойства и геометрические параметры кровеносных сосудов, ранее изученные в ряде работ, представлены в таблице. Безразмерные параметры (обозначенные волной) выражаются через размерные по формулам (5) и $\tilde{L} = L / R_0$.

Значения радиальной жесткости могут быть найдены по формуле $\beta = \frac{Eh}{(1-\nu^2)R_0^2}$,

поскольку известно, что диапазон значений модуля Юнга E для кровеносных сосудов 0,1–1,0 МПа [14] и среднее значение обычно около 0,4 МПа (40 Н/см²) [42], а значение коэффициента Пуассона $\nu \approx 0,4$. В свою очередь, продольное натяжение может быть найдено по формуле $N = Ehl$, где l – продольное относительное удлинение сосуда.

Напряжение ($E \times l$) принято в расчетах равным 5 Н/см² [8], что соответствует напряжениям, которые испытывает стенка сосуда в организме человека.

Параметры кровеносных сосудов

Кровеносный сосуд	R_0 , см [43]	h , см [21]	V_0 , см/с [43]	Re [43]	P_{in} , Н/см ² [4]
Восходящая аорта	1,00–1,60	0,20	22,00–63,00	1600–5800	1,33
Большие артерии	1,00–3,00	0,10	20,00–50,00	110–850	1,10
Большие вены	0,25–0,50	0,05	15,00–20,00	210–570	0,13
Полая вена	0,10	0,15	11,00–16,00	630–900	0,10

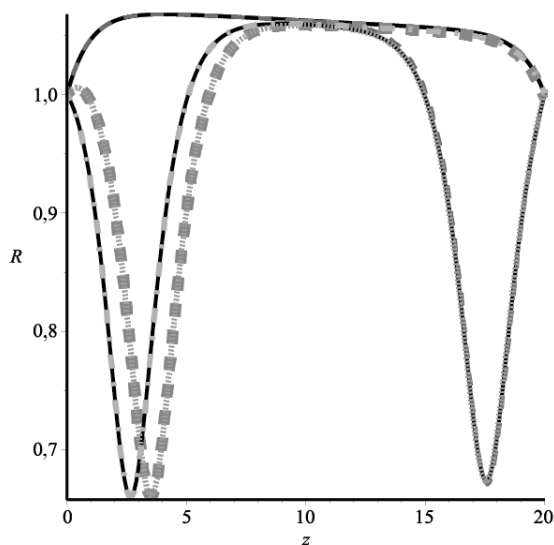


Рис. 32. График $R(z)$ для (17), $P_{in} = 0,03$
 $Re = 1500$

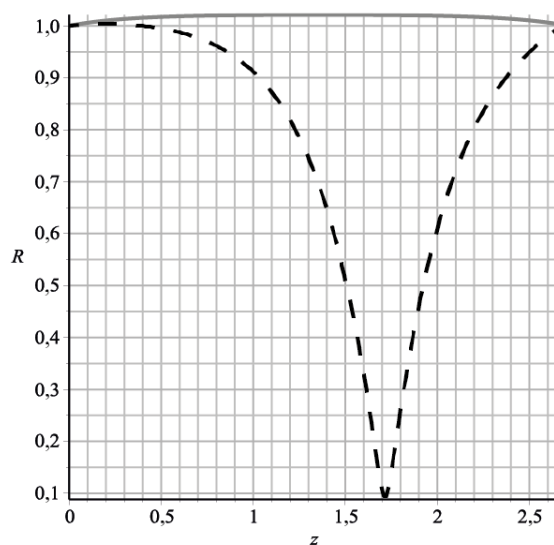


Рис. 33. График $R(z)$ для восходящей аорты

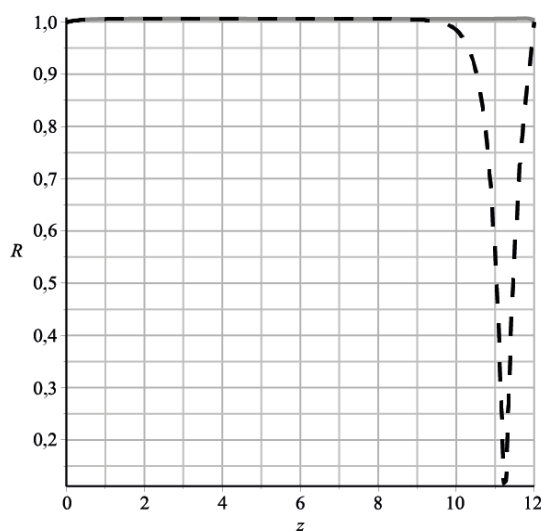


Рис. 34. График $R(z)$ для левой почечной
артерии

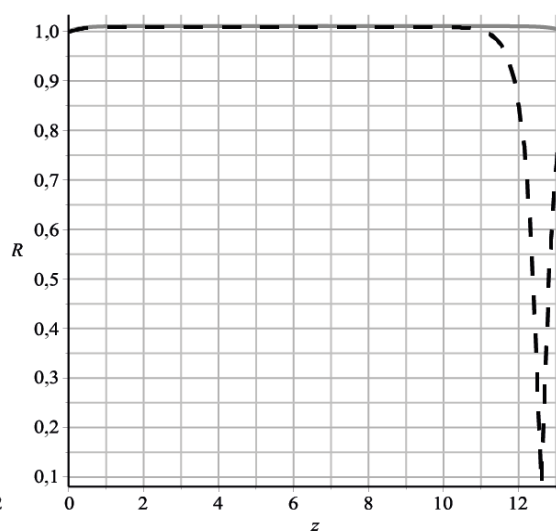
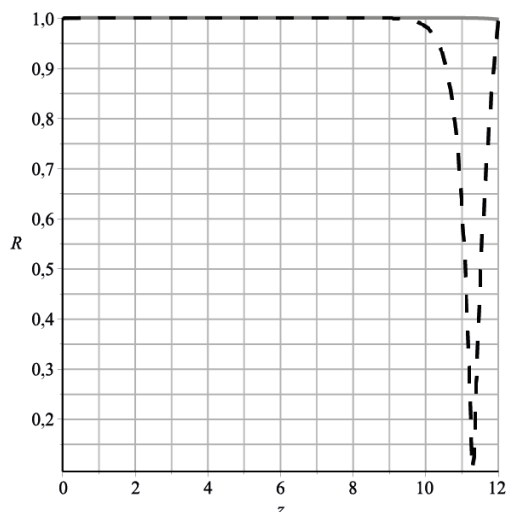
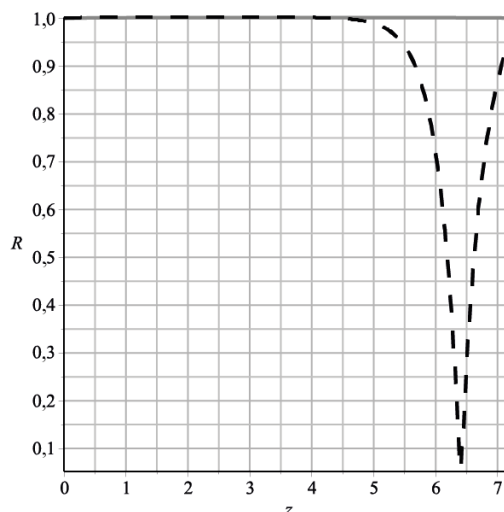


Рис. 35. График $R(z)$ для правой общей
подвздошной артерии

Расчеты показывают, что для параметров, соответствующих аорте, решение существует, и во всех случаях неединственно. В расчетах предполагается показатель степенной среды $n=1$, поскольку течение крови в крупных сосудах отвечает ньютоновским свойствам. Для значений параметров восходящей аорты (см. таблицу) $R_0 = 1,50$ см [7], $V_0 = 30$ см/с, $Re = 1900$ получаются две траектории, соответствующие реальной длине сосуда $L = 4$ см [7] (рис. 33).

Другим примером являются артерии, имеющие довольно правильную цилиндрическую форму. Их стенки достаточно толстые, чтобы выдерживать высокое давление, которое создается при мощных выбросах крови, и они не опадают, если не наполнены кровью. Для значений параметров артерий (см. таблицу, например, левая почечная артерия $R_0 = 0,25$ см [7], $V_0 = 35$ см/с, $Re = 370$, $L = 3,00$ см [7] или правая

Рис. 36. График $R(z)$ для левой внутренней подвздошной веныРис. 37. График $R(z)$ для верхней поллой вены

общая подвздошная артерия $R_0 = 0,44$ см [7], $V_0 = 35$ см/с, $Re = 650$, $L = 5,80$ см [7]) получают две траектории, одна из которых соответствует небольшому расширению, а вторая очень большому провалу радиуса в конце трубки (рис. 34, 35).

В свою очередь, давление в венах низкое в сравнении с давлением в артериях, поэтому стенки вен тоньше. При рассмотрении зависимости радиуса от длины трубки с параметрами, соответствующими венам (например, левая внутренняя подвздошная вена $R_0 = 0,25$ см [7], $V_0 = 20$ см/с, $Re = 210$, $L = 3,00$ см [7] или верхняя полая вена $R_0 = 1,10$ см [7], $V_0 = 15$ см/с, $Re = 700$, $L = 8,00$ см [7]), также можно обнаружить две траектории, аналогичные траекториям, полученным для артерий (рис. 36, 37).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

При течении вязкой жидкости в упругом сосуде происходит падение давления из-за вязких потерь, которое за счет упругости стенок приводит к постепенному уменьшению диаметра сосуда. Уменьшение радиуса, в свою очередь, вызывает более интенсивное падение давления, чем было бы в сосуде постоянного сечения, что вызывает более интенсивное сужение сечения. В работе [11] было показано, что при отсутствии натяжения сосуда его длина может быть лишь конечной: при $L = L_{\max}$ уменьшение радиуса становится бесконечно быстрым, и при $L > L_{\max}$ решения задачи не существует. В настоящей работе доказано, что натяжение не может принципиально изменить эту картину и предотвратить схлопывание сосуда при увеличении его длины, а именно: из-за потерь давления, вызванных вязкостью жидкости, стационарное протекание степенной жидкости в натянутом упругом сосуде возможно лишь при ограниченной длине сосуда $L < L_{\max}$. В более длинных сосудах течение может быть лишь нестационарным, что, возможно, связано с явлением флаттера в упругих трубках, содержащих текущую жидкость [25, 33].

Эта ситуация принципиально отличается от результатов [24], где показано, что при пренебрежении вязкостью, но учете отрыва потока от стенки в сужении решение существует для сколь угодно длинных трубок.

Также в настоящей работе доказано, что при $L < L_{\max}$, когда решение краевой задачи о протекании степенной жидкости в упругом сосуде существует, оно для достаточно больших чисел Рейнольдса всегда неединственно.

Для отрицательного трансмурального давления помимо «естественного» решения, соответствующего постепенному уменьшению радиуса и последующему увеличению за счет натяжения (в терминах данной работы это решение без обхода стационарной точки-центра), имеется второе решение, в котором уменьшение радиуса более существенно (решение с обходом центра), см. рис. 31. Второе решение, ввиду более резкого и более сильного сужения сечения, имеет большую предрасположенность как к отрыву потока от стенок сосуда, так и к потере осесимметричности сечения сосуда. По-видимому, в реальных сосудах оно не может реализоваться.

Для положительного трансмурального давления помимо «естественного» решения, при котором сосуд раздут, имеется целое семейство решений, в которых наблюдается одно или несколько дополнительных пережатий сечения (решения с обходом центра), см. рис. 32, которые, видимо, по тем же причинам не могут реализоваться в кровеносной системе.

Таким образом, среди нескольких существующих решений только одно соответствует «естественному» состоянию кровеносного сосуда. Между тем при численном решении краевой задачи может реализоваться любое из этих решений, поскольку в рамках одномерной модели все они равноправны. Поскольку в настоящее время одномерные модели сети кровеносных сосудов являются одним из основных инструментов исследования задач гемодинамики [1–3, 9, 10, 12, 17, 18, 20, 23, 34, 35, 40], факт неединственности стационарного протекания чрезвычайно важен. Расчеты динамики пульсовой волны в сети сосудов всегда начинаются с некоторого начального условия, в качестве которого естественно выбирать стационарное течение. Если это начальное условие выбрано неверно, то и последующая динамика будет рассчитана неправильно. Таким образом, результаты настоящей работы показывают, что из-за неединственности стационарного состояния необходим дополнительный контроль физичности получаемых в расчетах решений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе выведено одномерное уравнение стационарного состояния упругой трубки с протекающей внутри степенной жидкостью, учитывающее ее реологию и образующийся ламинарный профиль скорости.

Для движения идеальной жидкости (число Рейнольдса $Re \rightarrow \infty$) с заданным профилем скорости получены условия существования стационарного состояния для сколь угодно большой длины трубки: значение входного трансмурального давления либо положительно, либо отрицательно и больше некоторого критического значения ($P_{in} > 0$ или $P_{cr} < P_{in} < 0$). При учете вязкости (конечные числа Рейнольдса) трубка всегда может иметь лишь конечную длину. Таким образом, решения краевой задачи о стационарном состоянии трубки достаточно большой длины не существует, что должно приводить к колебательному режиму течения как единственно возможному. Данные колебания могут быть связаны с ранее изучавшимися в литературе колебательными режимами, вызванными падением давления в жидкости, потерей устойчивости трубки и ее периодическими схлопываниями.

При достаточно больших числах Рейнольдса и $L < L_{max}$ имеет место неединственность стационарного состояния трубки, удовлетворяющего граничным условиям задачи: при $P_{in} < P_{cr} < 0$ или $P_{cr} < P_{in} < 0$ и $\kappa < 1/4$ – два решения, при $P_{in} > 0$ или $P_{cr} < P_{in} < 0$ и $\kappa > 1/4$ – семейство решений. Одно из решений соответствует незначительно суженной (или расширенной) трубке с плавным изменением ее радиуса по длине. Второе решение (или семейство решений) соответствует резким локальным

сужениям трубки с последующим расширением до исходного радиуса. Существование таких режимов в реальности, по-видимому, невозможно в связи с вероятной потерей осесимметричности трубки и отрыва потока в локальном сужении; эти явления не описываются рассматриваемой здесь моделью. Вероятно, что перестроение на такой режим в действительности приводит к возникновению колебательного характера течения.

Результаты показывают, что в связи с обнаруженной неединственностью решения при численном моделировании гемодинамики системы кровеносных сосудов на основе одномерных моделей необходим дополнительный контроль получаемых в расчете режимов, а именно: из всех возможных решений начально-краевой задачи лишь одно физически корректно (в терминах настоящей работы соответствует отсутствию обходов вокруг точки-центра), остальные имеют одно или несколько нефизичных пережатий сосуда (соответствующих обходам центра). Отсутствие такого контроля при численном моделировании может приводить к неверным результатам расчетов, не отражающим реальное движение биожидкости в сосуде.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет Грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-31-00407 и 18-29-10020).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абакумов М.В., Ашметков И.В., Есикова Н.Б., Кошелев В.Б., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Хруленко А.Б. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // Математическое моделирование. – 2000. – Т. 12, № 2. – С. 106–117.
2. Абакумов М.В., Гаврилюк К.В., Есикова Н.Б., Лукшин А.В., Мухин С.И., Соснин Н.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Математическая модель гемодинамики сердечно-сосудистой системы // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 7. – С. 892–898.
3. Василевский Ю.В., Саламатова В.Ю., Симаков С.С. Об эластичности сосудов в одномерных моделях гемодинамики // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2015. – Т. 55, № 9. – С. 1599–1610.
4. Дудель Й., Рюэгг Й., Шмидт Р. Физиология человека: в 3 т. Т. 2. / под ред. Р. Шмидт, Г. Тесва; пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 314 с.
5. Кошев В.И., Петров Е.С., Волобуев А.Н. Гидродинамический флаттер и антифлаттерная стабилизация в сердечно-сосудистой системе – Самара: Оффорт, 2007. – 408 с.
6. Кутепов А.М., Полянин А.Д. и др. Химическая гидродинамика: справочное пособие – М.: Квантум, 1996. – 336 с.
7. Лужа Д. Рентгеновская анатомия сосудистой системы. – Будапешт: Изд-во Акад. наук Венгрии, 2008. – 379 с.
8. Пурия Б.А., Касьянов В.А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. – Рига: Зинатне, 1980. – 260 с.
9. Симаков С.С., Холодов А.С., Евдокимов А.Е. Методы расчета глобального кровотока в организме человека с использованием гетерогенных вычислительных моделей // Медицина в зеркале информатики. – М.: Наука, 2008. – С. 124–170.
10. Холодов А.С. Некоторые динамические модели внешнего дыхания и кровообращения с учетом их связности и переноса вещества // Компьютерные модели и прогресс медицины. – М.: Наука, 2001. – С. 127–163.
11. Юшутин В.С. Устойчивость деформируемых каналов при течении по ним нелинейно-вязких сред со степенным законом упрочнения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. – 2012. – № 4. – С. 67–70.
12. Alastruey J., Moore S.M., Parker K.H., David T., Peiro J., Sherwin S.J. Reduced modelling of blood flow in the cerebral circulation: Coupling 1-D, 0-D and cerebral auto-regulation models // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 2008. – Vol. 56. – P.1061–1067.
13. Anand M., Rajagopal K.R. A shear-thinning viscoelastic fluid model for describing the flow of blood // International Journal of Cardiovascular Medicine and Science. – 2004. – Vol. 4. – P. 59–68.

14. Bergel D. The static elastic properties of the arterial wall // *J. Physiol.* – 1961. – Vol. 156. – P. 445–457.
15. Blanco P., Discacciati M., Quarteroni A. Modeling dimensionally-heterogeneous problems: analysis, approximation and applications // *Numer. Math.* – 2011. – Vol. 119. – P. 299–335.
16. Blanco P., Feijóo R., Urquiza S. A unified variational approach for coupling 3D–1D models and its blood flow applications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 2007. – Vol. 196. – P. 4391–4410.
17. Blanco P., Watanabe S., Passos M., Lemos P., Feijóo R. An anatomically detailed arterial network model for one-dimensional computational hemodynamics // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* – 2015. – Vol. 62(2). – P. 736–753.
18. Boileau E., Nithiarasu P., Blanco P., Müller L., Fossan F., Hellevik L., Donders W., Huberts W., Willemet M., Alastruey J. A benchmark study of numerical schemes for one-dimensional arterial blood flow modelling // *Int. J. Numer. Method Biomed. Eng.* – 2015. – Vol. 31, № 10.
19. Epstein S., Willemet M., Chowieńczyk P., Alastruey J. Reducing the number of parameters in 1D arterial blood flow modeling: less is more for patient-specific simulations // *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* – 2015 – Vol. 309. – P. H222–234.
20. Formaggia L., Lamponi D., Quarteroni A. One-dimensional models for blood flow in arteries // *J. Engng Mathematics* – 2003. – Vol. 47. – P. 251–276.
21. Formaggia L., Quarteroni A., Veneziani A. *Cardiovascular Mathematics: Modeling and simulation of the circulatory system.* – Springer Science & Business Media, 2010. – 522 p.
22. Gijssen F.J.H., van de Vosse F.N., Janssen J.D. The influence of non-Newtonian properties of blood on the flow in large arteries: steady flow in a carotid bifurcation model // *Journal of Biomechanics.* – 1999. – Vol. 32. – P. 601–608.
23. Guan D., Liang F., Gremaud P. Comparison of the windkessel model and structured-tree model applied to prescribe outflow boundary conditions for a one-dimensional arterial tree model // *J. Biomech.* – 2016. – Vol. 49, № 9. – P. 1583–1592.
24. Jensen O.E., Pedley T.J. The existence of steady flow in a collapsed tube // *J. Fluid Mech.* – 1989. – Vol. 206. – P. 339–374.
25. Katz A.I., Chen Yu, Morreno A.H. Flow through a collapsible tube. Experimental analysis and mathematical model // *Biophysical Journal.* – 1969. – Vol. 9, № 10. – P. 1261–1279.
26. Ku D.N. Blood flow in arteries // *Annual Review of Fluid Mechanics.* – 1997. – Vol. 29. – P. 399–434.
27. Kuchumov A., Gilev V., Popov V., Samartsev V., Gavrilov V. Non-Newtonian flow of pathological bile in the biliary system: experimental investigation and CFD simulations // *Korea-Australia Rheology Journal.* – 2014. – Vol. 26. – P. 81–90.
28. Kudenatti R.B., Bujurke N.M., Pedley T.J. Stability of two-dimensional collapsible-channel flow at high Reynolds number // *J. Fluid Mech.* – 2012. – Vol. 705. – P. 371–386.
29. Liu H.F., Luo X.Y., Cai Z.X. Stability and energy budget of pressure-driven collapsible channel flow // *J. Fluid Mech.* – 2012. – Vol. 705. – P. 348–370.
30. Luo X.Y., Pedley T.J. Multiple solutions and flow limitation in collapsible channel flow // *J. Fluid Mech.* – 2000. – Vol. 420. – P. 301–324.
31. Metzner A.B., Reed J.C. Flow of non-Newtonian fluids-correlation of the laminar, transition, and turbulent-flow regions // *A.I.Ch.E. Journal.* – 1955. – Vol. 1, № 4. – P. 434–440.
32. Pedley T.J., Brook B.S., Seymour R.S. Blood pressure and flow rate in the giraffe jugular vein // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. B. Biol. Sci.* – 1996. – Vol. 351. – P. 855–866.
33. Pedley T.J., Luo X.Y. Modelling flow and oscillations in collapsible tubes // *Theor. Comp. Fluid Dyn.* – 1998. – Vol. 10. – P. 277–294.
34. Quarteroni A. *Cardiovascular mathematics.* – ICM, 2006.
35. Reymond P., Merenda F., Perren F., Rüfenacht D., Stergiopoulos N. Validation of a one-dimensional model of the systemic arterial tree // *Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol.* – 2009. – Vol. 297, № 1. – P. H208–222.
36. Reyn J.W. Multiple solutions and flow limitation for steady flow through a collapsible tube held open at the ends // *J. Fluid Mech.* – 1987. – Vol. 174. – P. 467–493.
37. Shapiro A.H. Steady flow in collapsible tubes // *ASME J. Biomech. Engrg.* – 1977. – Vol. 99. – P. 126–147.
38. Shapiro A.H. Physiologic and medical aspects of flow in collapsible tubes // *Proc. 6th Canadian Congress on Applied Mechanics.* – 1977. – P. 883–906.
39. Smith N.P., Pullan A.J., Hunter P.J. An anatomically based model of coronary blood flow and myocardial mechanics // *SIAM J. Appl. Math.* – 2002. – Vol. 62. – P. 990–1018.
40. Vassilevski Y., Simakov S., Dobroserdova T., Salamatova V. Numerical issues of modelling blood flow in networks of vessels with pathologies // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* – 2011. – Vol. 26. – P. 605–622.
41. Whittaker R.J., Heil M., Jensen O.E., Waters S.L. Predicting the onset of high-frequency self-excited oscillations in elastic-walled tubes // *Proc. R. Soc.* – 2010. – Vol. A466. – P. 3635–3657.

42. Wuyts F., Vanhuysse V., Langewouters G., Decraemer W., Raman E., Buyle S. Elastic properties of human aortas in relation to age and atherosclerosis: a structural model // *Phys. Med. Bid.* – 1995.– Vol. 40. – P. 1577–1597.
43. Xu F., Lu T.J., Seffen K.A., Ng E.Y.K. Mathematical modeling of skin bioheat transfer // *Applied Mechanics Reviews.* – 2009. – Vol. 62, № 5. – P. 1–35.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF STATIONARY STATE OF ELASTIC TUBES CONVEYING POWER LAW FLUIDS

A.B. Poroshina, V.V. Vedenev (Moscow, Russia)

Instability of collapsible tubes has been studied in many papers theoretically and experimentally in the context of biological applications. Up to the present day, only Newtonian fluids flowing in collapsible tubes have been studied. However, there are circumstances when blood, gall, and other biological fluids have essentially non-Newtonian properties. When the pressure inside of the tube is substantially lower than external pressure, the tube loses stability that yields the appearance of oscillation. Oscillation can also start due to non-existence of the steady state of the tube conveying fluid. In this paper, existence and uniqueness of axisymmetric states of collapsible tube conveying power law fluids have been theoretically studied. The qualitative analytical investigation of the equations of motion has been carried out for the stationary state of the tube. As a result, it is obtained that the solution of boundary value problem for stationary state of sufficient long tube does not exist. Moreover, the state of tube satisfying the boundary conditions can be non-unique for sufficiently small length of the tube.

Key words: one-dimensional model, stationary state, uniqueness, elastic tubes, power law fluids, oscillation.

Получено 05 мая 2017