

DOI: 10.15593/RZhBiomeh/2018.1.09
УДК 531/534: [57+61]



О НАХОЖДЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ В ГИПЕРУПРУГОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ МЯГКОЙ ТКАНИ

Л. Занелли³, А. Монтанаро³, Е. Карниел^{1,2}, П. Паван^{1,2}, А. Натали^{1,2}

¹ Кафедра промышленной инженерии, Университет Падуя, Италия, 35131, Падуя, Виа Марцоло, 9, e-mail: arturo.natali@unipd.it

² Центр механики биологических материалов, Университет Падуя, Италия, 35131, Падуя, Виа Марцоло, 9, e-mail: arturo.natali@unipd.it

³ Кафедра математики, Университет Падуя, Италия, 35131, Падуя, Виа Марцоло, 9, e-mail: lorenzo.zanelli@unipd.it

Аннотация. Цель данной статьи – изучение модели гиперупругих материалов и ее применение в механике мягких тканей. В частности, сначала определяется неограниченная область конститутивных параметров модели, заменяя гладкую функцию энергии деформации поливыпуклой и потому удовлетворяющей условию Лежандра – Адамара (*Legendre-Hadamard*). Далее физически разумное поведение материала описывается данной моделью с этими параметрами и многие ткани могут быть рассмотрены. Затем локализуются ограниченные подмножества конститутивных параметров в физически фиксированных и очень общих границах, и затем вводим семейство дискретных кривых напряжения–деформации. Затем характеризуются различные классы тканей. Предложенный авторами общий подход основан на детальном аналитическом изучении первого тензора напряжения Пиолы – Кирхгофа через его зависимость от инвариантов и от конститутивных параметров. Единственность параметров для данной ткани обсуждается, вводится понятие многообразия конститутивных параметров, которые локально представляются, возможно, различными физическими величинами. Достоинством предлагаемого подхода является то, что авторы показывают возможный способ улучшить обычные подходы, известные в литературе, которые преимущественно основаны на минимизации целевой функции разности между экспериментальными и модельными результатами.

Ключевые слова: гиперупругость, поливыпуклость, конститутивные параметры, моделирование тканей.

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Современное состояние моделирования мягких тканей

В различных областях биомедицинской инженерии точные измерения свойств мягких тканей играют очень важную роль. К сожалению, для многих механических свойств мягких тканей в основном трудно провести прямое и точное измерение, и тогда используют некоторый вид обратного приближения. Ввиду этого факта изучаемая ткань обычно описывается гиперупругими, вязкоупругими или более общими моделями [5, 10, 20, 23, 24]. При этом многие эксперименты могут быть численно

моделированы и соответствующие материальные параметры могут быть подобраны для соответствия модели экспериментальным данным.

Тем не менее необходимо помнить, что существуют некоторые переменные проблемы обратных задач в гиперупругости [2]. Обратная задача относится к модели, которая может быть определена через различные возможные семейства материальных параметров. Затем, когда экспериментальные данные и соответствующая модель фиксированы, необходимо оптимальное приближение, чтобы локализовать материальные параметры.

Первая и общая области параметров должны обеспечивать физически разумное материальное поведение модели. Хорошо известно, что для гиперупругих моделей такое поведение обеспечивается условием поливыпуклости функции энергии деформации относительно градиента деформации [3, 16, 17–20]. Авторы также адресуют читателя к работам [21, 25, 26] для изучения выпуклости и сильной эллиптичности моделей, применимых к биологическим материалам.

Вторая и более специфическая область параметров такова, что модель соответствует фиксированному семейству кривых напряжения–деформации, полученных из экспериментальных данных для некоторой ткани. По отношению к данной проблеме могут быть даны различные приближения. Часто в литературе это определяется через целевую функцию, которая измеряет разность между экспериментальными и модельными результатами. Она является функцией конститутивных параметров, и необходим алгоритм, чтобы ее минимизировать. Например, конкретная процедура нормализации была разработана в работе [4], и этот вид приближения может быть использован в случае сложного поведения целевой функции. В других случаях возможна простая подгонка запасенной энергии для случая поливыпуклости мягких тканей, которая не требует никакой процедуры оптимизации, как показано в работе [19]. Следует подчеркнуть, что в обоих приближениях конечной целью является поиск хотя бы одного вектора конститутивных параметров для некоторой фиксированной ткани, обходя при этом полный анализ модели и ее зависимость от параметров.

1.2. О единственности конститутивных параметров

При процедурах с параметрами различной локализации, описанных выше, авторы подчеркивают, что другой внешней проблемой является однозначность конститутивных параметров, связанных с данной тканью. Действительно, многие эксперименты дают только некоторую ограниченную информацию о механическом поведении материала, и поэтому имеется неединственность уравнений модели. Это проблема не решена для многих гиперупругих моделей и модельных тканей, а общее приближение, кажется, не приводится в литературе [2, 8, 9, 11, 12, 14, 20, 22]. Также следует подчеркнуть, что увеличение экспериментальных данных или увеличение размерности пространства параметров может быть полезным, чтобы восстановить единственность материальных параметров, но это свойство относится к частному выбору модели.

В некоторых работах возможная неединственность материальных параметров не играет какой-либо роли, так как цель заключается в представлении характерного поведения напряжения–деформации для ограниченной экспериментальной базы данных [18].

Как обсуждается в работах [6, 7] и последующих работах, одна из причин, почему имеются ткани с неединственностью конститутивных параметров, заключается в том, что инварианты, используемые для конструирования большинства гиперупругих моделей, не ортогональны друг другу. Касательно этого наблюдения, данная работа предоставляет общие геометрические рамки, которые нужны для описания такого отсутствия однозначности. В самом деле, авторы рассматривают обратную задачу для

конститутивных материальных параметров и их однозначность для конкретной гиперупругой модели (см. раздел 3). Тем не менее новые исследования должны быть применены для распространения этого приближения и для других гиперупругих, вязкоупругих или более общих моделей. Данная тема будет обсуждена при рассмотрении различных тканей, моделируемых такой же гиперупругой моделью, и позволит изучить возможную неединственность параметров для какой-либо ткани с геометрической точки зрения.

1.3. Результаты данной статьи

Далее авторы обзора рассматривают главные результаты статьи по отношению к ранее обсужденным темам.

В разделе 3 вводится гиперупругая модель, которая будет изучаться с помощью функции энергии деформации, соответствующих инвариантов и конститутивных параметров. В частности, подчеркивается, что такая модель оказывается очень полезной в механике мягких тканей для тканей кишечника, как показано в работах [3, 16].

В разделе «Определение 4.1» доказывается свойство выпуклости функции энергии деформации $W = W(\mathbf{C}, \omega)$, где $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ есть тензор напряжений Коши – Грина, определенный с помощью градиента деформации $\mathbf{F}$ и $\omega \in \check{Y}^N$ (в данном случае $N = 19$), есть вектор, компоненты которого являются конститутивными параметрами. Здесь W – это дважды непрерывно дифференцируемая функция относительно $\mathbf{C}$ и непрерывная функция относительно ω .

Свойство поливыпуклости оказывается выполнимым для неограниченного множества конститутивных параметров $\Omega \subset \check{Y}^N$. Более точно для данной модели Ω принимает вид

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_N) =: \omega \in \check{Y}^N \mid 0 < \bar{\omega}_i < \omega_i\}, \quad (1)$$

где $\bar{\omega}_i$ – это фиксированные и произвольно малые величины. Хорошо известно, что поливыпуклость гарантирует физическое поведение для модели, и некоторые различные ткани могут быть описаны путем изменения параметров в этой области.

В разделе 2.2 рассматривается функция отклика для первого тензора напряжения Пиолы – Кирхгофа

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F}\partial\mathbf{C}W, \quad (2)$$

который относится к первому семейству градиентов деформации $\mathbf{F}_y$ и $1 \leq y \leq Y$, кроме того, при общей физической границе вида

$$\sup_{1 \leq y \leq Y} \|\mathbf{P}(\mathbf{F}_y, \omega)\| \leq \gamma \quad (3)$$

для некоторого большого значения $\gamma > 0$. Выбор величины этой физической границы γ зависит от выбора тканей и от данных, имеющихся в распоряжении экспериментальной лаборатории. Здесь этот анализ ведет к требованию, чтобы

$$B := \{\omega \in \Omega \mid \|\mathbf{P}(\mathbf{F}_y, \omega)\| < \gamma, \quad \forall 1 \leq y \leq Y\} \quad (4)$$

являлось открытым и ограниченным множеством. Как видно из теоремы 4.2, все компоненты тензора напряжения рассматриваемой гиперупругой модели должны удовлетворять этому условию. Ограниченность такой области является первой важной информацией, которая оказывается полезной в последующем и для более детальной локализации конститутивных параметров.

Теперь сфокусируем внимание на классической обратной проблеме конститутивных параметров: как только некоторое семейство дискретных кривых напряжения–деформации будет фиксировано, необходимо локализовать параметры, которые гарантируют совпадение экспериментальных и модельных данных.

Далее фиксируем любые $(y, k, l) \in I = \{1, \dots, Y\} \times \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$. Пусть p_{kl}^y принадлежит семейству величин для компоненты $\mathbf{P}(\mathbf{F}_y, \omega)$, когда конститутивный вектор ω меняется произвольно в $\bar{B}$, так что

$$p_{kl}^y \in \{\mathbf{P}(\mathbf{F}_y, \omega) \in \check{Y} | \omega \in B\}, \quad (5)$$

и пусть $p = \{p_{kl}^y\}$ есть многомерная матрица, где $(y, k, l) \in I$.

Вспоминая, что поливыпуклость функции энергии деформации W выполняется в Ω , p может быть интерпретировано как физический ответ возможных тканей, связанных с конститутивными параметрами $\omega \in B$.

Для любого выбора $\chi_{kl} > 0$ при $k, l = 1, 2, 3$ и $p = \{p_{kl}^y\}$ из (5) определим ниже

$$\Lambda(p) = \bigcap_{1 \leq y \leq Y} \bigcap_{1 \leq k, l \leq 3} \{\omega \in B | P_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega) \in (p_{kl}^y - \chi_{kl}, p_{kl}^y + \chi_{kl})\}, \quad (6)$$

что всегда является непустым пересечением Y открытых подмножеств из $\Omega \subset \check{Y}^N$. В самом деле, $(p_{kl}^y - \varepsilon_{kl}, p_{kl}^y + \varepsilon_{kl})$ является открытым интервалом и $\omega \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{F}_y, \omega)$ есть непрерывное отображение для любого фиксированного $\mathbf{F}_y$.

Как далее будет доказано, существует (необязательно единственное) семейство $p(\alpha)$ с $1 \leq \alpha \leq \hat{\alpha}$ и $B_\alpha := \Lambda(p(\alpha))$, где можно задать

$$B = \bigcup_{\alpha=1}^{\hat{\alpha}} B_\alpha. \quad (7)$$

Здесь B_α открыто и может быть не связано. Для краткого обзора доказательства возьмем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, параметры ω в конечном наборе точек $\varepsilon \check{Y}^N \cap B$ и фиксируем $p_{kl}^y(\alpha)$ как величины $p_{kl}^y = \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega)$, где α – это обозначение целого числа, отмечающего все такие узлы ω . Для более детального рассмотрения следует обратиться к теореме 4.4 и для соответствующего доказательства – к приложению.

Декомпозиция (7) показывает, что данная гиперупругая модель может быть применена для конечного числа $\hat{\alpha}$ различных тканей, каждая из которых связана с малым набором параметров B_α .

Как только будет получена геометрическая картина (7) с помощью семейства $p(\alpha)$, можно найти связь между экспериментальными данными (с соответствующими ошибками) для конкретной ткани и данными из модели. Необходимо найти соответствие между экспериментальными и модельными матрицами p_{kl}^y и зафиксировать ошибку модели ε_{kl} как экспериментальные ошибки. Если это сравнение выполнено, то выбирается одна конкретная область B_α , которая представляет конститутивные параметры ткани. Объем B_α относится к шкале, выбирается для наблюдения физических величин, представленных в такой области (см. замечание 4.6). В случае, когда такое сравнение не выполнено, необходимо (как часто отмечается в литературе) увеличить размерность пространства параметров. Чтобы получить успешное сравнение, можно добавить новые параметры, которые не зависят от

предыдущих в смысле линейно-независимых ограничений, даваемых тензором $\mathbf{P}$ в области параметров Ω .

Далее подчеркнем, что имеется неединственность параметров для данной ткани, если и только если существует множество B_α (определенное выше), которое является несвязным, а именно имеет вид

$$B_\alpha = B_\alpha(1) \cup B_\alpha(2) \cup \dots \cup B_\alpha(K_\alpha), \quad (8)$$

где $B_\alpha(1), B_\alpha(2), \dots, B_\alpha(K_\alpha)$ не пересекаются, открытые и связные компоненты, удовлетворяющие условию

$$\sup_{\omega \in B_\alpha(a)} \sup_{v \in B_\alpha(b)} \|P_{kl}(F_y, \omega) - P_{kl}(F_y, v)\| \leq 2\chi_{kl} \quad (9)$$

для любых F_y , как было показано выше, и для любого $1 \leq a, b \leq K_\alpha$. Полное знание такой вырожденности (т.е. неединственности) ведет к новому описанию области параметров как многообразия B , но не подмножества B в линейном пространстве $\check{Y}^N$, как описано в (7). Это многообразие имеет вид

$$B = \bigcup_{\alpha=1}^{\hat{\alpha}} B_\alpha^c, \quad (10)$$

где любое B_α^c совпадает через его различные локальные представления $B_\alpha(1), B_\alpha(2), \dots, B_\alpha(K_\alpha)$, см. теорему 4.5 и приложение. С геометрической точки зрения это означает, что начиная с B , как в (7), имеется подмножество $B_\alpha(1)$, «склеенное» с $B_\alpha(2)$ и $B_\alpha(K_\alpha)$ для любого α . Докажем хорошую постановку структуры многообразия (10) в приложении.

Благодаря представлению (10) можно считать функцию энергии деформации $W(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, \omega)$ и связанный первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа $\mathbf{P}(\mathbf{F}, \omega)$ как определенные при $\omega \in B$. Локальные представления B дают локальные представления $W(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, \omega)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{F}, \omega)$ на $B_\alpha(1), B_\alpha(2), \dots, B_\alpha(K_\alpha)$, и затем можно восстановить глобальное поведение такой функции и тензора. Подчеркнем, что с увеличением числа $Y' \geq Y$ градиентов деформации (увеличивая экспериментальные данные) вышеуказанные выражения (7)–(10) не нарушаются, но любая область B_α и B_α^c может быть разбита на два или более подмножества. Это означает, что новое многообразие B' может быть получено из предыдущего B приклеиванием эквивалентных подмножеств, представляющих новые связанные ткани (более точно, ткани, обнаруживающие более богатый физический ответ).

Описание (10) имеет два преимущества. Первое состоит в том, что любая ткань с индексом α теперь существенно связана с некоторым (малым) множеством параметров B_α^c . Второе заключается в том, что локальные представления B_α^c , получаемые K_α соседними векторами $B_\alpha(1), B_\alpha(2), \dots, B_\alpha(K_\alpha)$, могут быть интерпретированы как реализация различных физических величин. Все эти величины также гарантируют связь между моделью и экспериментальными данными для любой фиксированной ткани.

Цель увеличения Y состоит также в локализации как можно большего числа $\hat{\alpha}$ эквивалентных областей B_α , но представляющих новые физические величины для конститутивных параметров, характеризующих материал. Чтобы привести пример такого аргумента, представим себе две лаборатории или более, работающие над той же тканью и с тем же экспериментом, но учитывающие различные физические величины,

чтобы восстановить конститутивные параметры материала. Подчеркнем, что данное приближение есть новая точка зрения на связь между конститутивными параметрами и гиперупругими моделями. В самом деле, здесь различные конститутивные параметры ткани (с различным физическим значением) входят с помощью одинаковой гиперупругой модели. Это проявляется в том факте, что ранее в литературе изменение точки зрения на эти фрагменты с различными конститутивными параметрами (относящимися к линейному пространству $\check{Y}^N$) для той же ткани обязательно связаны с разными моделями. Вновь подчеркнем, что здесь ключевой момент есть определение значений конститутивных параметров с помощью локальных представлений множества B , связанного с гиперупругой моделью, которое более общо, чем линейное пространство $\check{Y}^N$, имеющее одинаковое локальное представление для любой точки и потому представляющее единое семейство физических величин. В этой второй постановке возможная неединственность параметров, относящихся к множеству экспериментальных данных, не имеет физического смысла и гиперупругая модель должна быть изменена, чтобы восстановить единственность. Благодаря данному приближению восстановлена проблема единственности конститутивных параметров в смысле, указанном ранее, и это было сделано без необходимости увеличения числа экспериментальных данных или увеличения размеров пространства параметров.

В заключительном разделе (5) вследствие того, что речь идет о приложении к кишечной ткани и соответствующих экспериментальных данных, указанных в работе [3], авторы отсылают к явному изучению некоторых тензоров напряжений. С численной точки зрения авторы продвигаются, указывая, как обычная минимизация целевой функции между моделью и экспериментом может быть также использована, чтобы локализовать области параметров и изучить любым численным методом однозначность.

В заключение в приложении (6) напомним определение дифференцируемых множеств и приведем доказательства основных результатов статьи, очерченных во введении.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом параграфе приведем резюме обозначений, используемых в статье вместе с некоторыми центральными определениями относительно гиперупругости.

Обозначим Lin^+ как множество всех тензоров второго порядка, имеющих положительный определитель. Далее обозначим такое множество как семейство 3×3 матриц $M_{n \times n}$ с положительным определителем. Множество Orth^+ есть подмножество $\mathbf{R} \in \text{Lin}^+$, определенное единичными тензорами, а именно удовлетворяющими условию $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \text{id}$. Множество Sym^+ есть подмножество $\mathbf{U} \in \text{Lin}^+$ симметричных тензоров, т.е. таких, что $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$.

Как обычно представлено в литературе, $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+$ означает градиент деформации, $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \in \text{Sym}^+$ означает правый тензор деформации Коши – Грина, отображение $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ \rightarrow W(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \in \check{Y}$ – функция энергии деформации, и первый тензор напряжений Пиола – Кирхгофа обозначается $\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \partial \mathbf{C} W$. Для тщательного изучения основ механики сплошных сред имеется множество стандартных учебников, например [10, 15, 23].

Определение 2.1. Отображение $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ \rightarrow W(\mathbf{F}) \in \check{Y}$ обозначает выпуклую функцию, если

$$W(\tau \mathbf{F}_1 + (1-\tau)\mathbf{F}_2) \leq \tau W(\mathbf{F}_1) + (1-\tau)W(\mathbf{F}_2) \quad (11)$$

для любого $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ и $\forall 0 \leq \tau \leq 1$.

В тексте используются некоторые обобщенные условия выпуклости. В частности, из [15] напомним следующее.

Определение 2.2. Отображение $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ \rightarrow W(\mathbf{F}) \in \check{\mathbb{Y}}$ является поливыпуклым, если существует функция $P: \check{\mathbb{Y}}^{3 \times 3} \times \check{\mathbb{Y}}^{3 \times 3} \times \check{\mathbb{Y}} \rightarrow \check{\mathbb{Y}}$, такая что

$$W(\mathbf{F}) = P(\mathbf{F}, \text{Adj}[\mathbf{F}], \det[\mathbf{F}]), \quad (12)$$

и $(\check{X}, \check{Y}, \check{Z}) \in \check{\mathbb{Y}}^{19} \rightarrow P(\check{X}, \check{Y}, \check{Z}) \in \check{\mathbb{Y}}$ выпукло.

Хорошо известно, что такое свойство может быть использовано, чтобы выбрать модели, отражающие физически разумное поведение материала [20].

Определение 2.3. Дважды дифференцируемая функция $\mathbf{F} \in \text{Lin}^+ \rightarrow W(\mathbf{F}) \in \check{\mathbb{Y}}$ удовлетворяет условию Лежандра – Адамара, если $\forall a, b \in \check{\mathbb{Y}}^n$ и $\forall \mathbf{F} \in \text{Lin}^+$,

$$D_{\mathbf{F}}^2 W(\mathbf{F})(a \otimes b, a \otimes b) \geq 0. \quad (13)$$

Как легко показать, поливыпуклость означает в случае дважды дифференцируемых энергий также условие Лежандра – Адамара. Кроме того, подчеркнем, что более слабое условие гарантирует физически разумное поведение материала [18].

Замечание 2.4. Хорошо известно, что функция энергии деформации $W(\mathbf{C})$ всегда не зависима от системы координат и инвариантна по отношению к вращению. Далее учитывается, что из-за полярной декомпозиции имеет место теорема $\forall \mathbf{F} \in \text{Lin}^+ \exists! \mathbf{R} \in \text{Orth}^+, \exists! \mathbf{U} \in \text{Sum}^+$, так что $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$. Однако $\mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$. Поэтому оба тензора $\mathbf{F}$ и $\mathbf{U}$ имеют одинаковые главные значения, и все соответствующие собственные векторы связаны с одинаковым вращением. Поливыпуклость отражения $\mathbf{F} \rightarrow W(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$ эквивалентна поливыпуклости $\mathbf{U} \rightarrow W(\mathbf{U}^T \mathbf{U})$, с этой второй точки зрения градиент деформации определяется с точностью до локальных вращений. Другими словами, чтобы вернуться к обычному определению поливыпуклости, используемому в литературе (см. параграф 2), нужно сфокусировать внимание на отражении $\mathbf{F} \rightarrow W(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$.

3. ГИПЕРУПРУГАЯ МОДЕЛЬ

Функция энергии деформации для модели, принятой в данной статье, имеет вид

$$W(\mathbf{C}) = W_m(\mathbf{C}) + \sum_{1 \leq i \leq 4} W_f^i(\mathbf{C}, a_0^i \otimes a_0^i) + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} W_f^{ij}(\mathbf{C}, a_0^i \otimes a_0^j). \quad (14)$$

Первый член W_m есть энергия деформации основной матрицы, второй член W_f^i есть i -е семейство волокон, а последний член W_f^{ij} описывает эффекты взаимодействия между i -м и j -м семействами волокон. Более детально такая функция энергии деформации получена для характеристики механического поведения тканей от полых органов желудочно-кишечного тракта, которые составлены из полостей, окруженных стенками. Такая стенка состоит из основной матрицы, усиленной четырьмя семействами волокон, ориентации которых определяются векторами a_0^i . Такие волокна распределяются следующим образом: два семейства волокон определяют спирали по и

против часовой стрелке вдоль продольной оси трубчатой структуры, другие семейства волокон ориентированы вдоль продольного и кругового направлений. Структура семейства волокон связана со структурой векторов a_0^i относительно системы отсчета, которая локально тангенциальна стенке. Далее показывается, как вводится ортонормальная система отсчета LTK , где L и T определяют касательную плоскость. В общем, угол между направлением L и окружным направлением будет обозначаться как β . Для такой системы отсчета единичные векторы, указанные выше, имеют вид

$$\begin{aligned} a_0^1 &= (\sin(\beta), \cos(\beta), 0), \\ a_0^2 &= (\cos(\beta), \sin(\beta), 0), \\ a_0^3 &= (\cos(\beta - \theta), \sin(\beta - \theta), 0), \\ a_0^4 &= (-\cos(\beta + \theta), -\sin(\beta + \theta), 0), \end{aligned} \quad (15)$$

где $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Угол θ – это угол пересечения между коллагеновыми волокнами и окружным направлением, и β – это угол между нагрузкой и окружным направлением. Ориентация коллагеновых волокон (угол θ) есть параметр, который идентифицируется, в частности, первый член в (14) имеет вид

$$\begin{aligned} W_m(C) &= U_m(J) + W_1(I_1^0), \\ U_m(J) &= \frac{K_v [(J-1)^2 + J^{-r} + rJ - (r+1)]}{2 + r(r+1)}, \\ W_1(I_1^0) &= \frac{C_1}{\alpha_1} \{ \exp[\alpha_1 (I_1^0 - 3)] - 1 \}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $J = (\det C)^{1/2}$ – Якобиан деформации и $I_1^0 = \text{tr}(J^{-2/3} C)$ есть первый инвариант изометрической части C . Конститутивные параметры K_v и r можно интерпретировать как матричную сжимаемость, где C_1 и α_1 характеризуют сдвиг. Для матрицы основного вещества предполагается экспоненциальная форма. Однако можно сказать, что возможное альтернативное допущение есть неогуковский материал для матрицы вещества основы. Второй член в (14) имеет вид

$$W_f^i(C, a_0^i \otimes a_0^i) = W_f^i(I_4^i) = \frac{C_4^i}{(\alpha_4^i)^2} \{ \exp[\alpha_4^i (I_4^i - 1)] - \alpha_4^i (I_4^i - 1) - 1 \}, \quad (17)$$

где структурный инвариант $I_4^i = C : (a_0^i \otimes a_0^i) = (\lambda_a^i)^2$ зависит от растяжения ткани вдоль направления волокон a_0^i в виде λ_a^i . Параметр C_4^i может быть интерпретирован как начальная жесткость i -го семейства волокон, где α_4^i есть увеличение жесткости волокон при растяжении. Последний член в (14) имеет вид

$$W_f^{ij}(C, a_0^i \otimes a_0^j) = W_f^{ij}(I_8^{ij}, I_9^{ij}) = C_{89}^{ij} [I_8^{ij} - I_9^{ij}]^2, \quad (18)$$

где восьмой и девятый инварианты определяются как $I_9^{ij} = (a_0^i \cdot a_0^j)^2$, C_{89}^{ij} может быть интерпретирован как угловая жесткость.

В заключение этого раздела подчеркнем, что число всех конститутивных параметров, включенных в эту модель, равно $N = 19$, и также отметим, что в

определении 4.1 выбирается область таких параметров в связи со свойством поливыпуклости энергии.

4. ГЛАВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Далее рассмотрим более детально главные результаты, отмеченные во введении.

В этом разделе приведено доказательство поливыпуклости функции энергии деформации $W(\mathbf{C})$ из (14) относительно градиента деформации $\mathbf{F}$. Для простоты вычисления разделены на три части.

(А) Докажем поливыпуклость отображения $\mathbf{F} \rightarrow W_m(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$ для W_m согласно (16). Касательно первого члена $U_m(J)$ можно заметить, что $J = (\det \mathbf{C})^{1/2} = ((\det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}))^{1/2} = \det(\mathbf{F})$. Вспоминая определение поливыпуклости (см. определение 2.2), обратим внимание на одномерное отображение $J \rightarrow U_m(J) \in \check{Y}$, которое есть слабая функция (т.е. C^∞) $J > 0$, и затем попытаемся доказать его свойство выпуклости. Одномерная постановка обеспечивает выпуклость изучением производной второго порядка

$$U_m''(J) = \frac{K_v}{2+r(r+1)} [2+r(r+1)J^{-r-2}]. \quad (19)$$

Затем для $r > 0$ и K_v получаем

$$U_m''(J) > 0, \forall J > 0. \quad (20)$$

Неравенство подтверждает, что $J \rightarrow U_m(J)$ есть выпуклое отображение на области $(0, +\infty)$. Здесь композиция U_m с $J = \det(\mathbf{F})$ означает, что $\mathbf{F} \rightarrow U_m(\det(\mathbf{F}))$ является поливыпуклым отображением.

Что касается второго члена $\check{W}_m^0$ в (16), то легко заметить, что это есть композиция (с точностью до константы) экспоненты (которая выпукла) и отображение $\check{P}_1^0 \rightarrow \alpha_1(\check{P}_1^0 - 3)$. Более точно:

$$\check{P}_1^0 = \text{tr}(J^{-2/3} \mathbf{F}^T \mathbf{F}) = J^{-2/3} \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = (\det(\mathbf{F}))^{-2/3} \|\mathbf{F}\|^2. \quad (21)$$

Далее вспомним Лемму С.1 из [17] и получим, что $\mathbf{F} \rightarrow \check{P}_1^0(\mathbf{F})$ поливыпукла. Суммируя U_m и $\check{W}_m^0$, получим, что $\mathbf{F} \rightarrow W_m(\mathbf{F}^T \mathbf{F})$ есть поливыпуклое отображение.

(Б) Далее докажем поливыпуклость отображения $\mathbf{F} \rightarrow W_f^i(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, a_0^i \otimes a_0^i)$ для W_f^i согласно (17). Как показано в (18), это есть функция структурного инварианта. Более детально

$$I_4^i := \text{tr}((\mathbf{F}^T \mathbf{F})^T (a_0^i \otimes a_0^i)) = \text{tr}((\mathbf{F}^T \mathbf{F})(a_0^i \otimes a_0^i)) \quad (22)$$

с учетом симметрии матрицы $\mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Вспоминая лемму С.2 (пункт 1) из [17], получаем, что $\mathbf{F} \rightarrow I_4^i(\mathbf{F})$ выпукла. Далее легко проверить, что $I_4^i \rightarrow W_f^i(I_4^i) \in \check{Y}$ есть гладкая функция и является производной второго порядка, так что

$$W_f^i(I_4^i)'' = \frac{C_4^i}{(\alpha_4^i)^2} \{[\alpha_4^i]^2 \exp[\alpha_4^i(I_4^i - 1)]\}. \quad (23)$$

Для $C_4^i > 0, \alpha_4^i > 0$ получим снова

$$W_f^i(I_4^i)'' = C_4^i \exp[\alpha_4^i(I_4^i - 1)] > 0, \quad \forall I_4^i \in \check{Y}. \quad (24)$$

И отсюда также вытекает условие выпуклости. Вспоминая лемму В.9 из [17], можно теперь сделать композицию монотонной, увеличивая (при $I_4^i \geq 1$), и выпуклой функцией $W_f^i \circ I_4^i$ как функцию от $\mathbf{F}$, получить выпуклость $\mathbf{F} \rightarrow W_f^i(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, a_0^i \otimes a_0^i)$. В случае $0 < I_4^i < 1$ (легко проверить, что это всегда положительно) сначала заметим следующее: если I_4^i достаточно близко к 1, то

$$D_{\mathbf{F}}^2 W_f^i; C_4^i D_{\mathbf{F}}^2 I_4^i, \quad (25)$$

что является полуположительно определенной функцией, и поэтому W_f^i выпукло. Для произвольного случая $0 < I_4^i < 1$ можно всегда сделать перемасштабирование $\delta(I_4^i - 1)$ при малом $\delta > 0$ так, что $D_{\mathbf{F}}^2 W_f^i$ становится полуположительно определенной функцией. Заметим, что такое преобразование может рассматриваться как перемасштабирование параметра $\alpha_4^i > 0$, который остается положительным; здесь можно сказать, что гиперупругая модель изменяется и соответствие между моделью и экспериментальными данными включает также перемасштабирование параметра α_4^i .

(В) Далее докажем выпуклость отображения $\mathbf{F} \rightarrow W_f^{ij}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, a_0^i \otimes a_0^j)$ для W_f^{ij} согласно (18). В частности, нужно изучить отображение $I_8^{ij} \rightarrow W_f^{ij}(I_8^{ij}, I_9^{ij}) = C_{89}^{ij} [I_8^{ij} - I_9^{ij}]^2$, где $I_8^{ij} = (a_0^i \cdot a_0^j) [\mathbf{F}^T \mathbf{F} : (a_0^i \otimes a_0^j)]$, причем $I_9^{ij} = (a_0^i \cdot a_0^j)^2$ не зависит от $\mathbf{F}$. Поэтому первое требование, чтобы $C_{89}^{ij} > 0$: поэтому $I_8^{ij} \rightarrow C_{89}^{ij} [I_8^{ij} - I_9^{ij}]^2$ выпукло. Кроме того,

$$I_8^{ij} = (a_0^i \cdot a_0^j) [\mathbf{F}^T \mathbf{F} : (a_0^i \otimes a_0^j)] = (a_0^i \cdot a_0^j) \text{tr}((\mathbf{F}^T \mathbf{F})(a_0^i \otimes a_0^j)). \quad (26)$$

Заметим, что $\text{tr}((\mathbf{F}^T \mathbf{F})(a_0^i \otimes a_0^j)) = \text{tr}((\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \cdot a_0^i \otimes a_0^j) = \langle (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) \cdot a_0^i, a_0^j \rangle$. Что дает

$$D_{\mathbf{F}}^2 I_8^{ij} \cdot (H, H) = \langle H, H a_0^i \otimes a_0^j \rangle. \quad (27)$$

(см. пример из [17]). Рассмотрим случай при $i = 1, j = 2$, для которого

$$a_0^1 \otimes a_0^2 = \begin{pmatrix} \sin(\beta) \cos(\beta) & \sin(\beta)^2 & 0 \\ \cos(\beta)^2 & \sin(\beta) \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Заметим, что

$$\det(a_0^1 \otimes a_0^2) = \det \begin{pmatrix} \sin(\beta) \cos(\beta) & \sin(\beta)^2 \\ \cos(\beta)^2 & \sin(\beta) \cos(\beta) \end{pmatrix} = 0, \quad (29)$$

а также $\sin(\beta) \cos(\beta) \geq 0$ при $0 \leq \beta \leq \pi/2$. Отсюда следует, что $a_0^1 \otimes a_0^2$ положительно полуопределено. В силу этих замечаний можно утверждать, что $\mathbf{F} \rightarrow I_8^{12}(\mathbf{F})$ есть выпуклое отображение. Такой же тип вычислений может быть проведен для I_8^{13}, I_8^{23} , и поэтому $\mathbf{F} \rightarrow I_8^{ij}(\mathbf{F})$ есть выпуклое отображение для любого $i < j \neq 4$. Поэтому композиция $I_8^{ij}(\mathbf{F})$ с монотонно растущей (при $I_8^{ij} \geq I_9^{ij}$) и выпуклой функцией

$C_{89}^{ij}[I_8^{ij} - I_9^{ij}]^2$ означает выпуклость $\mathbf{F} \rightarrow W_f^{ij}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}, a_0^i \otimes a_0^i)$. В случае $I_8^{ij} - I_9^{ij} < 0$ и $\mathbf{C}$ в диагональном виде легко проверить, что должно быть $-1 \leq I_8^{ij} - I_9^{ij} < 0$ (см. например [122] для $I_8^{13} - I_9^{13}$). В случае, когда $\mathbf{C}$ не обязательно диагональна, путем фиксации верхней границы для $\|\mathbf{C}\|$ (это физически резонно) можно получить $-L^{ij} \leq I_8^{ij} - I_9^{ij} < 0$ для некоторых $L^{ij} > 0$. Поэтому теперь можно применить те же аргументы, как сделано во второй части пункта (Б), путем подходящего перемасштабирования положительных конститутивных параметров C_{89}^{ij} . В случае I_8^{i4} при $i = 1, 2, 3$ имеется выпуклое отображение $\mathbf{F} \rightarrow I_8^{i4}(\mathbf{F})$ и требуется обсуждение проблемы, как было ранее для $I_8^{i4} < I_9^{i4}$ и затем для $I_8^{i4} > I_9^{i4}$. Это обеспечивает выпуклость W_f^{ij} в любом случае.

Определение 4.1.

При проведении вышеуказанных вычислений конститутивные параметры, удовлетворяющие условиям

$$K_v > 0, r > 0, C_1 > 0, \alpha_1 > 0, \quad (30)$$

$$C_4^i > 0, \alpha_4^i > 0, C_{89}^{ij} > 0, \pi/2 \geq \theta > 0, \quad (31)$$

гарантируют ответы физического типа для гиперупругой модели. Для этих целей определим

$$\omega = (K_v, r, C_1, \alpha_1, C_4^i, \alpha_4^i, C_{89}^{ij}, \theta) \in \check{Y}^N, \quad N = 19, \quad (32)$$

и

$$\Omega = \{(\omega_1 \dots \omega_N) = \omega \in \check{Y}^N \mid 0 < \bar{\omega}_i < \omega_i\}, \quad (33)$$

где $\bar{\omega}_i$ может быть фиксировано достаточно малым.

Как видно в предыдущем разделе, поведение физического типа модели гарантируется неограниченной областью Ω конститутивных параметров, даваемых определением 4.1. В этом разделе сначала изучим подмножество Ω , которое гарантирует ограниченность нормы $\|\mathbf{P}\|$, см. теорему 4.2. Позже можно локализовать меньшие подмножества конститутивных параметров в $\check{Y}^N$, которые связаны с общим возможным физическим поведением модели, см. теорему 4.4.

Чтобы достичь вышеуказанных целей, нужно выписать первый тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа через его различные элементы. Для $\mathbf{W}_m$, как в (16), тензор напряжений имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_m = 2\mathbf{F}\partial_C \mathbf{W}_m = & \frac{K_v}{2+r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ] \mathbf{F}^{-T} + \\ & + C_1 \exp[\alpha_1(\bar{P}_1^0 - 3)](2J^{-2/3} \mathbf{F} - 2/3 \bar{P}_1^0 \mathbf{F}^{-T}). \end{aligned} \quad (34)$$

Для $\mathbf{W}_j^i$ аналогично (17) тензор напряжений имеет вид

$$\mathbf{P}_j^i = 2\mathbf{F}\partial_C \mathbf{W}_j^i = 2 \frac{C_4^i}{\alpha_4^i} \{\exp[\alpha_4^i(\bar{P}_4^0 - 1)] - 1\} (\mathbf{F}(a_0^i \otimes a_0^i)). \quad (35)$$

Для $\mathbf{W}_f^{ij}$, как в (18), тензор напряжений выглядит как

$$\mathbf{P}_f^{ij} = 2\mathbf{F}\partial_C \mathbf{W}_f^{ij} = C_{89}^{ij} [I_8^{ij} - I_9^{ij}] (I_9^{ij})^{1/2} \mathbf{F}(a_0^i \otimes a_0^j + a_0^j \otimes a_0^i). \quad (36)$$

Теперь можно более детально рассказать о главных результатах этого раздела. Первый результат таков.

Теорема 4.2. Пусть Ω будет как в определении 4.1, пусть $\mathbf{F}_y$ при $y = 1, 2 \dots Y$ будет произвольным семейством градиентов деформации, фиксируем (большое) $\gamma > 0$. Тогда для $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_j^i, \mathbf{P}_f^{ij}$ как в (34) – (36). Тогда

$$\mathbf{B} = \{\omega \in \Omega \mid \|\mathbf{Q}(\mathbf{F}_y, \omega)\| < \gamma\} - \quad (37)$$

ограниченные открытые множества.

Замечание 4.3.

Ранее введенная величина γ берется достаточно большой, так что пересечение этих шести областей параметров будет непустым. Заметим, что если неравенство (37) верно, то для

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_m + \sum_{1 \leq i \leq 4} \mathbf{P}_j^i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} \mathbf{P}_f^{ij} \quad (38)$$

верно

$$\sup \|\mathbf{P}(\mathbf{F}_y, \omega)\| < 10\gamma. \quad (39)$$

Как показано в разделе 5, рассматриваются тензоры напряжений

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{\text{TC}} &:= \mathbf{P}_m + \mathbf{P}_f^1, \\ \mathbf{P}^{\text{HA}} &:= \mathbf{P}_m + \frac{S^{me}}{S_{\text{HA}}} \mathbf{P}_f^2 + \frac{S^{me}}{S_{\text{HA}}} [\mathbf{P}_f^3 + \mathbf{P}_f^4 + \mathbf{P}_f^{34}]. \end{aligned} \quad (40)$$

Можно также взять параметры из теоремы 4.2., чтобы гарантировать неравенство (39) для этих тензоров и констант $2\gamma, 5\gamma$. Что касается второго результата, имеется следующее.

Теорема 4.4. Пусть $p = \{p_{kl}^y\}$ задается условием

$$p_{kl}^y = \{\mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega) \in \check{Y} \mid \omega \in B\}. \quad (41)$$

Выберем произвольно $\chi_{kl} > 0$ и определим

$$\Lambda(p) := \bigcap_{1 \leq y \leq Y} \bigcap_{1 \leq k, l \leq 3} \{\omega \in B \mid \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega) \in (p_{kl}^y - \chi_{kl}, p_{kl}^y + \chi_{kl})\}. \quad (42)$$

Тогда $\Lambda(p)$ есть открытое множество и существует семейство $p(\alpha)$ при $\alpha = 1, 2, \dots, \hat{\alpha}$ такое, что $B_\alpha := \Lambda(p(\alpha))$ удовлетворяет условию

$$B = \bigcup_{\alpha=1}^{\hat{\alpha}} B_\alpha.$$

Доказательство теорем 4.2–4.4 приведено в приложении к статье.

Подчеркнем, так как B_α – открытое подмножество, всегда можно сделать единственную декомпозицию

$$B_\alpha = B_\alpha(1) \cup B_\alpha(2) \cup \dots \cup B_\alpha(K_\alpha), \quad (43)$$

где $B_\alpha(1), B_\alpha(2), \dots, B_\alpha(K_\alpha)$ – непересекающиеся открытые и связанные компоненты. Как можно будет увидеть в следующем разделе, такая декомпозиция есть важный инструмент, чтобы ввести характерное понятие конститутивных параметров.

Множество конститутивных параметров

В этом разделе представлены выкладки о понятии множества конститутивных параметров, которое связано с гиперупругой моделью, введенной в разделе (3).

Теорема 4.5. Пусть $B \subset \check{Y}^N$ будет как в теореме 4.4. Определим

$$B := \bigcup_{\alpha=1}^{\hat{\alpha}} B_\alpha^c, \quad (44)$$

где любое B_α^c соответствует $B_\alpha(1)$, или $B_\alpha(2), \dots$, или $B_\alpha(K_\alpha)$. Тогда B является дифференциальным множеством с размерностью N .

Вследствие геометрической картины, описанной теоремой 4.5, теперь можно локализовать $\hat{\alpha}$ различных тканей и соответствующие окрестности материальных параметров B_α^c , представляемых различными физическими величинами в $B_\alpha(1)$, или $B_\alpha(2), \dots$, или $B_\alpha(K_\alpha)$. Таким образом, можно сказать, что данная гиперупругая модель работает для $\hat{\alpha}$ тканей, и назовем B множеством конститутивных параметров, характерных для гиперупругой модели.

Замечание 4.6.

Пусть $\phi: \check{Y}^N \rightarrow \check{Y}^N$ есть дифференцируемое однозначное отображение, такое что $\phi(\Omega) = \Omega$ – сохраняемое свойство поливыпуклости. Новая функция энергии деформации есть $W(\mathbf{F}, \phi(\omega))$, и поэтому новый тензор напряжений есть $\mathbf{P}(\mathbf{F}, \phi(\omega))$. Как следствие, область, даваемая теоремой 4.2, становится $\phi(B)$. В самом деле, в случае перемасштабирования $\phi(\omega) := L\omega$ для фиксированной $L > 0$. В случае, когда представляет интерес частная ткань и потому рассматривается $W(\mathbf{F}, \omega)$ только для $\omega \in B_\alpha$ при некотором фиксированном α , можно определить только локальное перемасштабирование на $B_\alpha(1)$, или $B_\alpha(2), \dots$, или $B_\alpha(K_\alpha)$. Очень важно подогнать шкалу модели относительно введенных физических величин.

Вышеуказанные теоремы 4.4 и 4.5 могут быть доказаны для семейства гиперупругих моделей, включая модель, описанную в статье: необходимо просто вернуть ту же регулярность и аналитические свойства (относительно инвариантов и параметров) тензоров напряжений. Кроме того, подчеркнем, что более детальное описание локализации областей материальных параметров, связанных с частью кривой напряжение–деформация, может быть получено путем численного изучения, как это показано в разделе 5. Проблема единственности параметров может быть обсуждена путем рассмотрения ряда (больше, чем 1, или иначе) таких областей, возникающих из-за этого приближения. В соответствии с численным изучением параметров дальнейшие работы теперь проводятся исследовательской группой.

5. БОЛЕЕ ПОДРОБНОЕ РАССМОТРЕНИЕ ПРИЛОЖЕНИЙ

Обращая внимание на приложения к кишечным тканям и соответствующие экспериментальные данные, указанные в [3], рассмотрим следующие тензоры:

$$\mathbf{P}^{TC} = \mathbf{P}_m + \mathbf{P}_f^1 \quad (45)$$

и

$$\mathbf{P}^{HA} = \mathbf{P}_m + \frac{s^{me}}{s^{HA}} \mathbf{P}_f^2 + \frac{s^{me}}{s^{HA}} [\mathbf{P}_f^3 + \mathbf{P}_f^4 + \mathbf{P}_f^{34}], \quad (46)$$

где s^{me} , s^{HA} – положительные константы. Различные образцы изготовлены из тканей толстой кишки (ТС–образцы) и ободочной кишки (НА–образцы). В частности – они соответствуют по толщине наружным мышцам и слоям под слизистой оболочкой ободочной кишки.

В этом разделе предполагается, что $\mathbf{F}$ симметрична и имеет диагональный вид, а именно

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Отсюда следует, что $\mathbf{P}_m$ также имеет диагональный вид

$$\mathbf{P}_m = \begin{pmatrix} (\mathbf{P}_m)_{11} & 0 & 0 \\ 0 & (\mathbf{P}_m)_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{P}_m)_{33} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

где

$$(\mathbf{P}_m)_{11} = f_1 + g_1 \quad (49)$$

и

$$f_1 = \frac{K_v \lambda_L^{-1}}{2 + r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ],$$

$$g_1 = C_1 \exp[\alpha_1 (\rho_1 - 3)] (2J^{-2/3} \lambda_L - \frac{2}{3} \rho_1 \lambda_L^{-1}).$$

Аналогично другие слагаемые имеют вид

$$(\mathbf{P}_m)_{22} = f_2 + g_2. \quad (50)$$

Тензор $(\mathbf{P}_m)_{22}$ также симметричный и диагональный,

$$f_2 = \frac{K_v \lambda_T^{-1}}{2 + r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ],$$

$$g_2 = C_1 \exp[\alpha_1 (\rho_1 - 3)] (2J^{-2/3} \lambda_T - \frac{2}{3} \rho_1 \lambda_T^{-1}),$$

также

$$(\mathbf{P}_m)_{33} = f_3 + g_3 \quad (51)$$

и

$$f_3 = \frac{K_v \lambda_K^{-1}}{2+r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ],$$

$$g_3 = C_1 \exp[\alpha_1(I_1^0 - 3)] (2J^{-2/3} \lambda_K - \frac{2}{3} I_1^0 \lambda_K^{-1}).$$

Тензор $\mathbf{P}_f^i$ также симметричный и диагональный:

$$\mathbf{P}_f^i = 2 \frac{C_4^i}{\alpha_4^i} \{ \exp[\alpha_4^i(I_4^0 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix} (\mathbf{a}_0^i \otimes \mathbf{a}_0^i). \quad (52)$$

Тензор $\mathbf{P}_f^i$ при $i = 1$ выглядит следующим образом:

$$\mathbf{P}_f^1 = 2 \frac{C_4^1}{\alpha_4^1} \{ \exp[\alpha_4^1(I_4^0 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\beta)^2 & \sin(\beta)\cos(\beta) & 0 \\ \sin(\beta)\cos(\beta) & \cos(\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Простое вычисление дает

$$\mathbf{P}_f^1 = 2 \frac{C_4^1}{\alpha_4^1} \{ \exp[\alpha_4^1(I_4^0 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L \sin(\beta)^2 & \lambda_L \sin(\beta)\cos(\beta) & 0 \\ \lambda_T \sin(\beta)\cos(\beta) & \lambda_T \cos(\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

С помощью выражений (48) и (54) явно определяется вид тензора $\mathbf{P}^{TC}$. В частности, здесь интересны два первых члена на диагонали, которые представляют собой экспериментальные данные по ткани ободочной кишки, описанные в [3].

Первый член имеет вид

$$(\mathbf{P}^{TC})_{11} = \frac{K_v \lambda_L^{-1}}{2+r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ] + C_1 \exp[\alpha_1(I_1^0 - 3)] (2J^{-2/3} \lambda_L - \frac{2}{3} I_1^0 \lambda_L^{-1}) +$$

$$+ 2 \frac{C_4^1}{\alpha_4^1} \{ \exp[\alpha_4^1(I_4^0 - 1)] - 1 \} \lambda_L \sin(\beta)^2. \quad (55)$$

Второй член имеет вид

$$(\mathbf{P}^{TC})_{22} = \frac{K_v \lambda_T^{-1}}{2+r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ] + C_1 \exp[\alpha_1(I_1^0 - 3)] (2J^{-2/3} \lambda_T - \frac{2}{3} I_1^0 \lambda_T^{-1}) +$$

$$+ 2 \frac{C_4^1}{\alpha_4^1} \{ \exp[\alpha_4^1(I_4^0 - 1)] - 1 \} \lambda_L \cos(\beta)^2. \quad (56)$$

Что касается конститутивных параметров $\mathbf{P}^{TC}$, то определяем их в виде

$$\omega^{TC} = (K_v, r, \alpha_1, C_1, \alpha_4^1, C_4^1) \in \check{Y}^6. \quad (57)$$

Далее обратим внимание на $\mathbf{P}^{HA}$ и для этого запишем $\mathbf{P}_f^2, \mathbf{P}_f^3, \mathbf{P}_f^4, \mathbf{P}_f^{34}$. Вспоминая (52), можно написать

$$\mathbf{P}_f^2 = 2 \frac{C_4^2}{\alpha_4^2} \{ \exp[\alpha_4^2 (P_4^2 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta)^2 & \sin(\beta)\cos(\beta) & 0 \\ \sin(\beta)\cos(\beta) & \sin(\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (58)$$

что дает

$$\mathbf{P}_f^2 = 2 \frac{C_4^2}{\alpha_4^2} \{ \exp[\alpha_4^2 (P_4^2 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L \cos(\beta)^2 & \lambda_L \sin(\beta)\cos(\beta) & 0 \\ \lambda_T \sin(\beta)\cos(\beta) & \lambda_T \sin(\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

В случае, когда $i = 3$

$$\mathbf{P}_f^3 = 2 \frac{C_4^3}{\alpha_4^3} \{ \exp[\alpha_4^3 (P_4^3 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta - \theta)^2 & \frac{1}{2} \sin 2(\beta - \theta) & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2(\beta - \theta) & \sin(\beta - \theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

что дает

$$\mathbf{P}_f^3 = 2 \frac{C_4^3}{\alpha_4^3} \{ \exp[\alpha_4^3 (P_4^3 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L \cos(\beta - \theta)^2 & \lambda_L \frac{1}{2} \sin 2(\beta - \theta) & 0 \\ \lambda_T \frac{1}{2} \sin 2(\beta - \theta) & \lambda_T \sin(\beta - \theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

В случае, когда $i = 4$:

$$\mathbf{P}_f^4 = 2 \frac{C_4^4}{\alpha_4^4} \{ \exp[\alpha_4^4 (P_4^4 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta + \theta)^2 & \frac{1}{2} \sin 2(\beta + \theta) & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2(\beta + \theta) & \sin(\beta + \theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (62)$$

что дает

$$\mathbf{P}_f^4 = 2 \frac{C_4^4}{\alpha_4^4} \{ \exp[\alpha_4^4 (P_4^4 - 1)] - 1 \} \begin{pmatrix} \lambda_L \cos(\beta + \theta)^2 & \lambda_L \frac{1}{2} \sin 2(\beta + \theta) & 0 \\ \lambda_T \frac{1}{2} \sin 2(\beta + \theta) & \lambda_T \sin(\beta + \theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Касательно $\mathbf{P}_f^{34}$ напомним, что

$$\mathbf{P}_f^{34} = C_{89}^{34} [I_8^{34} - I_9^{34}] (I_9^{34})^{1/2} \mathbf{F}(a_0^3 \otimes a_0^4 + a_0^4 \otimes a_0^3). \quad (64)$$

Инварианты здесь имеют вид

$$I_9^{34} = [\cos(\beta + \theta)\cos(\beta - \theta) + \sin(\beta + \theta)\sin(\beta - \theta)]^2 = [\cos(2\beta)]^2 \quad (65)$$

и

$$I_8^{34} = -[\cos(2\beta)]^2 [\lambda_L^2 \cos(\beta + \theta)\cos(\beta - \theta) + \lambda_L^2 \sin(\beta + \theta)\sin(\beta - \theta)]. \quad (66)$$

Кроме того,

$$a_0^3 \otimes a_0^4 + a_0^4 \otimes a_0^3 = A + B, \quad (67)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (68)$$

с элементами

$$Q_{11} = \cos(\beta + \theta)\cos(\beta - \theta), \quad (69)$$

$$Q_{12} = -\cos(\beta + \theta)\sin(\beta + \theta), \quad (70)$$

$$Q_{21} = \sin(\beta - \theta)\cos(\beta + \theta), \quad (71)$$

$$Q_{22} = \sin(\beta + \theta)\sin(\beta - \theta) \quad (72)$$

и

$$R_{11} = \cos(\beta + \theta)\cos(\beta - \theta), \quad (73)$$

$$R_{12} = -\cos(\beta + \theta)\sin(\beta - \theta), \quad (74)$$

$$R_{21} = \sin(\beta + \theta)\cos(\beta - \theta), \quad (75)$$

$$R_{22} = \sin(\beta + \theta)\sin(\beta - \theta). \quad (76)$$

После некоторых вычислений получаем компоненты $Q + R$:

$$(Q + R)_{11} = -2\cos(\beta + \theta)\cos(\beta - \theta), \quad (77)$$

$$(Q + R)_{12} = \cos(\beta + \theta)2\sin \beta \sin \theta, \quad (78)$$

$$(Q + R)_{21} = \cos(\beta + \theta)2\sin \beta \sin \theta, \quad (79)$$

$$(Q + R)_{22} = -2\sin(\beta - \theta)\sin(\beta + \theta). \quad (80)$$

Тогда матрица

$$\mathbf{F}(a_0^3 \otimes a_0^4 + a_0^4 \otimes a_0^3) = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \quad (81)$$

имеет компоненты

$$\Gamma_{11} = -2\lambda_L \cos(\beta + \theta) \cos(\beta - \theta), \quad (82)$$

$$\Gamma_{12} = \lambda_L \cos(\beta + \theta) 2 \cos \beta \sin \theta, \quad (83)$$

$$\Gamma_{21} = \lambda_T \cos(\beta + \theta) 2 \cos \beta \sin \theta, \quad (84)$$

$$\Gamma_{22} = -2\lambda_T \sin(\beta - \theta) \sin(\beta + \theta). \quad (85)$$

Здесь представляют интерес диагональные члены (которые являются экспериментальными данными в [3]), поэтому имеем

$$(P_f^{34})_{11} = -C_{89}^{34} [I_8^{34} - I_9^{34}] (I_9^{34})^{1/2} 2\lambda_L \cos(\beta + \theta) \cos(\beta - \theta) \quad (86)$$

и

$$(P_f^{34})_{22} = -C_{89}^{34} [I_8^{34} - I_9^{34}] (I_9^{34})^{1/2} 2\lambda_T \sin(\beta - \theta) \sin(\beta + \theta). \quad (87)$$

В частности, заметим, что

$$I_8^{34} - I_9^{34} = [\cos(2\theta)]^2 (1 + \lambda_L^2 \cos(\beta + \theta) \cos(\beta - \theta) + \lambda_T^2 \sin(\beta - \theta) \sin(\beta + \theta)), \quad (88)$$

где $0 \leq \beta, 0 \leq \frac{\pi}{2}$ и $I_8^{34} - I_9^{34} \geq 0$.

Относительно конститутивных параметров имеем $\mathbf{P}^{HA}$

$$\omega = (K_v, r, \alpha_1, C_1, \alpha_4^i, C_4^i, C_{89}^{34}) \in \check{Y}^{12}, \quad (89)$$

где $i = 2, 3, 4$.

Касательно модели, связанной с $\mathbf{P}^{TC}$, можно сослаться на экспериментальные кривые, указанные в [3]. Для соответствующего семейства градиентов деформации $\{\mathbf{F}_y : 1 \leq y \leq Y\}$ обозначим g_y как среднюю величину множества экспериментальных данных, вызываемую деформацией $\mathbf{F}_y$, которые получаются на данном образце. Тогда получим вектор ω^{TC} , который минимизирует целевую функцию

$$\sigma(\omega, y) = \frac{1}{Y} \sum_{y=1}^Y \left| 2 - \frac{g_y}{\mathbf{P}_{11}^{TC}(\mathbf{F}_y, \omega)} - \frac{\mathbf{P}_{11}^{TC}(\mathbf{F}_y, \omega)}{g_y} \right|^2. \quad (90)$$

Величину σ нужно восстановить путем данной минимизации, связанной с величиной χ_{kl} для $k, l = 1$, содержащейся в теореме 4.4. Требуется, чтобы σ было достаточно мало, так, чтобы выполнялись любые включения в (42). Это может быть сделано с помощью стохастически детерминированного алгоритма, кратко обсужденного выше и используемого также для аналогичных моделей в работе [16], например. Такое вычисление показывает, что величины K, C_1, C_4^1 выражены в МПа, а другие параметры безразмерны.

В соответствии с минимизацией целевой функции (90) единственная выпуклая область параметров $\omega \in \check{Y}^6$ вокруг вектора ω^{TC} может быть локализована следующим образом:

$$\sigma(\omega, y) \leq \sigma(\omega^{TC}, y). \quad (91)$$

Материальные параметры ω^{TC} : $K_v = 88,75$; $r = 71,59$; $\alpha_1 = 0,81$; $C_1 = 0,02$; $\alpha_4^1 = 7,47$; $C_4^1 = 0,01$.

В этом случае никакие другие непересекающиеся области параметров не обнаруживаются, и поэтому наблюдается единственность параметров. Это означает, что необходимо изобразить двумерные области всех 15 возможных пар параметров и выбрать их так, чтобы они были выпуклы.

В отношении теоремы 4.4 это означает, что неравенство (91) дает способ явно вычислить область, содержащую область $B = B_1(1)$, и что описывается только одна ткань и имеется окрестность параметров вокруг ранее вычисленной ω^{TC} . Аналогичные результаты могут быть указаны для случая $\mathbf{P}^{HA}$ с соответствующим единственным вектором $\omega^{HA} \in \check{Y}^{12}$ вплоть до (малой) окружающей области.

6. ПРИЛОЖЕНИЕ

6.1. Дифференциальные множества

Структура множества B соответствует дифференцируемому множеству [1], если образуется множеством счетного или конечного набора таблиц так, что каждая точка проставляется по крайней мере в одной таблице. Таблица – это открытое множество U в евклидовом координатном пространстве $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ вместе с обозначенным отображением φ из U в некоторое подмножество B , т.е. $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset B$. Предполагаем, что если точки p и p' в двух таблицах U и U' имеют одинаковые образы в B , то p и p' имеют окрестности $V \subset U$ и $V' \subset U'$ с одинаковым изображением в B . Таким путем получим отображение $(\varphi')^{-1} \circ \varphi: V \rightarrow V'$. Это есть отображение области V в евклидовом пространстве q на область V' в евклидовом пространстве q' , и это делается с помощью n функций n переменных $q' = q'(q)$ (соответственно $q = q(q')$). Таблицы U и U' называются совместными, если эти функции дифференцируемы. Атлас есть собрание совместных таблиц, и два атласа эквивалентны, если их объединение также атлас.

Вследствие вышеуказанных постановок можно сказать, что дифференциальное множество есть класс эквивалентных атласов. В случае связных множеств число будет одинаково для всех таблиц, и называется оно размерностью множества. Окрестность точки множества есть образ отображения $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset B$ окрестности представления этой точки на таблицу U . Предположим, что две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

6.2. Доказательство

В этом разделе приведено доказательство основных результатов, указанных в разделе 4.

Доказательство теоремы 4.3. Вначале вспомним, что

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_m + \sum_{1 \leq i \leq 4} \mathbf{P}_j^i + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 4} \mathbf{P}_f^{ij}. \quad (92)$$

Выберем параметр $\omega \in \Omega$ так, чтобы для $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_m, \mathbf{P}_j^i$ или $\mathbf{P}_f^{ij}$ выполнялось следующее неравенство:

$$\sup_{1 \leq y \leq Y} \|\mathbf{Q}(\mathbf{F}_y, \omega)\| < \gamma, \quad (93)$$

которое верно для произвольного семейства градиентов деформации $\mathbf{F}_y$ и произвольных векторов a_0^i . Как частный выбор в данных вычислениях возьмем

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (94)$$

и $\beta = 0$ для

$$a_0^1 = (\sin(\beta), \cos(\beta), 0) = (0, 1, 0), \quad (95)$$

$$a_0^2 = (\cos(\beta), \sin(\beta), 0) = (1, 0, 0), \quad (96)$$

$$a_0^3 = (\cos(\beta - \theta), \sin(\beta - \theta), 0) = (\cos(\theta), -\sin(\theta), 0), \quad (97)$$

$$a_0^4 = (-\cos(\beta + \theta), \sin(\beta + \theta), 0) = (-\cos(\theta), -\sin(\theta), 0). \quad (98)$$

Вследствие этих формул инварианты имеют вид $J = \lambda_T$ и $I_1^0 = \lambda_T^{-2/3}(2 + \lambda_T^2)$. Выберем $0 < \lambda_T < 1$ так, что $J^{-1} > 1$. Далее изучим поведение тензора напряжений относительно параметров и $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1$. Для этой цели вспомним, что

$$\mathbf{P}_m = \frac{K_v}{2 + r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ] \mathbf{F}^{-T} + C_1 \exp[\alpha_1(I_1^0 - 3)] (2J^{-2/3} \mathbf{F} - \frac{2}{3} I_1^0 \mathbf{F}^{-T}). \quad (99)$$

Тензор $E = 2J^{-2/3} \mathbf{F} - \frac{2}{3} I_1^0 \mathbf{F}^{-T}$ является диагональным, и его компоненты имеют вид

$$E_{11} = 2\lambda_T^{-2/3} - \frac{2}{3} \lambda_T^{-2/3} (2 + \lambda_T^2), \quad (100)$$

$$E_{22} = 2\lambda_T^{1/3} - \frac{2}{3} \lambda_T^{-5/3} (2 + \lambda_T^2), \quad (101)$$

$$E_{33} = E_{11}. \quad (102)$$

Заметим, что для достаточно малого $0 < \lambda_T < 1$ имеет место

$$E_{22} < 0. \quad (103)$$

Теперь вспомним, что $K_v > 0$, и поэтому

$$\frac{K_v}{2 + r(r+1)} [2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ] \lambda_T^{-1} \rightarrow -\infty \quad (104)$$

при $r \rightarrow +\infty$. Далее учтем, что для любого $K_v > 0$ выполняется

$$(\mathbf{P}_m)_{22} \rightarrow -\infty \text{ при } r \rightarrow +\infty. \quad (105)$$

Далее, если r достаточно велико и $2J(J-1) - rJ^{-r} + rJ < 0$ для любого $C_1 > 0$, то получаем

$$(\mathbf{P}_m)_{22} \rightarrow -\infty \text{ при } K_v \rightarrow +\infty. \quad (106)$$

Аналогично для r , как указано выше, и для любого $K_v > 0$

$$(\mathbf{P}_m)_{22} \rightarrow -\infty \text{ при } C_1 \rightarrow +\infty. \quad (107)$$

Чтобы закончить эту первую часть доказательства, вспомним, что на функцию наложены произвольные (малые) границы $0 < \bar{C}_1 < C_1$ и $0 < \bar{K}_v < K_v$. Следовательно, если предположить, что $\|\mathbf{P}_m\|$ ограничено (и поэтому ограничено также $(\mathbf{P}_m)_{22}$), то вышеуказанные расходящиеся границы обеспечивают, что (K_v, r, C_1) лежит в ограниченной области $\check{Y}^3$. Теперь обратим внимание на $\mathbf{P}_f^i$:

$$\mathbf{P}_f^i = 2\mathbf{F}\partial_C \mathbf{W}_f^i = 2 \frac{C_4^i}{\alpha_4^i} \{ \exp[\alpha_4^i (I_4^i - 1)] - 1 \} (\mathbf{F}(a_0^i \otimes a_0^i)), \quad (108)$$

где $I_4^i = \text{tr}((\mathbf{F}^T \mathbf{F})(a_0^i \otimes a_0^i))$. Из равенства

$$a_0^i \otimes a_0^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (109)$$

имеем непосредственно

$$\mathbf{F}(a_0^i \otimes a_0^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (110)$$

и аналогичным образом

$$\mathbf{F}^T \mathbf{F}(a_0^i \otimes a_0^i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Это дает $I_4^1 = \lambda_T^2$. Из $\lambda_T > 0$ следует, что $I_4^1 > 0$, и тогда

$$(\mathbf{P}_f^1)_{22} = 2 \frac{C_4^1}{\alpha_4^1} \{ \exp[\alpha_4^1 (I_4^1 - 1)] - 1 \} \lambda_T \quad (112)$$

выполняется для любого фиксированного $C_4^1 > 0$,

$$(\mathbf{P}_f^1)_{22} \rightarrow +\infty \text{ при } \alpha_4^1 \rightarrow +\infty, \quad (113)$$

и для всех $\alpha_4^1 > 0$

$$(\mathbf{P}_f^1)_{22} \rightarrow +\infty \text{ при } C_4^1 \rightarrow +\infty. \quad (114)$$

Теперь предположим, что (малые) нижние границы $0 < \bar{C}_4^1 < C_4^1$ и $0 < \bar{\alpha}_4^1 < \alpha_4^1$. Из предположения ограничения $\|\mathbf{P}_f^1\|$ следует, что (C_4^1, α_4^1) принадлежит ограниченной области $\check{Y}^2$. Легко увидеть, что аналогичные величины для $\mathbf{P}_f^2, \mathbf{P}_f^3, \mathbf{P}_f^4$ и ограничение для (C_4^i, α_4^i) при $i = 2, 3, 4$ могут быть получены.

Теперь посмотрим на $\mathbf{P}_f^{ij}$:

$$\mathbf{P}_f^{ij} = C_{89}^{ij} [I_8^{ij} - I_9^{ij}] (I_9^{ij})^{1/2} \mathbf{F}(a_0^i \otimes a_0^j + a_0^j \otimes a_0^i), \quad (115)$$

где

$$I_8^{ij} = (a_0^i \cdot a_0^j) \text{tr}((F^T F)(a_0^i \otimes a_0^j)), \quad (116)$$

$$I_9^{ij} = (a_0^i \cdot a_0^j)^2. \quad (117)$$

Прямое вычисление показывает, что $a_0^1 \cdot a_0^2 = 0$, и поэтому $I_9^{12} = 0$, что дает

$$\mathbf{P}_f^{12} = 0. \quad (118)$$

Чтобы вычислить $\mathbf{P}_f^{13} = 0$, обратим внимание на

$$a_0^1 \otimes a_0^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (119)$$

и

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{F})(a_0^1 \otimes a_0^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_T^2 \cos(\theta) & -\lambda_T^2 \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_8^{ij} - I_9^{ij} &= (a_0^1 \cdot a_0^3) [\text{tr}((\mathbf{F}^T \mathbf{F})(a_0^1 \otimes a_0^3)) - a_0^1 \cdot a_0^3] = \\ &= -\sin(\theta) [-\lambda_T^2 \sin(\theta) + \sin(\theta)] = \end{aligned} \quad (121)$$

$$= -\sin^2(\theta) [-\lambda_T^2 + 1] < 0 \quad (122)$$

при $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и $\lambda_T < 1$. Кроме того,

$$a_0^3 \otimes a_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (123)$$

и

$$a_0^1 \otimes a_0^3 + a_0^3 \otimes a_0^1 = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & -2\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (124)$$

и

$$\mathbf{F}(a_0^1 \otimes a_0^3 + a_0^3 \otimes a_0^1) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(\theta) & 0 \\ \lambda_T \cos(\theta) & -2\lambda_T \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Это дает

$$(\mathbf{P}_f^{13})_{22} = C_{89}^{ij} \sin^2(\theta) [-\lambda_T^2 + 1] \sin(\theta) 2\lambda_T \sin(\theta), \quad (126)$$

что показывает неотрицательность для всех $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и $\lambda_T < 1$. Это непосредственно означает, что если $\|(\mathbf{P}_f^{13})_{22}\|$ ограничено, то и $|(\mathbf{P}_f^{13})_{22}|$ и C_{89}^{13} должно быть ограничено. Что касается других констант C_{89}^{ij} , то легко показать, что для подходящих градиентов деформации всегда существует хотя бы один матричный член $\mathbf{P}_f^{ij}$, который не исчезает. Поэтому ограничение $\|\mathbf{P}_f^{ij}\|$ означает ограничение C_{89}^{ij} .

Доказательство теоремы 4.4

Сначала заметим, что отображение $\omega \rightarrow \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega)$ есть непрерывная функция от $B \subset \Omega \subset \check{Y}^N$ для любого фиксированного $1 \leq k, l \leq 3$ и любого фиксированного $1 \leq y \leq Y$. В самом деле, если имеется последовательность $\omega_n \rightarrow \omega$ ($n \in \Gamma$), то $\mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega_n) \rightarrow \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega)$. Можно определить $\zeta_\varepsilon = \varepsilon \check{Y}^N \cap B$. Это ведет к пределу.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \inf_{\omega \in B, \hat{\omega} \in \zeta_\varepsilon} |\mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \hat{\omega}) - \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega)| = 0. \quad (127)$$

Теперь определим $\bar{\chi} = \min_{1 \leq k, l \leq 3} \chi_{kl}$. Из (127) следует, что существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, при котором $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Это дает

$$\inf_{\omega \in B, \hat{\omega} \in \zeta_\varepsilon} |\mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \hat{\omega}) - \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega)| \leq \bar{\chi}, \quad (128)$$

а также

$$\inf_{\omega \in B, \hat{\omega} \in \zeta_\varepsilon} |\mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \hat{\omega}) - \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega)| \leq \chi_{kl}. \quad (129)$$

Теперь можно взять $\varepsilon > 0$ достаточно малым (т.е. меньше, чем ε_0) и параметры ω в конечной близости точек и фиксированного $p_{kl}^y(\alpha)$ как величины $p_{kl}^y(\alpha) = \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega)$, где α есть целое число, обозначающее все узлы $\omega \in \zeta_\varepsilon$. Так как B ограничено, то такое число имеет верхнюю границу, а именно существует такое $\hat{\alpha} \in \Gamma$, что $1 \leq \alpha \leq \hat{\alpha}$.

Теперь заметим, что для

$$p_{kl}^y \in \{\mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega) \in \check{Y} \mid \omega \in B\} \quad (130)$$

и

$$\Lambda(p) = \bigcap_{1 \leq y \leq Y} \bigcap_{1 \leq k, l \leq 3} \{\omega \in B \mid \mathbf{P}_{kl}(\mathbf{F}_y, \omega) \in (p_{kl}^y - \chi_{kl}, p_{kl}^y + \chi_{kl})\} \quad (131)$$

при $p = \{p_{kl}^y\}$, как в (130), имеет место

$$B = \bigcup_p \Lambda(p). \quad (132)$$

Вследствие определения χ_{kl} и благодаря соотношениям (128)–(132) можно заключить, что

$$B = \bigcup_{\alpha=1}^{\hat{\alpha}} \Lambda(p(\alpha)). \quad (133)$$

Доказательство теоремы 4.5

Вспомним определение дифференцируемого множества и обозначим эквивалентность атласа как

$$B = \bigcup_{\alpha=1}^{\hat{\alpha}} B_{\alpha}^c, \quad (134)$$

где любое B_{α}^c соответствует его различным локальным представлениям посредством $B_{\alpha}(1)$ или $B_{\alpha}(K_{\alpha})$. Для этого таблицы U являются данными для любого α посредством $B_{\alpha}(1)$ или $B_{\alpha}(K_{\alpha})$ и идентичны отображением $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset B$. В заключение, так как любое $B_{\alpha} \subset \check{Y}^N$, то размерность множества есть N .

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы декларируют отсутствие конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold V.I. Mathematical methods of classical mechanics. graduate studies in mathematics 60. – Berlin: Springer Verlag, 1978.
2. Avril S., Evans S., Miller K. Inverse problems and material identification in tissue biomechanics // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2013. – Vol. 27., special issue.
3. Carniel E.L., Gramigna V., Fontanella C.G., Stefanini C., Natali A.N. Constitutive formulations for the mechanical investigation of colonic tissues // J. Biomed. Mater. Res. A. – 2014. – № 102(5). – P. 1243–1254.
4. Corana A., Marchesi N., Martini C., Ridella S. Minimizing multimodal functions of continuous variables with the simulated annealing algorithm // ACM Transaction on Mathematical Software. – 1987. – Vol. 13 (3). – P. 262–280.
5. Cowin S.C., Doty S.B. Tissue mechanics. – New York: Springer Science and Business Media, 2007.
6. Criscione J.C., Humphrey J.D., Douglas A.S., Hunter W.C. An invariant basis for natural strain which yields orthogonal stress response terms inisotropic hyperelasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2000. – № 48. – P. 2445–2465.
7. Criscione J.C., Douglas A.S., Hunter W.C. Physically based strain in-variant set for materials exhibiting transversely isotropic behavior // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2001. – № 49. – P. 871–897.
8. Dubuis L., Avril S., Debayle J., Badel P. Identification of the material parameters of soft tissues in the compressed leg // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2012. – Vol. 15(1). – P. 3–11.
9. Geerligs M., van Breemen L.C.A., Peters G.W.M., Ackermans P.A.J., Baaijens F.P.T., Oomens C.W.J. In vitro indentation to determine the mechanical properties of epidermis // Journal of Biomechanics. – 2011. – Vol. 44.
10. Holzapfel G.A. Nonlinear solid mechanics. – New York: Wiley, 2000.
11. Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models // J. Elast. – 2000. – Vol. 61. – P. 1–48.
12. Humphrey J.D. Review paper: Continuum biomechanics of soft biological tissues // Proceedings of Royal Society London. – 2003. – Vol. 459, № 2029. – P. 3–46.
13. Itskov M., Askel N. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function // International Journal of Solids and Structures. – 2004. – Vol. 41. – P. 3833–3848.
14. Maas S.A., Ellis B.J., Ateshian G.A., Weiss J.A. FEBio. Finite elements for biomechanics // Journal of Biomechanical Engineering. – 2012. – Vol. 134. – P. 13–21.
15. Marsden J.E., Hughes J.R. Mathematical foundations of elasticity. – New Jersey: Prentice-Hall, 1983.
16. Natali A.N., Carniel E.L., Pavan P., Dario P., Izzo I. Hyperelastic models for the analysis of soft tissue mechanics: definition of constitutive parameters // Biomedical Robotics and Biomechatronics. – 2006.

17. Schröder J., Neff P. Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – Vol. 40, № 2. – P. 401–445.
18. Schröder J., Neff P., Balzani D. A variational approach for materially stable anisotropic hyperelasticity // International Journal of Solids and Structures. – 2005. – Vol. 42. – P. 4352–4371.
19. Schröder J., Neff P., Holzapfel G.A., Balzani D. A Polyconvex framework for soft biological tissues. Adjustment to experimental data // International Journal of Solids and Structures. – 2006. – Vol. 43. – P. 6052–6070.
20. Schröder J., Neff P. Poly-, quasi- and rank-one convexity in applied mechanics. – New York: Springer, 2010. – P. 301.
21. Sendova T., Walton J.R., On strong ellipticity for isotropic hyperelastic materials based upon logarithmic strain // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2005. – Vol. 40. – P. 195–212.
22. Steigmann D.J. Frame-invariant polyconvex strain-energy functions for some anisotropic solids // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2003. – Vol. 8. – P. 497–506.
23. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics. – Berlin: Springer-Verlag, 2004.
24. Vincent J. Structural biomaterials. – Princeton: University Press, 2012.
25. Walton J.R., Wilber J.P. Sufficient conditions for strong ellipticity for a class of anisotropic materials // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2003. – Vol. 38. – P. 441–455.
26. Wilber J.P., Walton J.R., The convexity properties of a class of constitutive models for biological soft tissues // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2002. – Vol. 7. – P. 217–235.

ON THE DETERMINATION OF CONSTITUTIVE PARAMETERS IN A HYPERELASTIC MODEL FOR A SOFT TISSUE

**L. Zanelli, A. Montanaro, E.L. Carniel,
P.G. Pavan, A.N. Natali (Padova, Italy)**

The aim of this paper is to study a model of hyperelastic materials and its applications into soft tissue mechanics. In particular, we first determine an unbounded domain of the constitutive parameters of the model making our smooth strain energy function to be polyconvex and hence satisfying the Legendre–Hadamard condition. Thus, physically reasonable material behaviour are described by our model with these parameters and a plenty of tissues can be treated. Furthermore, we localize bounded subsets of constitutive parameters in fixed physical and very general bounds and then introduce a family of discrete stress–strain curves. Whence, various classes of tissues are characterized. Our general approach is based on a detailed analytical study of the first Piola–Kirchhoff stress tensor through its dependence on the invariants and on the constitutive parameters. The uniqueness of parameters for one tissue is discussed by introducing the notion of manifold of constitutive parameters, which is locally represented by possibly different physical quantities. The advantage of our study is that we show a possible way to improve of the usual approaches shown in the literature which are mainly based on the minimization of a cost function as the difference between experimental and model results.

Key words: hyperelasticity, polyconvexity, constitutive parameters, tissue modelling.

Получено 6 июня 2017