

Богомолов А.Н., Абрамов Г.А., Богомолова О.А., Пристансков А.А., Ермаков О.В. Численные и модельные эксперименты по определению устойчивости однородного откоса, подработанного горизонтальной выработкой // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2018. – № 1. – С. 30–41. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.1.03

Bogomolov A.N., Abramov G.A., Bogomolova O.A., Pristanskov A.A., Ermakov O.V. Numerical and model experiments to determine the stability of a homogeneous slope, undermined horizontal production. *Bulletin of PNRPU. Construction and Architecture*. 2018. No. 1. Pp. 30–41. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.1.03



**ВЕСТНИК ПНИПУ.
СТРОИТЕЛЬСТВО И АРХИТЕКТУРА
№ 1, 2018
PNRPU BULLETIN.
CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE**
<http://vestnik.pstu.ru/arhit/about/inf/>



DOI: 10.15593/2224-9826/2018.1.03

УДК 624.137

ЧИСЛЕННЫЕ И МОДЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНОГО ОТКОСА, ПОДРАБОТАННОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ВЫРАБОТКОЙ

**А.Н. Богомолов^{1,2}, Г.А. Абрамов², О.А. Богомолова²,
А.А. Пристансков², О.В. Ермаков²**

¹Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

²Волгоградский государственный технический университет, Волгоград, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 16 сентября 2017
Принята: 07 декабря 2017
Опубликована: 30 марта 2018

Ключевые слова:

откос, подработанный горизонтальной выработкой, численное моделирование устойчивости, лотковые эксперименты, физико-механические характеристики эквивалентного материала, напряжения, области пластических деформаций, устойчивость

АННОТАЦИЯ

Приведены результаты анализа численных и модельных экспериментов по исследованию устойчивости однородного изотропного откоса, подработанного горизонтальной выработкой с поперечным сечением в виде круга. Лотковые эксперименты проведены на моделях однородных откосов, сформированных из эквивалентного материала – песчано-масляной смеси, физико-механические свойства которой близки некоторым категориям песчаных и связных грунтов. Величина коэффициента бокового давления материала определена методом К. Терцаги – протягиванием стальной ленты через его толщу. Обсчет моделей и математическая обработка полученных результатов выполнены при помощи компьютерных программ, зарегистрированных в Государственном реестре компьютерных программ и баз данных. В этих программах формализован метод конечных элементов, аналитические решения первой основной и основной смешанной задачи теории упругости и приближенное аналитическое решение смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта. Построение наиболее вероятной поверхности скольжения осуществляется при выполнении условия минимальности численного значения коэффициента запаса устойчивости в каждой ее точке. Анализ результатов модельных и численных экспериментов показал их удовлетворительную сходимость. В результате численного эксперимента установлено, что при определенных расстояниях выработки от подошвы откоса в ее окрестности наблюдается существенная концентрация поля напряжений и возникают области пластических деформаций.

© ПНИПУ

© **Богомолов Александр Николаевич** – доктор технических наук, профессор, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.

Абрамов Генрих Артурович – аспирант, e-mail: z_genrih@mail.ru.

Богомолова Оксана Александровна – кандидат технических наук, доцент, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.

Пристансков Андрей Александрович – аспирант, e-mail: qrafska@mail.ru.

Ермаков Олег Владимирович – докторант. e-mail: helgerm@bk.ru.

Alexander N. Bogomolov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: banzaritcyn@mail.ru.

Genrikh A. Abramov – Postgraduate Student, e-mail: z_genrih@mail.ru.

Oksana A. Bogomolova – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, e-mail: boazaritcyn@mail.ru.

Andrei A. Pristanskov – Postgraduate Student, e-mail: qrafska@mail.ru.

Oleg V. Ermakov – Doctoral Candidate, e-mail: helgerm@bk.ru.

NUMERICAL AND MODEL EXPERIMENTS TO DETERMINE THE STABILITY OF A HOMOGENEOUS SLOPE UNDERMINED WITH A HORIZONTAL PRODUCTION

A.N. Bogomolov^{1,2}, G.A. Abramov², O.A. Bogomolova²,
A.A. Pristanskov², O.V. Ermakov²

¹Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

²Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 16 September 2017

Accepted: 07 December 2017

Published: 30 March 2018

Keywords:

slope, undermined horizontal production, numerical modeling of stability, flume experiments, physical and mechanical characteristics of the equivalent material, stress, plastic deformations, stability

ABSTRACT

The article presents the results of the numerical analysis and model experiments to study the stability of a homogeneous isotropic slope undermined with a horizontal production having a cross-section in the form of a circle. Flume experiments were carried out on the models of homogeneous slopes, formed of an equivalent material, i.e. sand-oil mixture, physical and mechanical properties of which are close to some sandy and cohesive soils. The value of the coefficient of material's lateral pressure is determined using the method of K.Terzaghi which entails pulling the steel band through its thickness. The models calculation and mathematical processing of the obtained results is made with the help of the software which is registered in the State Register of Computer Programs and Databases. The software formalizes the finite element method, the analytical solution of the first main and the basic mixed problem of the elasticity theory and an approximate analytical solution of the mixed problem of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil. The construction of the most probable slip surface is carried out under the condition of the minimality of the numerical values related to the coefficient of stability margin at each point. The analysis of the results gained form the model and numerical experiments has shown their satisfactory convergence. As a result of the numerical experiment it is established that there is a significant concentration of the stress field and occurrence of regions of plastic deformations at certain distances in the neighborhood between the development and the base of the slope.

© PNRPU

Целью настоящей работы является анализ и сопоставление результатов численных и модельных исследований устойчивости однородного откоса и подрабатывающей его горизонтальной выработки круглого поперечного сечения. В результате предполагается обосновать возможность использования компьютерных программ [1, 2] для проведения численных исследований устойчивости однородных подработанных откосов и самих выработок, основанием для чего может послужить адекватность получаемых в результате модельных и численных экспериментов результатов.

1. Экспериментальное оборудование

В качестве экспериментального оборудования использован прямоугольный лоток (короб) с внутренними размерами 1,0×1,79×0,105 м, боковые грани которого выполнены из листов прозрачного оргстекла (акрила) толщиной 8 мм (рис. 1), состыкованные между собой стальными уголками размером 30×30 мм.

Для предупреждения деформаций стенок лотка от бокового давления загружаемого в него эквивалентного материала установлены стальные стяжки, так – чтобы они не препятствовали разрушению модели при проведении эксперимента.

На обеих фронтальных стенках, в средней их части на высоте 0,25 м от дна лотка, имеются квадратные отверстия, через которые внутрь него помещаются коробка-шаблоны, позволяющие создавать имитацию (после их извлечения) подземных выработок, ослабляющих модель однородного откоса.

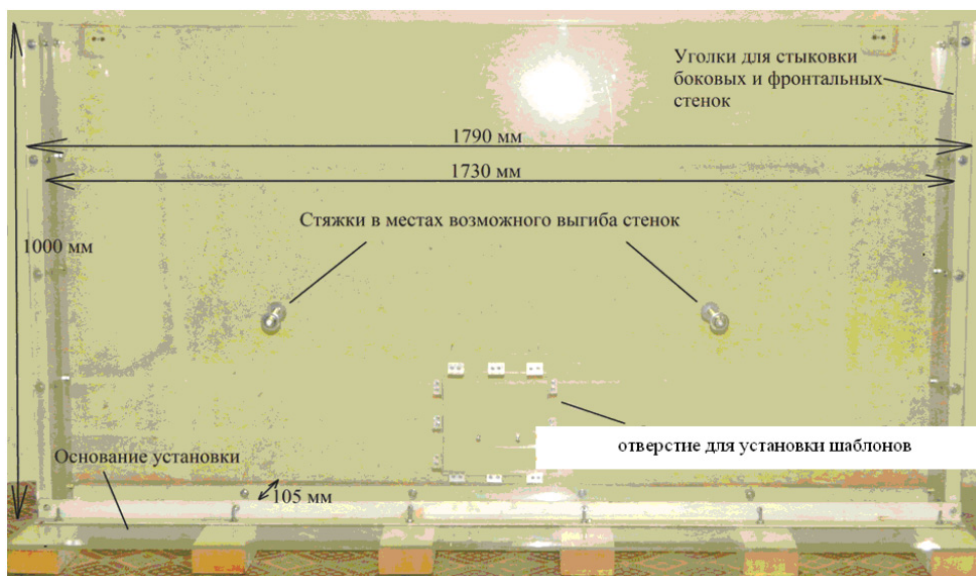


Рис. 1. Лоток для проведения модельных экспериментов
Fig. 1. Tray for model experiments

Поперечное сечение короба-шаблона может быть практически любым, что позволяет проводить эксперименты, имитируя выработку с требуемой формой ее поперечного сечения.

2. Материал моделей

В качестве материала, из которого в лотке формируются модели однородных откосов, использована песчано-масляная смесь, сдвиговые характеристики которой в неуплотненном и уплотненном состоянии приведены соответственно в табл. 1, 2.

Таблица 1

Сдвиговые характеристики песчано-масляной смеси в неуплотненном состоянии

Table 1

Shear characteristics of unconsolidated sand-oil mixture

P, МПа	τ, МПа		tg φ	φ	C, кПа
	значение				
	опытное	расчетное			
0,1	0,06	0,06	0,55	28°49'	5
0,2	0,115	0,115			
0,3	0,17	0,17			

Таблица 2

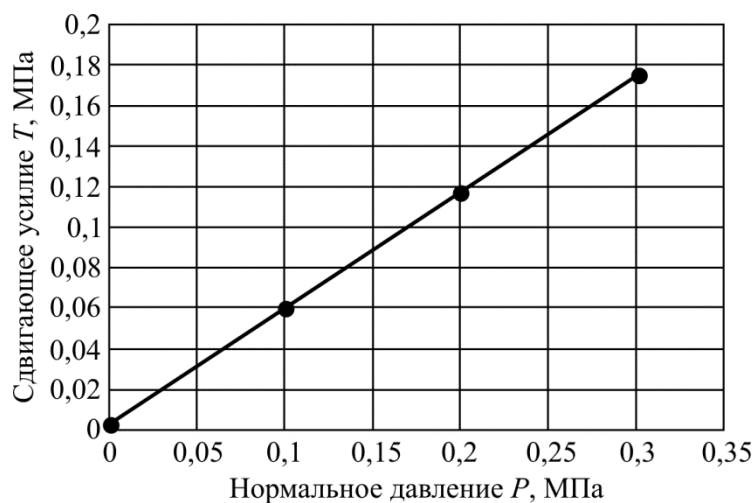
Сдвиговые характеристики песчано-масляной смеси в уплотненном состоянии

Table 2

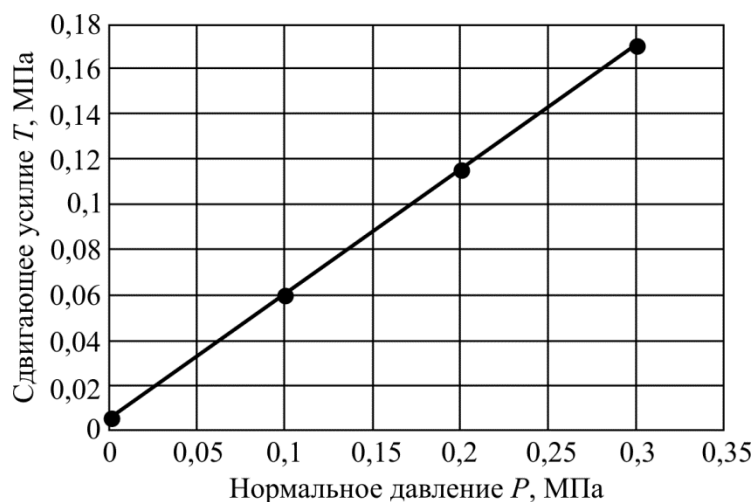
Shear characteristics of compacted sand-oil mixture

P, МПа	τ, МПа		tg φ	φ	C, кПа
	значение				
	опытное	расчетное			
0,1	0,06	0,06	0,575	29°54'	2,5
0,2	0,118	0,118			
0,3	0,175	0,175			

Прочностные характеристики материала установлены путем его испытания при консолидированном сдвиге в приборе ГПП-30 в лаборатории механики грунтов ООО «Радян», результаты приведены на рис. 2.



a



б



в

Рис. 2. Диаграммы сдвига неуплотненного и уплотненного эквивалентного материала (*a*, *б*) и сдвиговой прибор ГПП-30 (*в*)

Fig. 2. Shear graphs of the unconsolidated and compacted equivalent material (*a*, *b*) and shear device GPP-30 (*c*)

Среднее значение объемного веса материала моделей γ определено равным $17,2 \text{ kN/m}^3$, а величина его коэффициента бокового давления ξ_0 , найденная на основе метода К. Терцаги [3–5], равна 0,4.

3. Формирование моделей и последовательность проведения эксперимента

Формирование модели однородного откоса, подработанного горизонтальной выработкой, выполнялось в следующей последовательности. На передней фронтальной стенке лотка цветным мелом очерчивался контур модели откоса с учетом того, на каком расстоянии от его подошвы будет располагаться выработка. На первом этапе укладывался слой эквива-

лентного материала на высоту от дна лотка до нижних границ шаблонов выработки, закрепленных на акриловых стенках экспериментального лотка. Последующие слои толщиной, приблизительно равной 10 см, укладывались с выдержкой примерно в 30 мин после завершения укладки предыдущего слоя. После достижения слоев эквивалентного материала, расположенного выше потолочины выработки, дневной поверхности модели заполненный таким образом эквивалентным материалом лоток оставлялся в покое на 3 ч для обеспечения установления поля напряжений, создаваемых силой тяжести. По истечении этого времени проводилось аккуратное извлечение грунта из части лотка (разгрузка, отработка откоса) и формировалась модель откоса. После формирования модели ее фотографировали и опять оставляли в покое на 3 ч для перераспределения напряжений в связи с «разгрузкой» модели. После этого проводилось осторожное извлечение короба-шаблона, фотографирование модели, фиксация нарушений ее целостности и состояние имитационной выработки.

4. Результаты модельного эксперимента

Описанная выше процедура проведена для моделей откосов, геометрические параметры которых приведены на рис. 3, и. Разница заключалась в том, что цилиндрический короб-шаблон диаметром 5 см последовательно размещался на расстояниях $L = 0,15; 0,2; 0,25; 0,3H$

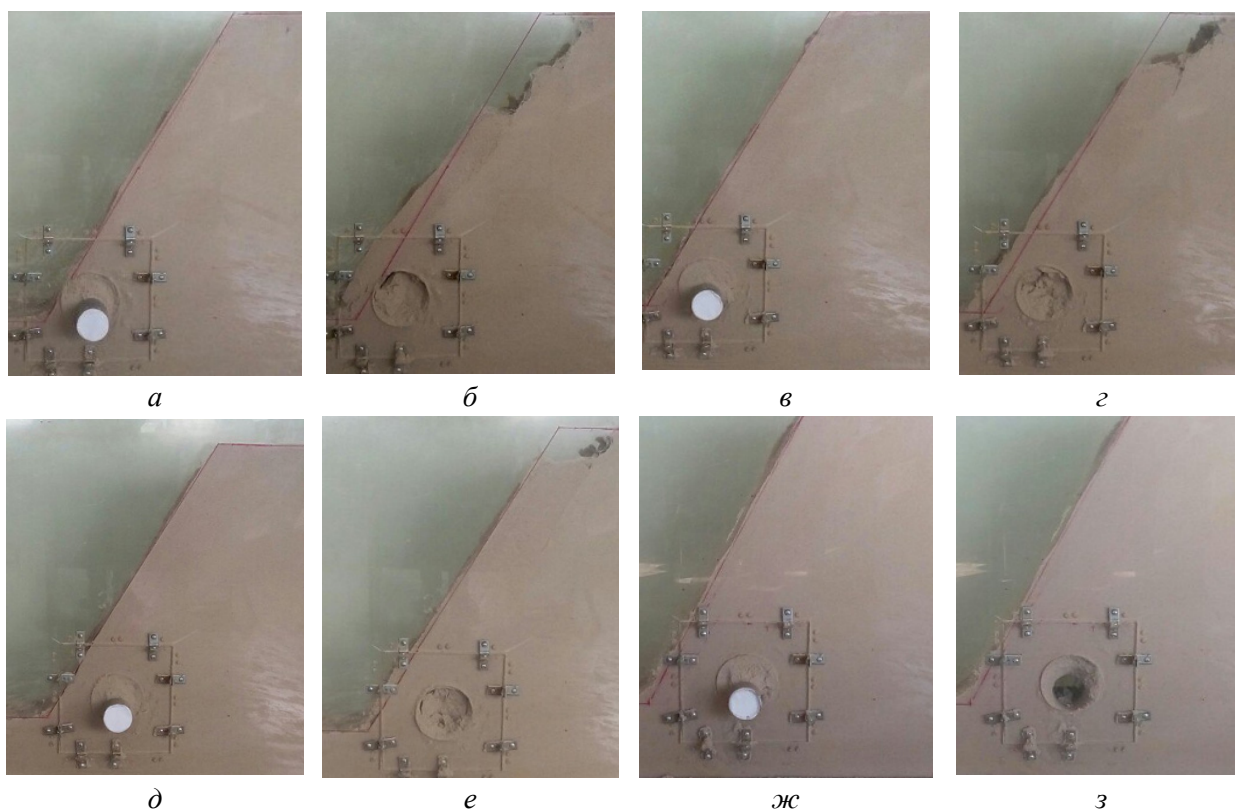


Рис. 3. Фотографии модели откоса из эквивалентного материала, подработанной круглой горизонтальной выработкой, до и после извлечения короба-шаблона при расстояниях от центра выработки до подошвы модели, равных $0,15H$ (а, б), $0,2H$ (в, г), $0,25H$ (д, е), $0,3H$ (ж, з) и геометрические размеры поперечного сечения модели при $L = 0,3H$ (и)

Fig. 3. Photos of the slope's model of an equivalent material, undermined with a round horizontal production to t after removing the box pattern at the distances from the production's center to the soles of the model equal to $0,15 H$ (a, b) $0,2 H$ (c, d), $0,25 H$ (e, f), $0,3 H$ (g, h) and the geometrical dimensions of the cross section of the model at $L = 0,3 H$ (i)

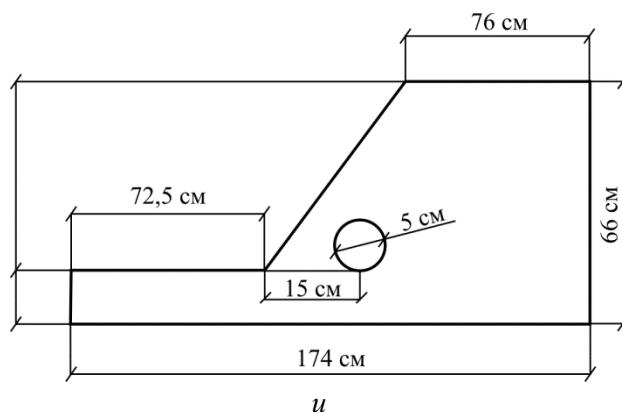


Рис. 3. Окончание
Fig 3. The ending

от линии перехода откоса в подошву. Фотографии моделей, сделанные до и после извлечения короба-шаблона, приведены на рис. 3. Их анализ показывает, что если $L \leq 0,25H$, то происходит разрушение контура выработки и сама модель откоса теряет устойчивость. При $L = 0,3H$ модель откоса остается в устойчивом состоянии, а из потолочины выработки происходит весьма незначительный вывал эквивалентного материала (см. рис. 3, з).

5. Численная интерпретация результатов эксперимента

При помощи компьютерных программ [1, 2], в которых формализован в том числе метод конечных элементов [6, 7], выполнен обсчет механико-математических моделей, соответствующих физическим моделям подрабатываемого откоса, которые были сформированы в ходе модельного эксперимента.

На рис. 4 в качестве примера приведена расчетная схема физической модели при ее угле заложения $\beta = 60^\circ$, $L = 0,15H$, $d = 0,1H$. Расчетная схема состоит из 1163 треугольных элементов, сопряженных в 636 узлах, что обеспечивает минимальное значение ширины матрицы жесткости системы, которая в рассматриваемом случае равна 1262.

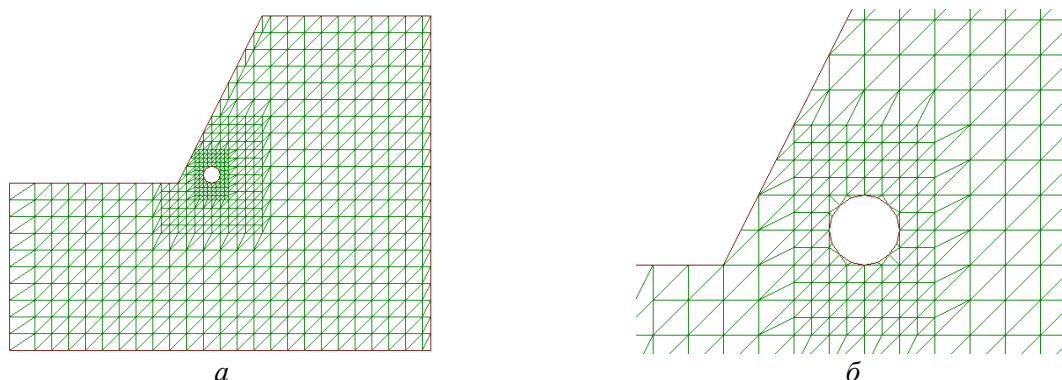


Рис. 4. Расчетная схема (а) модели и ее фрагмент (б) при угле заложения модели откоса $\beta = 60^\circ$, $L = 0,15H$, $d = 0,1H$ с картиной дискретизации расчетной схемы на конечные элементы
Fig. 4. Calculation scheme (a) of the model and its fragment (b) at an angle of laying the model's slope $\beta = 60^\circ$, $L = 0,15 H$, $d = 0,1 H$ with a picture showing the discretization of the design scheme into finite elements

Результаты вычисления напряжений, построения областей пластических деформаций и следов поверхностей скольжения приведены на рис. 5.

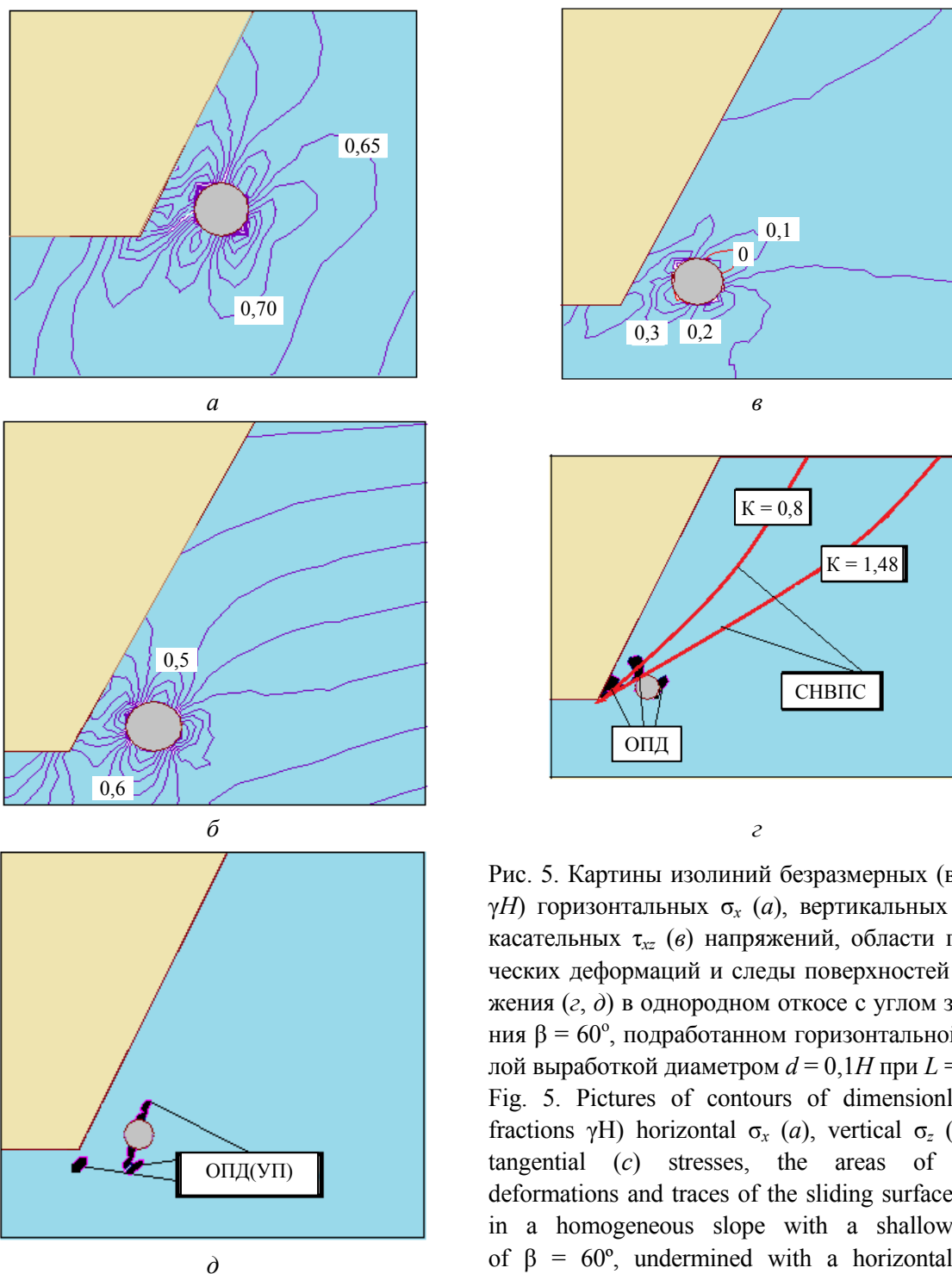


Рис. 5. Картины изолиний безразмерных (в долях γH) горизонтальных σ_x (а), вертикальных σ_z (б), касательных τ_{xz} (в) напряжений, области пластических деформаций и следы поверхностей скольжения (г, д) в однородном откосе с углом заложения $\beta = 60^\circ$, подработанном горизонтальной круглой выработкой диаметром $d = 0,1H$ при $L = 0,15H$
 Fig. 5. Pictures of contours of dimensionless (in fractions γH) horizontal σ_x (a), vertical σ_z (b), τ_{xz} tangential (c) stresses, the areas of plastic deformations and traces of the sliding surfaces (d, e) in a homogeneous slope with a shallow angle of $\beta = 60^\circ$, undermined with a horizontal round production with a diameter of $d = 0,1 H$ at $L = 0,15 H$

Анализ картин изолиний всех компонент напряжения показывает, что образование в однородном откосе горизонтальной выработки круглого поперечного сечения вызывает значительные концентрации напряжений в ее окрестности, на контуре выработки горизонтальные напряжения становятся растягивающими, хотя это растяжение быстро затухает, касательные напряжения в непосредственной близости от выработки имеют различные знаки. Все это способствует образованию вокруг выработки областей пластических деформаций, которые для данного примера приведены на рис. 5, г и 5, д. Причем на первом из них

(см. рис. 5, з) приведены области пластических деформаций, построенные на основании условия прочности Кулона [8–10], которое описывается любым из выражений:

$$\left. \begin{aligned} &\sigma_1 - \sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_{св}) \sin \varphi, \\ &\text{или} \\ &(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = (\sigma_x + \sigma_z + 2\sigma_{св})^2 \sin^2 \varphi, \\ &\text{или} \\ &\operatorname{tg} \theta_{\max} = \operatorname{tg} \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где σ_1 и σ_2 – главные нормальные напряжения в рассматриваемой точке; σ_x , σ_z и τ_{xz} – компоненты полного напряжения в той же точке; $\sigma_{св}$ – давление связности, $\sigma_{св} = C \operatorname{ctg} \varphi$; C , φ и θ_{\max} – соответственно удельное сцепление, угол внутреннего трения грунта и угол максимального отклонения.

Области, в каждой точке границ которых выполняются условия (1), считаются областями пластических деформаций (ОПД).

На втором рисунке (см. рис. 5, д) приведены области пластических деформаций, построенные на основе приближенного аналитического решения смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунтов [11–15]. При этом границы ОПД могут быть построены на основе следующих выражений:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2(\tau_{zx} + \tau'_{zx})}{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma'_x}, \quad (2)$$

$$\sin \varphi_\theta = \frac{l(\sigma_z(3 + \cos 2\theta) + \sigma_x(1 - \cos 2\theta) + 2\tau_{zx} \cdot \sin 2\theta)}{-(\sigma_z + \sigma_x) + 2\sigma_{св} + \cos 2\theta(\sigma_x - 3\sigma_z - 2\sigma_{св}) - 2 \sin 2\theta(\tau_{zx} + b(\sigma_z + \sigma_{св}))}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} &\sigma'_z = \sigma_z; \\ &\sigma'_x = \frac{\sigma_z(l - \sin \varphi) - 2\sigma_{св} \sin \varphi}{l + \sin \varphi}; \\ &\tau'_{xz} = \frac{(\sigma_z + \sigma_{св})b \sin \varphi}{l + \sin \varphi}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $b = \operatorname{tg} 2\alpha^* = \operatorname{tg} 2[\alpha - (45^\circ + \varphi/2)]$; $l = (1 + b^2)^{\frac{1}{2}}$; σ_z , σ_x и τ_{xz} – компоненты напряжения в рассматриваемой точке, вычисленные на основе решения соответствующей задачи теории упругости; θ и φ_θ – соответственно угол наклона касательной к границе между упругой и пластической областью в рассматриваемой точке и «пограничное» значение угла внутреннего трения грунта в той же точке.

Как видно из рис. 5, ОПД имеют небольшие размеры (в первом случае они больше), однако из-за их возникновения поле напряжений в приоткосной области трансформировалось и произошло разрушение как откоса, так и самой выработки.

На рис. 5, з изображены следы наиболее вероятных поверхностей скольжения (НВПС), построенные при отсутствии выработки и при ее наличии. В первом случае откос находится в устойчивом состоянии и коэффициент запаса устойчивости $K = 1,49$. При наличии же выра-

ботки положение поверхности скольжения меняется, происходит разрушение откоса, а вычисленное значение коэффициента запаса устойчивости $K = 0,8$, что соответствует разрушению объекта. В качестве примера в табл. 3 приведены данные о значениях удерживающих и сдвигающих сил и напряжений в соответствующих точках следа поверхности скольжения.

Таблица 3

Значения удерживающих и сдвигающих сил и напряжений
в точках следа поверхности скольжения

Table 3

Values of restraint and shear forces and stresses at the points of the track of the sliding surface

Номер	X	Y	a_1	$F_{удер}$	$F_{сдвиг}$	σ_x	σ_y	τ_{xy}
1	1,007	0,990	9,451	0,440	0,345	0,493	0,553	0,354
2	1,007	1,007	22,813	0,452	0,332	0,227	0,701	0,232
3	1,207	1,049	31,934	0,261	4,107	0,117	5,174	4,171
4	1,307	1,111	32,068	0,425	0,351	0,086	0,718	0,153
5	1,407	1,174	31,073	0,425	0,298	0,137	0,665	0,139
6	1,507	1,234	32,253	0,418	0,270	0,141	0,629	0,116
7	1,607	1,297	33,900	0,411	0,247	0,139	0,597	0,094
8	1,707	1,364	40,866	0,382	0,220	0,134	0,557	0,076
9	1,807	1,451	36,182	0,387	0,192	0,129	0,495	0,058
10	1,907	1,524	37,259	0,375	0,162	0,128	0,440	0,043
11	2,007	1,600	38,162	0,362	0,128	0,129	0,378	0,030
12	2,107	1,679	38,747	0,349	0,090	0,134	0,310	0,020
13	2,207	1,759	38,250	0,335	0,050	0,140	0,237	0,012
14	2,307	1,838	24,935	0,321	0,010	0,148	0,164	0,007
15	2,407	1,884	-33,381	0,314	0,014	0,153	0,126	0,006

Примечание. Площадь эпюры удерживающих сил: 0,5280350. Площадь эпюры сдвигающих сил: 0,5280350. Коэффициент устойчивости: 0,5280350.

Отметим, что величина коэффициента запаса устойчивости K_m в любой точке грунтового массива и глобальный коэффициент устойчивости откоса $K_{гл}$ по наиболее вероятной поверхности скольжения определяются формулами [11, 16–19]:

$$K_m = \frac{\left[\frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_x) \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) + \tau_{xz} \sin 2\alpha + \sigma_{св} \right] \operatorname{tg} \varphi}{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\alpha + \tau_{xz} \cos 2\alpha}, \quad (5)$$

$$K_{гл} = \frac{\int_0^l F_{уд}(S) ds}{\int_0^l F_{сд}(S) ds}, \quad (6)$$

где $F_{уд}$ и $F_{сд}$ – удерживающие и сдвигающие силы в точках НВПС, определяемые соответственно числителем и знаменателем формулы (5); S – дуговая координата точки НВПС.

Выводы

Анализ результатов модельных и численных экспериментов показал их удовлетворительную сходимость. В результате численного эксперимента установлено, что при расстоянии $L = 0,1; 0,15; 0,2H$ в окрестности выработки наблюдается существенная концентрация поля на-

пряжений и возникают области пластических деформаций. Это вызывает новое перераспределение напряжений, влекущее за собой разрушение модели откоса и самой выработки. Если $L \geq 0,3H$, то области пластических деформаций имеют существенно меньшие размеры и не вызывают критического перераспределения напряжений, модель откоса не теряет устойчивости, а из потолочины имитационной выработки происходят весьма незначительные вывалы эквивалентного материала, при этом общая устойчивость выработки не нарушается [16–18]. Соответствующая картина наблюдается и при проведении модельного эксперимента. Таким образом, подтверждена возможность использования компьютерных программ [1, 2] для проведения численных исследований устойчивости подрабатываемых откосов.

Библиографический список

1. FEA: св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2015617889 / А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 23 июля 2015 г.
2. Устойчивость (напряженно-деформированное состояние): св-во о гос. рег. программы для ЭВМ № 2009613499 / А.Н. Богомолов [и др.]. Зарег. 30 июня 2009 г.
3. Терцаги К. Теория механики грунтов. – М.: Госстройиздат, 1961. – 507 с.
4. Терцаги К., Пек Р. Механика грунтов в инженерной практике. – М.: Госстройиздат, 1958. – 607 с.
5. Терцаги К. Строительная механика грунта на основе его физических свойств. – М.; Л.: Госстройиздат, 1933. – 390 с.
6. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
7. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимации. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
8. Zienkiewicz O.C., Humpheson C., Lewis R.W. Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics // Geotechnique. – 1975. – № 4. – P. 671–689.
9. Cagout G. Equilibre des massifs a frottement interne. – Paris, 1934. – 443 p.
10. Coulomb C. Application des rigles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture // Memories de savants strangers de L'Academiie des sciences de Paris, 1773. – 233 p.
11. Богомолов А.Н. Расчет несущей способности оснований сооружений и устойчивости грунтовых массивов в упругопластической постановке / ПГТУ. – Пермь, 1996. – 150 с.
12. Развитие областей пластических деформаций в однородном основании гибкого ленточного фундамента в рамках модели смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта / А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, А.И. Вайнгольц, В.В. Подтелков // Интернет-вестник Волгоград. гос. арх.-строит. ун-та. Сер. Политематическая. – 2013. – Вып. 2 (27). – 5 с.
13. Напряженное состояние и области пластических деформаций в однородном основании ленточного фундамента в условиях смешанной задачи теории упругости и теории пластичности грунта / А.Н. Богомолов, О.А. Богомолова, А.И. Вайнгольц, А.В. Прокопенко, А.В. Соловьев // Инновационные конструкции и технологии в фундаментостроении и геотехнике: материалы науч.-техн. конф., Москва, 27–29 октября 2013 г. – М.: Палеотип, 2013. – С. 9–22.
14. Богомолов А.Н., Богомолова О.А. Смешанная задача теории упругости и теории пластичности грунта для однородного основания // Вестник Волгоград. гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и архитектура. – 2013. – Вып. 33 (52). – С. 13–22.

15. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A. Mixed task of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil for the uniform basis // Збірник наукових праць (галузеве машинобудування, будівництво). – 2013. – Т. 1, вип. 3 (38). – С. 3–15.
16. Современные методы расчета фундаментов / А.Н. Богомолов, С.И. Евтушенко, А.Н. Ушаков, С.И. Шиян. – Новочеркасск: Изд-во ЮРГТУ (НПИ), 2011. – 238 с.
17. Цветков В.К. Расчет устойчивости откосов и склонов. – Волгоград: Нижне-Волж. книж. изд-во. – 1979. – 238 с.
18. Цветков В.К. Расчет рациональных параметров горных выработок: справ. пособие. – М.: Недра, 1993. – 291 с.
19. Цветков В.К. Расчетные коэффициенты устойчивости грунтовых откосов и склонов // Надежность и долговечность строительных материалов, конструкций и оснований фундаментов: материалы IV Междунар. науч.-техн. конф. – Волгоград, 2005.

References

1. Bogomolov A.N. FEA. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM № 2015617889*.
2. Bogomolov A.N. Ustoichivost' (Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie) [Stability (Stress-strain state)]. *Svidetel'stvo o gosudarstvennoi registratsii programmy dlia EVM № 2009613499*.
3. Tertsagi K. *Teoriia mekhaniki gruntov* [The theory of soil mechanics]. Moscow, Gosstroizdat, 1961, 507 p.
4. Tertsagi K., Pek R. *Mekhanika gruntov v inzhenernoi praktike* [Soil mechanics in engineering practice]. Moscow, Gosstroizdat, 1958, 607 p.
5. Tertsagi K. *Stroitel'naia mekhanika grunta na osnove ego fizicheskikh svoistv* [Structural soil mechanics of based on its physical properties]. Moscow, Leningrad, Gosstroizdat, 1933, 390 p.
6. Fadeev A.B. *Metod konechnykh elementov v geomekhanike* [Finite element method in geomechanics]. Moscow, Nedra, 1987, 221 p.
7. Zenkevich O., Morgan K. *Konechnye elementy i approksimatsii* [Finite elements and approximation]. Moscow, Mir, 1986, 318 p.
8. Zienkiewicz O.C., Humpheson C., Lewis R.W. Associated and non-associated viscoplasticity and plasticity in soil mechanics. *Geotechnique*, 1975, no. 4, pp. 671 – 689.
9. Cagout G. *Equilibre des massifs a frottement interne*. Paris, 1934, 443 p.
10. Coulomb C. Application des regles de maximus et minimis a quelques problemes de statique relatifs a L'architecture. *Memories de savants strangers de L'Academiie des sciences de Paris*, 1773, 233 p.
11. Bogomolov A.N. *Raschet nesushchei sposobnosti osnovanii sooruzhenii i ustoichivosti gruntovykh massivov v uprugoplasticheskoii postanovke* [Calculation of bearing capacity foundations of structures and stability of soil slopes in the elastic-plastic formulation]. Perm, Permskii gosudarstvennyi technicheskii universitet, 1996. 150 p.
12. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Vaingol'ts A.I., Podtelkov V.V. *Razvitie oblastei plasticheskikh deformatsii v odnorodnom osnovanii gibkogo lentochnogo fundamenta v ramkakh modeli smeshannoi zadachi teorii uprugosti i teorii plastichnosti grunta* [The development of areas of plastic deformation in a homogenous basis of the flexible strip foundation within the model of the mixed problem of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil]. *Internet-vestnik VolgGASU. Politematicheskaiia*, 2013, iss. 2 (27), 5 p.

13. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A., Vaingol'ts A.I., Prokopenko A.V., Solov'ev A.V. Napriazhennoe sostoianie i oblasti plasticheskikh deformatsii v odnorodnom os-novanii lentochного fundamenta v usloviakh smeshannoi zadachi teorii uprugosti i teorii plastichnosti grunta [The state of stresses and plastic deformation in a homogenous basis of strip Foundation in the conditions of the mixed problem of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil]. *Innovatsionnye konstruksii i tekhnologii v fundamentostroenii i geotekhnike. Materialy nauchno-tekhnicheskoi konferentsii 27-29 oktiabria 2013 g.* Moscow, Paleotip, 2013, pp. 9-22.

14. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A. Smeshannaia zadacha teorii uprugosti i teorii plastichnosti grunta dlia odnorodnogo osnovaniia [A mixed problem of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil for uniform base]. *Vestnik VolgGASU. Stroitelstvo i arkhitektura*, 2013, iss. 33 (52), pp. 13-22.

15. Bogomolov A.N., Bogomolova O.A. Mixed task of the theory of elasticity and theory of plasticity of soil for the uniform basis. *Sbornik nauchnykh trudov (mascinostroenie, stroitelstvo)*, iss. 3 (38), vol. 1, 2013, pp. 3-15.

16. Bogomolov A.N., Evtushenko S.I., Ushakov A.N., Shiian S.I. Sovremennye metody rascheta fundamentov [Modern methods of calculation of foundations]. Novocherkassk, Yuzgno-Rossiiskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2011. 238 p.

17. Tsvetkov V.K. Raschet ustoychivosti otkosov i sklonov [Calculation of stability of slopes and declivities]. Volgograd: Nizhne-Volzhskoe knizhnoe izdatel'stvo. 1979. 238 p.

18. Tsvetkov V.K. Raschet ratsional'nykh parametrov gornykh vyrabotok [Calculation of rational parameters of mine workings]. Moscow: Nedra, 1993. 291 p.

19. Tsvetkov V.K. Raschetnye koeffitsienty ustoychivosti gruntovykh otkosov i sklonov [The estimated coefficients for stability of soil slopes and declivities]. *Materialy IV Mezhdunarodnoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii "Nadezhnost' i dolgovechnost' stroitel'nykh materialov, konstruksii i osnovanii fundamentov"*. Volgograd, 2005.