

С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ СДВИГА ПРИ КРУЧЕНИИ

Расчетные модели в виде тонкостенных стержней часто используются при анализе пролетных строений мостов. В статье приводятся результаты построения и тестирования различных конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля, работающего на кручение с учетом деформаций сдвига.

Ключевые слова: тонкостенный стержень, полусдвиговая теория, метод конечных элементов, матрица жесткости, результаты расчетов.

1. Введение

В теории тонкостенных стержней открытого профиля В.З. Власова в качестве основополагающего постулата выступает тезис об отсутствии сдвигов в срединной поверхности тонкостенного стержня. В.И. Сливкер в своей монографии [1] предлагает теорию, которая позволяет частично учесть деформацию сдвига. Главная его мысль заключается в том, что он предлагает представить касательные напряжения как сумму двух слагаемых: *касательных напряжений изгиба*, порожденных поперечными силами Q_x и Q_y , и *касательных напряжений кручения*, вызываемых моментом стесненного кручения M_ω . Далее предлагается пренебречь касательными напряжениями изгиба, отнеся их в разряд второстепенных, в то же время сохранив касательные напряжения кручения. Теория с таким разделением называется *полусдвиговой теорией тонкостенных стержней*. Главным ее преимуществом по сравнению со сдвиговой теорией является то, что она оказывается существенно проще.

Рассмотрим тонкостенный стержень, работающий на кручение. Получить коэффициенты матрицы жесткости такого стержня можно двумя способами: точным (аналитическим) и приближенным. К недос-

таткам точного решения можно отнести излишнюю сложность и громоздкость, а также ограничения, характерные для аналитического подхода, – постоянную жесткость стержня по длине, ограниченный вид внешних нагрузок и т.д. Эти проблемы можно избежать, если использовать приближенный энергетический подход. Возьмем за основу функционал Лагранжа, который представляет собой, как известно, разность величин внутренней энергии деформации и работы внешних сил. Для прямолинейного тонкостенного стержня длины l , работающего на кручение, и с учетом деформаций сдвига при кручении функционал Лагранжа может быть записан в виде

$$L(\theta, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EI_{\omega} \beta'^2 + GI_x \theta'^2 + GI_g [\theta' - \beta]^2 - 2A \right) dx, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; ν – коэффициент Пуассона; β – функция меры депланации; θ – угол закручивания; I_{ω} – секториальный момент инерции; I_x – крутильный момент инерции; A – работа внешних сил; $I_g = \frac{I_x}{\psi - 1}$, ψ – геометрический параметр (подробнее см. [1, с. 352]).

В выражении (1) функция меры депланации является независимой функцией. Если же деформация сдвига не учитывается, то в (1) выражение в квадратных скобках следует приравнять нулю, и тогда мера депланации будет равна производной от угла закручивания θ и функционал L будет зависеть только от одной функции θ .

2. Конечный элемент с линейными функциями формы

Поскольку функции $\beta(x)$ и $\theta(x)$ входят в функционал с производными не выше первого порядка, для их аппроксимации достаточно использовать линейные функции на конечном элементе. Для этого будем использовать следующие функции формы:

$$N_1(x) = -\frac{x}{l} + 1, \quad N_2(x) = \frac{x}{l}. \quad (2)$$

Тогда интерполирующий полином для функций $\beta(x)$ и $\theta(x)$ будет выглядеть следующим образом, где неизвестные пока константы $a_1 \dots a_4$ представляют собой соответствующие обобщенные перемещения концов конечного элемента:

$$\theta(x) = a_1 N_1 + a_3 N_2, \quad \beta(x) = a_2 N_1 + a_4 N_2. \quad (3)$$

Далее следует подставить полученные выражения для функций $\beta(x)$ и $\theta(x)$ из (3) в (1), которое после взятия производных и вычисления определенных интегралов превратится в обыкновенную функцию четырех независимых переменных $a_1 \dots a_4$. В связи с этим минимизация функционала Лагранжа сводится к нахождению минимума функции:

$$\frac{\partial L}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial a_2} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial a_3} = 0; \quad \frac{\partial L}{\partial a_4} = 0. \quad (4)$$

Работа внешних сил в случае действия на стержень распределенной нагрузки в виде распределенного крутящего момента m_x или распределенного бимоента m_b будет иметь следующий вид:

$$A = \int_0^l (m_x(x) \cdot \theta(x) + m_b(x) \cdot \beta(x)) dx. \quad (5)$$

Вычислив соответствующие частные производные в (4) и раскрыв скобки в (5), получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G}{2l} (2I_x a_1 - 2I_x a_3 + I_g a_2 l + 2I_g a_1 - 2I_g a_3 + I_g a_4 l) = \\ \qquad \qquad \qquad = \int_0^l (m_x(x) \cdot N_1) dx, \\ \frac{1}{6l} (6EI_\omega a_2 - 6EI_\omega a_4 + 2GI_g a_2 l^2 + 3GI_g a_1 l - 3GI_g a_3 l + GI_g l^2 a_4) = \\ \qquad \qquad \qquad = \int_0^l (m_b(x) \cdot N_1) dx, \\ -\frac{G}{2l} (2I_x a_1 - 2I_x a_3 + I_g a_2 l + 2I_g a_1 - 2I_g a_3 + I_g a_4 l) = \\ \qquad \qquad \qquad = \int_0^l (m_x(x) \cdot N_2) dx, \\ \frac{1}{6l} (6EI_\omega a_2 - 6EI_\omega a_4 + 2GI_g a_2 l^2 + 3GI_g a_1 l - 3GI_g a_3 l + GI_g l^2 a_4) = \\ \qquad \qquad \qquad = \int_0^l (m_b(x) \cdot N_2) dx. \end{array} \right. \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$\int_0^l (m_x(x) \cdot N_1) dx = M_x^1, \quad \int_0^l (m_b(x) \cdot N_1) dx = M_b^1, \quad (7)$$

$$\int_0^l (m_x(x) \cdot N_2) dx = M_x^2, \quad \int_0^l (m_b(x) \cdot N_2) dx = M_b^2.$$

где $M_x^1, M_x^2, M_b^1, M_b^2$ – узловые моменты и бимоменты, эквивалентные распределенной нагрузке m_x, m_b . Тогда система уравнений в матричной форме примет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{G(I_x + I_g)}{l} & \frac{GI_g}{2} & -\frac{G(I_x + I_g)}{l} & \frac{GI_g}{2} \\ & \frac{3EI_\omega + l^2GI_g}{3l} & -\frac{GI_g}{2} & -\frac{6EI_\omega - l^2GI_g}{6l} \\ & & \frac{G(I_x + I_g)}{l} & -\frac{GI_g}{2} \\ \text{симметрично} & & & \frac{3EI_\omega + l^2GI_g}{3l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x^1 \\ M_b^1 \\ M_x^2 \\ M_b^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Первая матрица в системе (8) является матрицей жесткости тонкостенного стержня, работающего на кручение. Будем обозначать ее K_1 .

3. Использование квадратичных функций формы

Поскольку слагаемые в квадратных скобках в (1) после дифференцирования функций (3) будут иметь разные показатели степени, имеет смысл функцию $\beta(x)$, как и прежде, аппроксимировать линейным полиномом, в то время как для функции $\theta(x)$ использовать квадратичный многочлен. Функции формы N остаются прежними, но добавляются три дополнительные:

$$H_1 = 1 - \frac{3x}{l} + \frac{2x^2}{l^2}, \quad H_2 = -\frac{x}{l} + \frac{2x^2}{l^2}, \quad H_3 = \frac{4x}{l} - \frac{4x^2}{l^2}. \quad (9)$$

Тогда интерполирующие полиномы для функций $\beta(x)$ и $\theta(x)$ будут выглядеть следующим образом:

$$\theta(x) = a_1H_1 + a_3H_2 + a_5H_3, \quad \beta(x) = a_2N_1 + a_4N_2. \quad (10)$$

Константа a_5 представляет собой угол закручивания стержня в средней точке конечного элемента.

Далее следует провести аналогичную пункту 2 процедуру, с тем лишь отличием, что частных производных будет пять и система уравнений будет иметь одну дополнительную строку:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{G}{6}(-16I_x a_5 + 2I_x a_3 - 16I_g a_5 + 2I_g a_3 + 14I_x a_1 + 14I_g a_1 + 5I_g a_2 l + I_g a_4 l) &= \\ &= \int_0^l (m_x(x) \cdot H_1) dx, \\ \frac{1}{6l}(-6EI_\omega a_4 + 2GI_g a_2 l^2 + 6EI_\omega a_2 + GI_g l^2 a_4 - 4GI_g a_5 l + 5GI_g a_1 l - GI_g a_3 l) &= \\ &= \int_0^l (m_b(x) \cdot N_1) dx, \\ -\frac{G}{6}(-2I_x a_1 + 16I_x a_5 - 2I_g a_1 + 16I_g a_5 - 14I_x a_3 - 14I_g a_3 + I_g a_2 l + 5I_g a_4 l) &= \\ &= \int_0^l (m_x(x) \cdot H_2) dx; \end{aligned} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{6l}(6EI_\omega a_2 - 2GI_g a_4 l^2 - 6EI_\omega a_4 - GI_g l^2 a_4 + 5GI_g a_3 l - 4GI_g a_5 l - GI_g a_1 l) &= \\ &= \int_0^l (m_b(x) \cdot N_2) dx, \\ -\frac{2G}{3}(4I_x a_1 + 4I_x a_3 + 4I_g a_1 + 4I_g a_3 - 8I_g a_5 - 8I_x a_5 + I_g a_2 l - I_g a_4 l) &= \\ &= \int_0^l (m_x(x) \cdot H_3) dx. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Аналогично пункту 2 можно ввести обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l (m_x(x) \cdot H_1) dx &= M_x^1, & \int_0^l (m_b(x) \cdot N_1) dx &= M_b^1, \\ \int_0^l (m_x(x) \cdot H_2) dx &= M_x^2, & \int_0^l (m_b(x) \cdot N_2) dx &= M_b^2, \\ \int_0^l (m_x(x) \cdot H_3) dx &= M_x^3, & & \end{aligned} \right. \quad (13)$$

где M_x^3 – сосредоточенный крутящий момент в середине конечного элемента.

Момент M_x^3 в любой задаче, независимо от общего количества конечных элементов, будет определяться только внешней нагрузкой на данный конечный элемент. Поэтому можно уменьшить количество степеней свободы элемента на единицу и построить конечный элемент с четырьмя узловыми неизвестными, как и при использовании линейных функций формы. Для этого, используя последнее уравнение из системы, выразим «лишнее» перемещение a_5 через остальные перемещения $a_1 \dots a_4$ и крутящий момент M_x^3 :

$$a_5 = \frac{3l \left(M_x^3 + \frac{8G(I_x + I_g)a_1}{3l} + \frac{2GI_g a_2}{3} + \frac{8G(I_x + I_g)b_3}{3l} - \frac{2GI_g b_4}{3} \right)}{16G(I_x + I_g)}. \quad (14)$$

Далее следует найденное перемещение a_5 подставить в первые четыре уравнения в (12), и после приведения подобных и перегруппировки (12) примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{G(I_x + I_g)}{l} a_1 + \frac{GI_g}{2} a_2 - \frac{G(I_x + I_g)}{l} a_3 + \frac{GI_g}{2} a_4 = M_x^1 + \frac{M_x^3}{2}, \\ \frac{1}{2} GI_g a_1 + \left(\frac{l^2 GI_g + 3EI_\omega}{3l} - \frac{I_g^2 Gl}{12(I_x + I_g)} \right) a_2 - \\ - \frac{1}{2} GI_g a_3 - \left(\frac{6EI_\omega - l^2 GI_g}{6l} - \frac{I_g^2 Gl}{12(I_x + I_g)} \right) a_4 = M_b^1 + \frac{1}{8} \frac{I_g l}{I_x + I_g} M_x^3, \\ - \frac{G(I_x + I_g)}{l} a_1 - \frac{GI_g}{2} a_2 + \frac{G(I_x + I_g)}{l} a_3 - \frac{GI_g}{2} a_4 = M_x^2 + \frac{M_x^3}{2}; \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} GI_g a_1 - \left(\frac{6EI_\omega - l^2 GI_g}{6l} - \frac{I_g^2 Gl}{12(I_x + I_g)} \right) a_2 - \\ - \frac{1}{2} GI_g a_3 + \left(\frac{l^2 GI_g + 3EI_\omega}{3l} - \frac{I_g^2 Gl}{12(I_x + I_g)} \right) a_4 = M_b^2 - \frac{1}{8} \frac{I_g l}{I_x + I_g} M_x^3. \end{array} \right. \quad (16)$$

Система уравнений (16) в матричной форме примет вид

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{G(I_x + I_g)}{l} & \frac{GI_g}{2} & -\frac{G(I_x + I_g)}{l} \\ & \frac{l^2GI_g + 3EI_\omega}{3l} - \frac{I_g^2Gl}{12(I_x + I_g)} & -\frac{1}{2}GI_g \\ & & \frac{G(I_x + I_g)}{l} \end{array} \right] \text{ симметрично}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \frac{GI_g}{2} & & \\ -\frac{6EI_\omega - l^2GI_g}{6l} + \frac{I_g^2Gl}{12(I_x + I_g)} & \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} & \\ \frac{l^2GI_g + 3EI_\omega}{3l} - \frac{I_g^2Gl}{12(I_x + I_g)} & & \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} M_x^1 + \frac{M_x^3}{2} \\ M_b^1 + \frac{1}{8} \frac{I_g l}{I_x + I_g} M_x^3 \\ M_x^2 + \frac{M_x^3}{2} \\ M_b^2 - \frac{1}{8} \frac{I_g l}{I_x + I_g} M_x^3 \end{array} \right] \quad (17)$$

Первая матрица в системе (17) является матрицей жесткости тонкостенного стержня, работающего на кручение. Будем обозначать ее K_2 .

4. Апробация полученных матриц

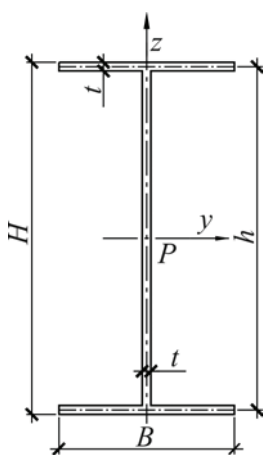
В качестве примера рассмотрим решение задачи о кручении тонкостенного стержня открытого профиля, нагруженного равномерно распределенным крутильным моментом интенсивностью $m_x = 30 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{м}^{-1}$. Будем сравнивать 4 различных варианта:

- 1) аналитическое решение [2] без учета деформаций сдвига;
- 2) расчет с учетом деформаций сдвига с использованием линейной аппроксимации для функций формы (матрица K_1);
- 3) расчет с использованием матрицы жесткости, полученной в статье [3] (Вестник МИИТа), при построении которой использовалась классическая бессдвиговая теория [4] (обозначим ее $K_{\text{МИИТ}}$);

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI_{\omega}}{l^3} + \frac{6GI_x}{5l} & \frac{6EI_{\omega}}{l^2} + \frac{GI_x}{10} & -\frac{12EI_{\omega}}{l^3} - \frac{6GI_x}{5l} & \frac{6EI_{\omega}}{l^2} + \frac{GI_x}{10} \\ & \frac{4EI_{\omega}}{l} + \frac{GI_x l}{15} & -\frac{6EI_{\omega}}{l^2} - \frac{GI_x}{10} & \frac{2EI_{\omega}}{l} - \frac{GI_x l}{30} \\ & & \frac{12EI_{\omega}}{l^3} + \frac{6GI_x}{5l} & -\frac{6EI_{\omega}}{l^2} - \frac{GI_x}{10} \\ & \text{симметрично} & & \frac{4EI_{\omega}}{l} + \frac{2GI_x l}{15} \end{bmatrix}; \quad (18)$$

4) расчет с учетом деформаций сдвига с использованием линейной и квадратичной аппроксимации для функций формы (матрица K_2).

Рассмотрим стержень с поперечным сечением в виде двутавра (рис. 1), обладающего следующими характеристиками:



$$\begin{aligned} H &= 0,25 \text{ м}; & E &= 206,01 \text{ ГПа}; \\ t &= 0,009 \text{ м}; & \nu &= 0,3; & G &= 79,23 \text{ ГПа}. \\ B &= 0,125 \text{ м}; & l &= 5 \text{ м}; \end{aligned}$$

Геометрические характеристики стержня [5]:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{t^3(2B+h)}{3} = 11,93 \text{ см}^4; \\ I_g &= \frac{640 \cdot I_{\omega}^2}{t \cdot h^2 \cdot B^5} = 7260 \text{ см}^4; \\ I_{\omega} &= \frac{B^3 \cdot h^2 \cdot t}{24} = 42539,8 \text{ см}^6. \end{aligned}$$

Рис. 1. Поперечное сечение стержня (двутавр 25Б2)

Результаты расчетов приведены на графиках обобщенных перемещений $\beta(x)$ и $\theta(x)$ консольного и жестко заделанного с двух сторон тонкостенного стержня открытого профиля (рис. 2–5).

Следует обратить внимание на то, что решение, получаемое при использовании матрицы K_1 , имеет большую погрешность при малом количестве конечных элементов. В то же время при значительном увеличении числа конечных элементов решение по матрице K_1 показывает сходимость к точному решению. Так, при 80 конечных элементах погрешность в решении будет составлять не более 14 %.

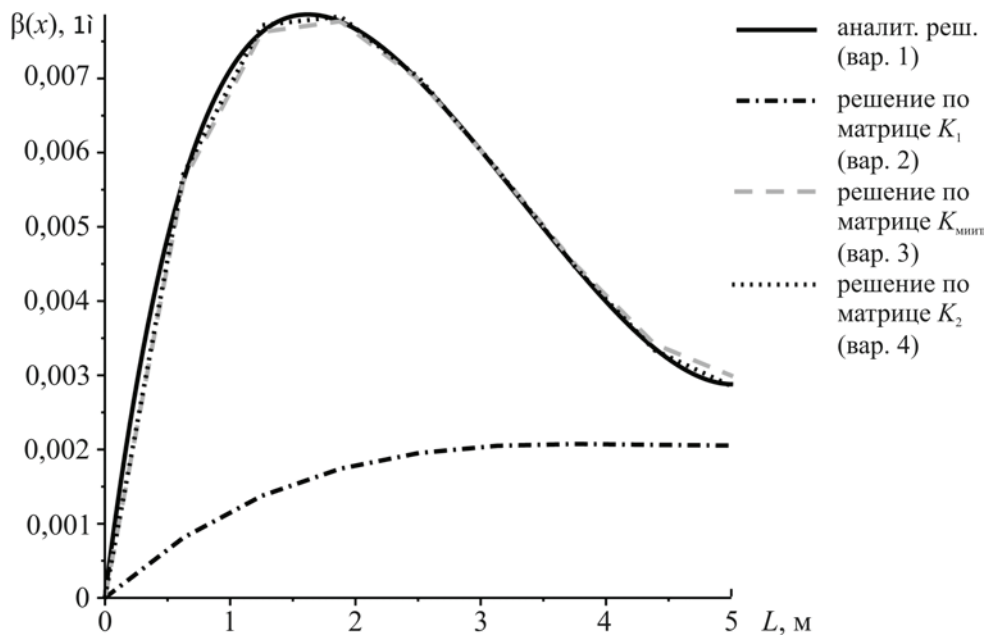


Рис. 2. Функция меры деформации $\beta(x)$ для консольного стержня, нагруженного равномерно распределенным крутящим моментом (8 конечных элементов)

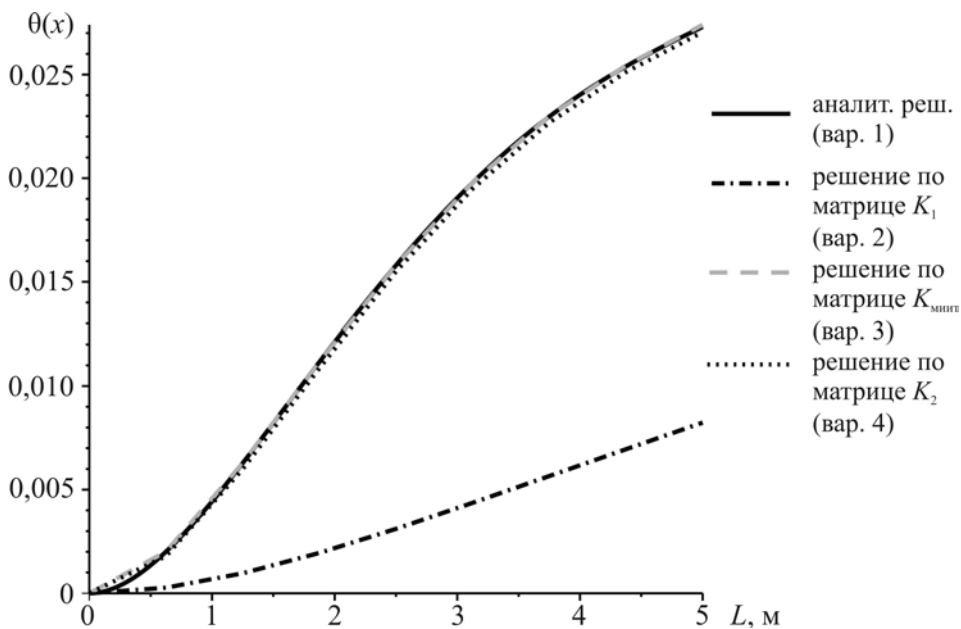


Рис. 3. Угол закручивания $\theta(x)$ для консольного стержня, нагруженного равномерно распределенным крутящим моментом (8 конечных элементов)

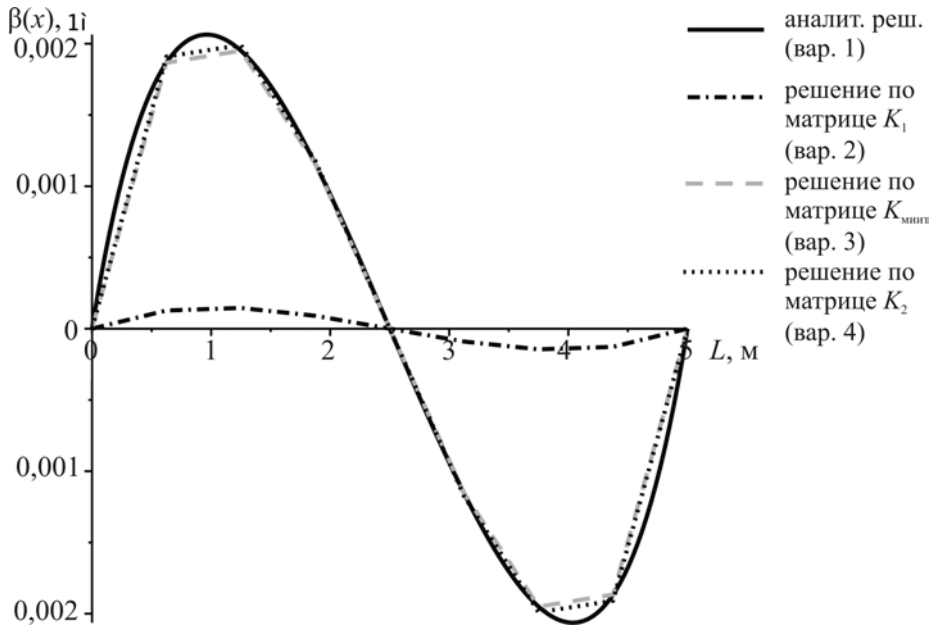


Рис. 4. Функция меры деформации $\beta(x)$ для стержня, заделанного с двух сторон, нагруженного равномерно распределенным крутящим моментом (8 конечных элементов)

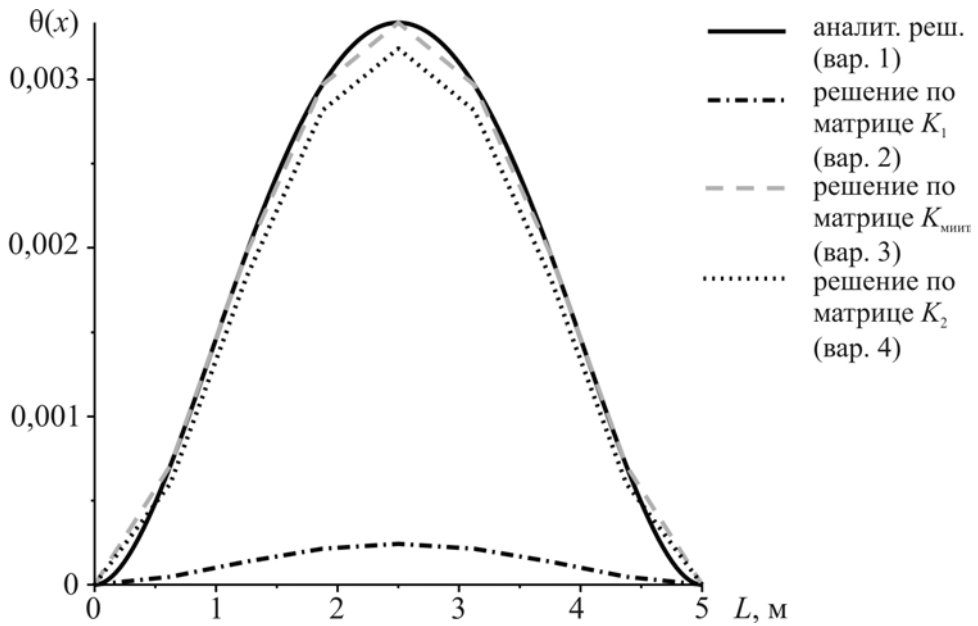


Рис. 5. Угол закручивания $\theta(x)$ для стержня, заделанного с двух сторон, нагруженного равномерно распределенным крутящим моментом (8 конечных элементов)

В заключение сделаем следующие выводы:

1. Сравнение результатов расчета с использованием матриц жесткости K_2 и $K_{минт}$ с точным решением без учета сдвига позволяет утверждать, что учет деформации сдвига в статических задачах не дает сколько-нибудь значимого изменения решения.

2. Ситуация, когда функции, имеющие разные порядки производных, аппроксимируются полиномами одного и того же порядка, приводит к большим погрешностям при вычислении, что хорошо видно при сравнении результатов, полученных при использовании матрицы K_1 с любой другой матрицей.

3. Аппроксимирование функций, имеющих разный порядок производных, полиномами разного порядка дает значительное увеличение скорости сходимости.

Поскольку учет деформации сдвига в статических задачах не дает значимого изменения решения, может показаться, что использование полусдвиговой теории при расчете тонкостенных стержней открытого профиля нерационально. Однако использование полусдвиговой теории позволяет разработать единый подход к расчету тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей [1].

Список литературы

1. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы: учеб. пособие. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.

2. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1962. – 476 с.

3. Александров А.В. Развитие метода конечных элементов для систем тонкостенных прямолинейных и криволинейных стержней; Рос. акад. архит. и строит. наук // Вестник отделения строительных наук. – 2007. – № 11. – С. 40–47.

4. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. – 568 с.

5. Дьяков С.Ф. Динамический расчет тонкостенных конструкций с учетом сдвиговых деформаций: дис. ... магистра. – СПб., 2010. – 41 с.

Получено 15.09.2011