УДК 539.30

Р.О. Вологжанин[1], О.Ю. Вологжанин[2], А.П. Рыбаков[1]

[1] Пермский национальный исследовательский политехнический университет;
[2] Пермский военный институт внутренних войск МВД РФ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДЛИНЕННОГО ТЕЛА С ПРЕГРАДОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ НОРМАЛЬНОМ СОУДАРЕНИИ

В статье рассмотрена модель твердого тела применяемая для описания взаимодействия ударника с панелью бронежилета. Рассмотрено взаимодействие жесткопластического ударника с преградой конечной толщины.

Ключевые слова: полубесконечная и конечная преграды, распространение волн в преграде, уравнение Бесселя.

1. Общая характеристика взаимодействия

Рассмотрим процесс взаимодействия с преградой удлиненного тела, представляющего собой стержень длиной l, с квадратным поперечным сечением $\delta \times \delta$.

Нормальным считаем соударение, при котором скорость тела направлена перпендикулярно к поверхности преграды, а в контакт с ней вступает одна из граней тела.

Преграда называется полубесконечной, если ее тыльная поверхность не влияет на процесс внедрения тела; конечной толщины – если тыльная поверхность преграды оказывает значительное влияние на процесс взаимодействия в течение почти всего времени движения твердого тела в материале преграды.

Материал преграды полагаем жесткопластическим без упрочнения. Материал стержня – жесткопластическим или жестким.

В момент соударения в пластическом материале стержня и преграды начинают распространяться волны, за которыми материал ведет себя как жесткий. Для жесткого стержня волновым процессом в нем пренебрегаем. Введем обозначения:

X – лагранжева координата, отсчитываемая от плоскости соударения в направлении внедрения;

t – время;

$t = 0$ – момент соударения;

u – смещение плоскости контакта в направлении внедрения;

$V = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ – скорость плоскости контакта;

V_0 – скорость тела в момент соударения;

ρ, C_p, σ_s – характеристики материала тела: плотность, скорость пластической волны, предел текучести при сжатии;

ρ, C_p, σ_{s_1} – аналогичные характеристики материала преграды;

$\tau = \dfrac{\sigma_{s_1}}{2}$ – предел текучести при сдвиге материала преграды;

σ, σ_1 – напряжения за пластическими волнами соответственно в теле и преграде;

S_1 – площадь поверхности контакта;

S_2 – площадь боковой поверхности пробки, находящейся в контакте с остальной частью преграды;

h_1 – толщина преграды.

Уравнение движения жестких масс тела и преграды, вовлеченных в движение, можно записать в виде

$$\left(m + m_1\right)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = F\sigma + F\sigma_1 + F\tau_1. \quad (1)$$

Здесь m, m_1 – массы тела и преграды, вовлеченные в движение;

$F\sigma, F\sigma_1$ – силы, определяемые напряжением за пластическими волнами;

$F\tau_1$ – сила сопротивления, определяемая касательным напряжением, действующим на боковой поверхности пробки.

Для жесткого тела:

$$m = \rho \cdot l \cdot \delta^2, \quad F_\sigma = 0. \quad (2)$$

В случае когда материал тела считается жесткопластическим,

$$m = \begin{cases} \rho S_1 C_p t & \text{при } \ 0 \le t \le \dfrac{\delta}{C_p}, \\ \rho S_1 \delta & \text{при } \ t > \dfrac{\delta}{C_p}, \end{cases}$$

$$F_\sigma = \begin{cases} S_1\left(\rho C_p\left(V_0 - V\right) - \sigma_s\right) & \text{при } \ 0 \le t \le \dfrac{\delta}{C_p}, \\ 0 & \text{при } \ t > \dfrac{\delta}{C_p}. \end{cases} \quad (3)$$

Для полубесконечной преграды:

$$
\begin{aligned}
&m_1 = \rho_1 S_1 C_{p1} t,\\
&F_{\sigma 1} = -S_1\left(\rho_1 C_{p1} V - \sigma_{S1}\right),\\
&F_{\tau 1} = -S_2 \tau,\\
&S_1 = l\delta,\\
&S_2 = 2\left(l+\delta\right)\left(C_{p1} t - u\right).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Для преграды конечной толщины:

$$
m = \begin{cases} \rho_1 S_1 C_{p1} t & \text{при } 0 \le t \le \dfrac{h_1}{C_{p1}},\\ \rho_1 S_1 h_1 & \text{при } t > \dfrac{h_1}{C_p}, \end{cases}
$$

$$
F_{\sigma 1} = \begin{cases} -S_1\left(\rho C_{p1} V - \sigma_{s1}\right) & \text{при } 0 \le t \le \dfrac{h_1}{C_{p1}},\\ 0 & \text{при } t > \dfrac{h_1}{C_{p1}}, \end{cases}
\tag{5}
$$

$$
F_{\tau 1} = -S_2 \tau,
$$

$$
S_2 = \begin{cases} 2\left(l+\delta\right)\left(C_p t - u\right) & \text{при } 0 \le t \le \dfrac{h}{C_{p1}},\\ 2\left(l+\delta\right)\left(h_1 - u\right) & \text{при } t > \dfrac{h}{C_{p1}}. \end{cases}
$$

Момент времени $t = \dfrac{\delta}{C_p}$ соответствует выходу пластической волны в теле на грань, противоположную поверхности контакта, при $t = \dfrac{h_1}{C_{p1}}$ – пластическая волна в преграде конечной толщины выходит на ее тыльную поверхность.

Начальные условия уравнения (1) имеют вид

$$
T = 0,\ u = 0,\ v = v_0,
\tag{6}
$$

где $v_0 = V_0$ в случае жесткого тела.

Для жесткопластического тела:

$$v_0 = \frac{\rho \cdot C_p V_0 - \sigma_s + \sigma_{s1}}{\rho C_p + \rho_1 C_{p1}}. \tag{7}$$

При $V_0 \le \left(\left|\sigma_{s1}\right| - \left|\sigma_s\right|\right)\rho C_p$ тело останавливается в момент соударения.

Время окончания процесса взаимодействия определяется условием

$$t = t_k, \quad v\left(t_k\right) = 0 \tag{8}$$

в случае полубесконечной преграды и

$$t_k = \min\left(t_{k1}, t_{k2}\right); \quad t_{k1} : v\left(t_{k1}\right) = 0; \quad t_{k2} : U\left(t_{k2}\right) = h_1 \tag{9}$$

для преграды конечной толщины.

При этом $U\left(t_{k1}\right)$ – есть максимальная глубина внедрения.

2. Взаимодействие жесткопластического тела с преградой конечной толщины

Рассмотрим наиболее общий случай: взаимодействие жесткопластического тела с преградой конечной толщины.

При $0 \le t \le \min\left(\frac{\delta}{C_p}, \frac{h_1}{C_{p1}}\right)$ уравнение движения (1) запишется в виде

$$\left(l\delta\rho C_p t + l\delta\rho_1 C_{p1} t\right)\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2} = -l\delta\left(\rho_1 C_{p1} v - \sigma_{s1}\right) + l\delta\left(\rho C_p\left(v_0 - v\right) - \sigma_s\right) - 2\left(l + \delta\right)\left(C_{p1} t - U\right)\tau_1 \tag{10}$$

или

$$t\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} - aU = -C_{p1} a t + v_0, \tag{11}$$

где v_0 определяется выражением (7),

$$a = \frac{2\left(l + \delta\right)\tau_1}{l\delta\left(\rho C_p + \rho_1 C_{p1}\right)}.$$

Следующей заменой искомой функции независимой переменной

$$z^2 = 4at; \; w = U + C_{p1} t + \frac{v_0}{a} - \frac{C_{p1}}{a} \tag{12}$$

уравнение (11) приводится к модифицированному уравнению Бесселя

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - w = 0, \tag{13}$$

решение которого имеет вид

$$w = A_1 I_0(z) + B_1 K_0(z), \tag{14}$$

где I_0, K_0 – функции Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка первого и второго рода.

Согласно (12) выражение для смещения можно записать в виде

$$U = A_0 I_0(z) + B_1 K_0(z) + C_{p1}t - \frac{v_0}{a} + \frac{C_{p1}}{a}, \tag{15}$$

Для производных функций Бесселя имеем соотношения

$$I_0'(z) = I_1(z); \quad K_0'(z) = -K_1(z),$$

где I_1, K_1 – функции Бесселя мнимого аргумента первого порядка.

Дифференцируя (15), найдем скорость движения плоскости контакта:

$$v = \frac{2a}{z}\left(A_1 I_1(z) - B_1 K_1(z)\right) + C_{p1}, \tag{16}$$

где согласно (12) $z = 2\sqrt{at}$, а постоянные A_1 и B_1 определяются условием (7).

Предположим, что $\frac{\delta}{C_p} < \frac{h_1}{C_{p1}}$. Уравнение движения в промежуток времени $\frac{\delta}{C_p} \le t \le \frac{h_1}{C_{p1}}$ записывается в виде

$$\left(\rho l \delta^2 + l\delta\rho_1 C_{p1} t\right)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = l\delta\left(-\rho_1 C_{p1} v + \sigma_{s1}\right) - 2\left(l + \delta\right)\left(C_{p1}t - u\right)\tau_1 \tag{17}$$

или

$$\left(t + w\right)\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - a_1 u = -C_{p1} a_1 t + C_1, \tag{18}$$

где

$$w = \frac{\rho\delta}{\rho C_{p1}}, \; a_1 = \frac{2\left(l + \delta\right)}{l\delta\rho_1 C_{p1}}, \; C_1 = \frac{\sigma_{s1}}{\rho_1 C_{p1}}.$$

Заменой переменных

$$z^2 = 4a_1\left(t + w\right), \quad w = u - C_{p1}t + \frac{C_1}{a_1} - \frac{C_{p1}}{a_1} \tag{19}$$

уравнение (18) приводится к модифицированному уравнению Бесселя (13).

Таким образом, для смещения и скорости имеем выражения

$$u = A_2 I_0(z) + B_2 K_0(z) + C_{p1} t - \frac{C_1}{a_1} + \frac{C_{p1}}{a_1}, \tag{20}$$

$$v = \frac{2a_1}{z}\left[A_2 I_1(z) - B_2 K_1(z)\right] + C_{p1}, \tag{21}$$

где согласно (19) $z = \sqrt{2a_1(t+w)}$, а постоянная A_2 и B_2 определяются из решений (15) и (16) при $t = \frac{\delta}{C_p}$.

При $\frac{\delta}{C_{p1}} > \frac{h_1}{C_{p1}}$ уравнение движения в промежуток времени $\frac{\delta}{C_{p1}} \le t \le \frac{h_1}{C_{p1}}$ запишется в виде

$$\left(l\delta C_p t\rho + l\delta\rho_1 h_1\right)\frac{d^2u}{dt^2} = l\delta\left(-\rho_1 C_p\left(v_0 - v\right) + \sigma_s\right) - 2\left(l+\delta\right)\left(h_1 - u\right)\tau_1 \tag{22}$$

или

$$\left(t+w\right)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - a_2 u = C_2, \tag{23}$$

где

$$w = \frac{h_1\rho}{\rho C_p}, \quad a_2 = \frac{2\left(l+\delta\right)\tau_1}{l\delta\rho_1 C_p}, \quad C_2 = \frac{-l\delta\rho C_p V_0 + l\delta\sigma_s - 2\left(l+\delta\right)h_1\tau_1}{l\delta\rho C_p}$$

Заменой переменных

$$u = w - \frac{C_2}{a_2}, \quad z = a_2\left(t + w_1\right) \tag{24}$$

уравнение (23) приводится к виду

$$z\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - w = 0. \tag{25}$$

Посредством подстановки $z = -\frac{y^2}{4}$ уравнение (25) преобразуется в уравнение Бесселя частного вида (n=0):

$$y^2\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} + yw = 0. \tag{26}$$

Решение этого уравнения записывается в виде

$$w(y) = A_3 I_0(y) + B_3 I_0(y). \tag{27}$$

Следовательно, смещение представимо функцией

$$u = A_3 I_0\left(y\right) + B_3 I_0\left(y\right) - \frac{C_2}{a_2}; \quad -y^2 = 4a^2\left(t + w_1\right). \tag{28}$$

Постоянные A_3 и B_3 в этом решении определяются из системы (15), (16) при $t = \dfrac{h_1}{C_{p1}}$ Рассмотрим теперь промежуток времени

$$\max\left(\frac{\delta}{C_p}, \frac{h_1}{C_{p1}}\right) \le t \le t_k.$$

Уравнение движения имеет вид

$$\left(l\delta^2\rho + l\delta h_1\rho_1\right)\frac{d^2u}{dt^2} = -2\left(l + \delta\right)\left(h_1 - u\right)\tau_1 \tag{29}$$

или

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = g\left(u - h_1\right), \tag{30}$$

где

$$g = \frac{2\left(l + \delta\right)\tau_1}{l\delta^2\rho + l\delta h_1\rho_1}.$$

Уравнение (30) представлено следующим образом:

$$v\frac{dv}{du} = g\left(u - h_1\right). \tag{31}$$

Интеграл уравнения (31) имеет вид

$$v^2 - v^2\left(\frac{\delta}{C_{p1}}\right) = g\left[\left(h_1 - u\right)^2 - \left(h_1 - u\left(\frac{\delta}{C_p}\right)\right)^2\right] \tag{32}$$

при $\dfrac{h_1}{C_{p1}} < \dfrac{\delta}{C_p}$ или

$$v^2 - v^2\left(\frac{h_1}{C_{p1}}\right) = g\left[\left(h_1 - u\right)^2 - \left(h_1 - u\left(\frac{h_1}{C_{p1}}\right)\right)\right]^2 \tag{33}$$

при условии $\frac{h_1}{C_{p1}} > \frac{\delta}{C_p}$. Значения $u\left(\frac{\delta}{C_p}\right)$ и $v\left(\frac{\delta}{C_p}\right)$ определяются из решения (20), (21), значение $u\left(\frac{h_1}{C_{p1}}\right)$, $v\left(\frac{h_1}{C_{p1}}\right)$ – из (28).

Процесс взаимодействия может закончиться в любой из рассмотренных промежутков времени при снижении скорости тела до нуля.

В случае полубесконечной преграды смещение и скорость стержня определяются формулами (15), (16) при $0 \le t \le \frac{\delta}{C_p}$ и формулами (20), (21) при $t > \frac{\delta}{C_p}$.

Рассмотренная модель может успешно использоваться для проведения расчетов характеристик защитных свойств и синтеза материалов бронепанелей бронежилетов.

Получено 2.07.2011

R.O. Vologzhanin[1], O.Yu.Vologzhanin[2], A.P. Rybakov[1]

[1] The Perm national research polytechnic university

[2] Perm Military Institute of Internal Troops of the Ministry of Internal Affairs of the Russian Federation

INTERACTION OF THE EXTENDED BODY WITH A BARRIER OF A FINAL THICKNESS AT NORMAL IMPACT

The summary. In article the model of a firm body applied to the description of interaction of the drummer with the bullet-proof vest panel is considered.

Keywords: semi-infinite and final barriers, distribution of waves in a barrier, the equation of Besselja..