УДК 517.929

И.Ю. Колпаков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

О РАЗРЕШИМОСТИ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе получены условия разрешимости системы квазилинейных операторных уравнений. В качестве применения исследуется периодическая краевая задача для системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: теоремы существования, системы уравнений, квазилинейные операторные уравнения, неявные операторы.

Пусть B_1, B_2 и D – банаховы пространства. Рассмотрим систему квазилинейных операторных уравнений

$$\begin{cases} L_1 x = F_1 x, \\ L_2 x = F_2 x, \end{cases} \tag{1}$$

где $L_i : D \times D \to B_i$ – линейные ограниченные операторы, $F_i : D \times D \to B_i$ – непрерывные операторы $i = 1,2$ и $x = \{x_1, x_2\} \in D \times D$. Норму на декартовом произведении $D^2 = D \times D$ определим равенством $\|x\|_{D^2} = \|x_1\|_D + \|x_2\|_D$.

Отметим, что запись в виде системы (1) допускают многие классы краевых задач.

Полагая

$$L_1 x = L_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L_1 \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = L_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + L_1 \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Lambda_1 x_1 + \Lambda_2 x_2 ,$$

$$L_2 x = L_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L_2 \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \right] = L_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \Lambda_3 x_1 + \Lambda_4 x_2 ,$$

определим матричный оператор $\Lambda : D^2 \to B_1 \times B_2$:

$$\Lambda x = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Lambda_3 & \Lambda_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 x_1 + \Lambda_2 x_2 \\ \Lambda_3 x_1 + \Lambda_4 x_2 \end{pmatrix},$$

где $\Lambda_1 : D \to B_1$, $\Lambda_2 : D \to B_1$, $\Lambda_3 : D \to B_2$, $\Lambda_4 : D \to B_2$. Откуда следует, что линейные операторы L_i имеют вид $L_1 = \{\Lambda_1, \Lambda_2\} : D^2 \to B_1$,

$L_2 = \{\Lambda_3, \Lambda_4\} : D^2 \to B_2$. Кроме того, обозначим через $\Phi : D^2 \to B_1 \times B_2$ оператор:

$$\Phi x = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2) \\ F_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (1) можно представить в виде одного операторного уравнения

$$\Lambda x = \Phi x. \qquad (2)$$

Такое представление в некоторых случаях позволяет получить более конструктивные условия разрешимости, учитывающие особенности каждого из уравнений системы (1) и представления пространства D^2.

Приведем далее необходимые определения и конструкции, которые используются в последующем.

Для линейного оператора $\Lambda : X \to Y$ через $R(\Lambda)$ и $\ker\Lambda$ соответственно обозначим образ и ядро оператора Λ.

Ниже предполагается, что операторы L_1 и L_2 нетеровы, из этого следует, что оператор Λ нетеров и пространства D^2, $B_1 \times B_2$ представляют собой прямые топологические суммы замкнутых подпространств $D^2 = D_0 \oplus \ker\Lambda$ и $B_1 \times B_2 = R(\Lambda) \oplus Y_0$. При этом ядро оператора Λ есть пересечение ядер операторов L_i, то есть $\ker\Lambda = \ker L_1 \cap \ker L_2$. Отсюда следует, что любой элемент x пространства D^2 можно представить в виде $x = \chi + u$, где $\chi \in D_0$, $u \in \ker\Lambda$.

Пусть $P : D^2 \to D^2$ – проектор на ядро $\ker\Lambda$, т.е. $P^2 = P$. Так как оператор P является матричным оператором, то его можно записать в виде

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix},$$

где $P_i : D \to D$ и их вид определяется из определения проектора и равенства $\Lambda P x = 0$. С учетом представления операторов Λ и P получим

$$\Lambda_1 P_1 + \Lambda_2 P_3 = 0,$$
$$\Lambda_1 P_2 + \Lambda_2 P_4 = 0,$$
$$\Lambda_3 P_1 + \Lambda_4 P_3 = 0,$$
$$\Lambda_3 P_2 + \Lambda_4 P_4 = 0.$$

Далее обозначим через $Q : B_1 \times B_2 \to B_1 \times B_2$ – проектор на образ $R(\Lambda)$ и $Q^c = I - Q$ – соответствующий дополнительный проектор:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_3 & Q_4 \end{pmatrix}, \; Q^c = \begin{pmatrix} Q_1^c & Q_2^c \\ Q_3^c & Q_4^c \end{pmatrix} = I - Q = \begin{pmatrix} I - Q_1 & -Q_2 \\ -Q_3 & I - Q_4 \end{pmatrix},$$

где $Q_1 : B_1 \to B_1$, $Q_2 : B_2 \to B_1$, $Q_3 : B_1 \to B_2$, $Q_4 : B_2 \to B_2$.

Определение [1]. Оператор $K_p : R(\Lambda) \to X$ называется *обобщенно обратным* к оператору $\Lambda : X \to Y$, *ассоциированным с проектором P,* если справедливы равенства:

1) $\Lambda K_p y = y$ для любого $y \in R(\Lambda)$;

2) $K_p \Lambda x = P^c x$ для любого $x \in X$;

3) $P^c K_p y = K_p y$ для любого $y \in R(\Lambda)$.

Условимся в дальнейшем обобщенно обратный к Λ оператор K_p записывать просто K.

Из нетеровости оператора Λ следует существование обобщенно обратного оператора $K : R(\Lambda) \subset B_1 \times B_2 \to D_0 \subset D^2$, соответствующего проектору P, который имеет представление

$$K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix},$$

где операторы $K_1 : B_1 \to D$, $K_2 : B_2 \to D$, $K_3 : B_1 \to D$, $K_4 : B_2 \to D$.

Введем понятие производной оператора Φ аналогично тому, как вводится понятие производной от многомерной функции в [2].

Лемма. Пусть операторы F_1 и F_2 дифференцируемы по Фреше, тогда оператор $\Phi : D^2 \to B_1 \times B_2$ дифференцируем по Фреше, и его производная в точке x_0 $\Phi'(x_0) = \begin{pmatrix} F'_{1,1}(x_0) & F'_{1,2}(x_0) \\ F'_{2,1}(x_0) & F'_{2,2}(x_0) \end{pmatrix} : D^2 \to B_1 \times B_2$, где $F'_{i,j}(x_0) : D^2 \to B_i$ – частная производная i-й функции по j-му аргументу, то есть $F'_{i,j}(x_0) = \dfrac{\partial F_i(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_j}$ и $x_0 = \{x_1^0, x_2^0\}$.

Поскольку производная оператора $\Phi: D_0 \oplus \ker\Lambda \to B_1 \times B_2$ в точке $x_0 = (\chi_0, u_0)$ является линейным ограниченным оператором и $\Phi'(\chi_0, u_0): D_0 \oplus \ker\Lambda \to B_1 \times B_2$,

$$\Phi'(\chi_0, u_0) = \begin{pmatrix} F'_{1,1}(\chi_0, u_0) & F'_{1,2}(\chi_0, u_0) \\ F'_{2,1}(\chi_0, u_0) & F'_{2,2}(\chi_0, u_0) \end{pmatrix},$$

то из [3] следует, что линейный ограниченный оператор $\Phi'(\chi_0, u_0)$, действующий из прямой топологической суммы $D_0 \oplus \ker\Lambda$, можно представить в виде суммы операторов:

$$\Phi'(\chi_0, u_0) = \Phi'_\chi(\chi_0, u_0) + \Phi'_u(\chi_0, u_0),$$

где $\Phi'_\chi(\chi_0, u_0): D_0 \to B_1 \times B_2$, $\Phi'_u(\chi_0, u_0): \ker\Lambda \to B_1 \times B_2$ и

$$\Phi'_\chi(\chi_0, u_0) = \begin{pmatrix} F'_{1,1\chi}(\chi_0, u_0) & F'_{1,2\chi}(\chi_0, u_0) \\ F'_{2,1\chi}(\chi_0, u_0) & F'_{2,2\chi}(\chi_0, u_0) \end{pmatrix},$$

$$\Phi'_u(\chi_0, u_0) = \begin{pmatrix} F'_{1,1u}(\chi_0, u_0) & F'_{1,2u}(\chi_0, u_0) \\ F'_{2,1u}(\chi_0, u_0) & F'_{2,2u}(\chi_0, u_0) \end{pmatrix},$$

где операторы $F'_{i,j\chi}(\chi_0, u_0): D_0 \to B_i$, $F'_{i,ju}(\chi_0, u_0): \ker\Lambda \to B_i$.

В дальнейшем нам потребуется оператор $Q^c\Phi'_u(\theta)$. Он получается применением дополнительного проектора Q^c к только что найденному представлению производной $\Phi'_u(x_0)$ в нуле θ пространства D^2.

Тогда

$$Q^c\Phi'_u(\theta) = \begin{pmatrix} Q_1^c F'_{1,1u}(\theta) + Q_2^c F'_{2,1u}(\theta) & Q_1^c F'_{1,2u}(\theta) + Q_2^c F'_{2,2u}(\theta) \\ Q_3^c F'_{1,1u}(\theta) + Q_4^c F'_{2,1u}(\theta) & Q_3^c F'_{1,2u}(\theta) + Q_4^c F'_{2,2u}(\theta) \end{pmatrix}.$$

Сформулируем теорему о разрешимости системы квазилинейных операторных уравнений (1), доказательство которой опирается на результаты работы [4].

Теорема 1. Пусть операторы L_1 и L_2 – нетеровы, K – обобщенно обратный к Λ оператор. Операторы F_1 и F_2 вполне непрерывны, дифференцируемы, и их производные непрерывны в точке $\theta = (0;0)$. Пусть далее $\{F_1\theta, F_2\theta,\} \in R(\Lambda)$, оператор $Q^c\Phi'_u(\theta)$ непрерывно обратим и справедливы следующие оценки:

1) $\left\|\left[Q^c\Phi'_u(\theta)\right]^{-1}\right\| \le m;$

2) $\|Q^c\| \; \|F'_{i,ju}(\chi,u) - F'_{i,ju}(0,0)\|_{B_i} \le c_{ij}\left(\|\chi\|_{D^2} + \|u\|_{D^2}\right), \; \forall(\chi,u) \in D^2;$

3) $\|Q^c\| \; \|F'_i(\chi,0) - F'_i(0,0)\|_{B_i} \le k_i\|\chi\|_{D^2}, \; \forall\chi \in D_0;$

4) $\|F_1x\|_{B_1} \le a_1 + b_1\|x\|_D, \; \|F_2x\|_{B_2} \le a_2 + b_2\|x\|_D;$

5) $b\|K\| < 1$, где $\|K\| = \max\{\|K_1\| + \|K_3\|, \|K_2\| + \|K_4\|\};$

6) $\dfrac{\|K\|(a+b\rho)}{1-b\|K\|} \le \dfrac{1}{mc\left(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk}\right)^2}$, где $c = \max\{c_{11}+c_{21}, c_{12}+c_{22}\}$,

$k = k_1 + k_2$, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$ и $\rho = \dfrac{\sqrt{mk}}{mc\left(\sqrt{mk+1}+\sqrt{mk}\right)}$.

Тогда существует хотя бы одно решение системы квазилинейных операторных уравнений (1).

Доказательство. Приведем основные этапы доказательства. Сначала нужно воспользоваться теоремой о неявном операторе [4], из которой следует существование непрерывного оператора $T : D_0 \to \ker\Lambda$, который является решением уравнения $Q^c\Phi(\chi+u) = 0$ на шаре $\overline{S_R(0)} \subset D_0$ и $T\chi = u$, откуда следует, что $\Phi(I+T)\left(\overline{S_R(0)}\right) \subset R(\Lambda)$. Это следует из непрерывной обратимости оператора $Q^c\Phi'_u(\theta)$ и условий 1)–3) теоремы.

Далее нужно показать, что для любого χ, лежащего на сфере $\sigma_R(0) \subset D_0$ радиусом R с центром в нуле и $\lambda \in (0;1)$, выполняется неравенство $\chi \ne \lambda K\Phi(I+T)\chi$. Откуда из теоремы существования с условием на границе [4] следует существование решения уравнения $\chi = K\Phi(I+T)\chi$ на шаре $\overline{S_R(0)} \subset D_0$. Это следует из условий 4), 5), 6) и цепочки неравенств

$$\|K\Phi(I+T)\chi\| \le \|K\| \cdot \|\Phi(I+T)\chi\| \le \|K\|\left(a + b\left(\|\chi\| + \|T\chi\|\right)\right) \le$$
$$\le \|K\|\left(a + b(R+\rho)\right) \le R.$$

Таким образом, как мы показали, из условий данной теоремы следует разрешимость системы (1).

Теорема доказана.

Рассмотрим периодическую краевую задачу для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + f_1(t, x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + f_2(t, x_1, x_2), \\ x_i(0) = x_i(1),\ i = 1,2, \end{cases} \tag{3}$$

где $x_i = x_i(t),\ t \in [0;1]$, функции $f_i : [0;1] \times R^2 \to R$ удовлетворяют условию Каратеодори, a_{ij} – константы, $D_p[0;1]$ – банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x_i : [0;1] \to R$, таких, что $\dot{x}_i \in L_p[0;1]$, с нормой: $\|x_i\|_{D_p} = |x_i(0)| + \|\dot{x}_i\|_{L_p}$.

Обозначим через D и B_i пространства $D = \{ x_i \in D_p[0;1] \mid x_i(0) = x_i(1) \}$ и $B_i = L_p[0;1]$ соответственно $i = 1,2$. Запишем систему (3) в виде одного операторного уравнения (2). Операторы Λ и Φ для данной системы имеют вид

$$\Lambda x = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix},\ \Phi x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2) \\ f_1(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}.$$

Пусть $P : D^2 \to D^2$ – проектор на $\ker \Lambda$ определен следующим образом:

$$Px = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix},$$

тогда соответствующий обобщенно обратный оператор $K : B_1 \times B_2 \to D^2$ и дополнительный проектор $Q^c = I - Q$ имеют вид

$$K\cdot = \begin{pmatrix} \int_0^t \cdot\, ds & 0 \\ 0 & \int_0^t \cdot\, ds \end{pmatrix},\ Q^c \cdot = \begin{pmatrix} \int_0^1 \cdot\, ds & 0 \\ 0 & \int_0^1 \cdot\, ds \end{pmatrix}.$$

Определенные данным образом операторы K и Q^c имеют нормы меньше или равные единицы.

Сформулируем условия разрешимости для скалярной системы (3) на основе теоремы 1.

Теорема 2. Пусть функции $f_i(t, x_1, x_2)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, имеют частные производные по второму и третьему аргументам, которые непрерывны при $x_i = 0, i = 1,2$, $\int_0^1 f_i(s,0,0)ds = 0$ и справедливы оценки:

1) $\left\| \left[Q^c \Phi_u'(\theta) \right]^{-1} \right\| \le m,$

где $Q^c \Phi_u'(0) = \begin{pmatrix} a_{11} + \int_0^1 f_{1,1u}'(s,0,0)ds & a_{12} + \int_0^1 f_{1,2u}'(s,0,0)ds \\ a_{21} + \int_0^1 f_{2,1u}'(s,0,0)ds & a_{22} + \int_0^1 f_{2,2u}'(s,0,0)ds \end{pmatrix};$

2) $\left| f_{i,j}'(t, \bar{x}) - f_{i,j}'(t, \bar{\bar{x}}) \right| \le c_{ij} \left(|\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1| + |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| \right)$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2)$, $c = \max\{ c_{11} + c_{21}, c_{12} + c_{22} \}$;

3) $\left| f_i(t, \bar{x}) - f_i(t, \bar{\bar{x}}) \right| \le k_i \left(|\bar{x}_1 - \bar{\bar{x}}_1| + |\bar{x}_2 - \bar{\bar{x}}_2| \right|$, $k = \|A\| + k_1 + k_2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix};$

4) $|f_i(t, x_1, x_2)| \le a_i + b_i(|x_1| + |x_2|)$, $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$;

5) $b < 1$;

6) $\dfrac{a + b\rho}{1 - b} \le \dfrac{1}{mc\left(\sqrt{mk+1} + \sqrt{mk}\right)^2}$, где $\rho = \dfrac{\sqrt{mk}}{mc\left(\sqrt{mk+1} + \sqrt{mk}\right)}$.

Тогда существует хотя бы одно периодическое решение системы (3).

Рассмотрим частный случай системы (1), когда $f_1(t, x_1, x_2) = 0{,}1\sin(x_1 x_2 + 2\pi t)$, $f_2(t, x_1, x_2) = \operatorname{arctg}(x_1 + x_2)$, $a_{11} = 0,$ $a_{12} = a_{21} = 100, a_{22} = -1.$ Тогда, взяв в качестве начального радиуса $r = 6$, получим $m = 0{,}01$, $k = 101{,}4$, $c = 1{,}06$, $a = 1 + \dfrac{\pi}{2}$, $b = 0$. В этом случае будет выполняться 6-е условие теоремы 2 и, следовательно, существует периодическое решение системы (3) на шаре $\overline{S_6(0)} \subset D_p^2[0;1]$.

Библиографический список

1. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологически нетеровых операторов. – Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 1994. – 93 с.

2. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. – М.: Наука, 1972. – 624 с.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1965. – 752 с.

4. Колпаков И.Ю. О разрешимости квазилинейных операторных уравнений // Вестник ПГТУ. Математика и Прикладная математика. – Пермь, 2002. – С. 21–27.

Получено 01.07.2011

I.U. Kolpakov

Perm national research polytechnic university

ON SOLVABILITY OF SYSTEM OF THE QUASILINEAR OPERATOR EQUATIONS

In work conditions of solvability of system of the quasilinear operator equations are formulated. As application, the periodic boundary value problem for system of the differential equations is investigated.

Keywords: existence theorem, system of equations, quasilinear operator equations, implicit operators.