УДК 517.977

С.Ю. Култышев, Л.М. Култышева

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ЭПСИЛОН-МОДЕЛЕЙ РЕАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассматривается задача нахождения параметров дискретной эпсилон-модели реального объекта по результатам измерений (наблюдений) его входа и выхода. Получены теоремы о разрешимости и приближенной разрешимости этой задачи для некоторых видов дискретных моделей при прямых и косвенных измерениях входов и выходов моделируемых объектов.

Ключевые слова: идентификация, дискретные модели, реальные объекты, измерения входа и выхода, наблюдения.

Введение

Статья посвящена задаче нахождения параметров (коэффициентов) математической модели реального объекта по результатам измерений его входа и выхода. Как отмечается в [1], эта задача стала темой нескольких тысяч работ, полный обзор которых сделать практически невозможно. Поэтому мы ограничимся упоминанием нескольких основополагающих монографий [1–5], посвященных задаче идентификации. В этих книгах рассматриваются модели реальных объектов в форме отображений вход-выход и в форме дискретных и непрерывных уравнений, связывающих вход и выход этих объектов, зависящих от параметров (коэффициентов), которые надо определить по измерениям (наблюдениям) входа и выхода. Обычно задача идентификации сводится к нахождению вектора параметров модели, при котором достигается минимум нормы разности выходного сигнала объекта и модели. При этом обычно входной и выходной сигнал объекта считаются полностью известными. Но в ряде случаев известны лишь значения некоторых функционалов от этих сигналов, т.е. результаты косвенных измерений входа и выхода объекта. Кроме того, объект и его модель рассматриваются на отрезке времени $[\theta, T]$, а измерения входа и выхода объекта производятся на более узком отрезке времени $[\mu, \tau]$, где $\theta \le \mu < \tau < T$. В этом состоит сложность и новизна рассматриваемой в этой статье постановки задачи идентификации. Цель работы состоит в получении эффективных теорем о разрешимости и приближенной разрешимости поставленной задачи идентификации для дискретных моделей реальных объектов.

1. Постановка задачи

Пусть R^n – пространство n-мерных векторов, компонентами которых являются действительные числа; Y, Z и W – нормированные пространства; $\|x\|$ – норма элемента x в том пространстве, которому он принадлежит.

Пусть имеется реальный объект, который рассматривается на отрезке времени $[\theta, T]$. Через $\bar{v}(t)$ обозначим m-мерный вектор параметров, характеризующих внешние воздействия на объект в момент времени $t \in [\theta, T], \bar{v}(t) \in R^m$, а через $\bar{x}(t)$ – n-мерный вектор параметров, характеризующих реакцию объекта на внешние воздействия в момент t, $\bar{x}(t) \in R^n$.

Разобьем отрезок $[\theta, T]$ на N частей точками $t_i = \theta + i\Delta$, $i = \overline{0, N}, t_0 = \theta,$ $t_N = \theta + N\Delta, \Delta = \dfrac{T - \theta}{N}.$

Введем обозначения

$$\bar{v}_i = \bar{v}(t_i), i = \overline{0, N}, \bar{x}_i = \bar{x}(t_i), \bar{v} = \{\bar{v}_0, \bar{v}_1, ..., \bar{v}_N\}, \bar{x} = \{\bar{x}_0, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_N\}.$$

Векторы $\bar{v}$ и $\bar{x}$ будем называть входом и выходом объекта соответственно. Будем считать, что $\bar{v} \in V[0, N], \bar{x} \in X[0, N]$ где $V[0, N]$ и $X[0, N]$ – некоторые подмножества из $R^{m(N+1)}$ и $R^{n(N+1)}$ соответственно.

Определение 1. *Уравнение* $F(x, v) = 0$ *будем называть дискретной* ε*-моделью объекта, если:*

1) $F : X[0, N] \times V[0, N] \to W$ *– непрерывный оператор;*

2) *выполняется неравенство* $\|F(\bar{x}, \bar{v})\| \le \varepsilon,$ *где* ε *– достаточно малое положительное число или нуль.*

Обычно ε-модель строится из естественно-научных законов в виде $\bar{F}(x, v, w) = 0$, где ω – неизвестный вектор параметров (коэффициентов) модели, $\omega \in \Omega \subseteq B$, B – некоторое нормированное пространство, $\overline{F}: X[0,N] \times V[0,N] \times \Omega \to W$ – непрерывный оператор, отражающий внутреннюю структуру объекта и удовлетворяющий определению 1 при некотором $\omega \in \Omega$.

Пусть далее $y = P(\overline{v}), z = Q(\overline{x})$ – измерения входа и выхода объекта, где $P: V[0,N] \to Y$ и $Q: X[0,N] \to Z$ – непрерывные операторы, $y \in Y, z \in Z$.

Задачу идентификации поставим следующим образом: *по известным* $y, z, P, Q, \overline{F}, \varepsilon$ *найти такое* $\omega \in \Omega$, *при котором* $\overline{F}(x, v, \omega) = 0$ *является дискретной* ε*-моделью объекта.*

2. Основные теоремы

Пусть далее дискретная ε-модель объекта при ε = 0 имеет вид

$$F_1(x,v) - F_2(x,v,\omega) = 0, \tag{1}$$

где $v \in V[0,N], x \in X[0,N], \omega \in \Omega \subseteq R^k, F_1: X[0,N] \times V[0,N] \to$ $\to W, F_1(x,v)(i) = \overline{F}_1\left(i, \overset{i}{\underset{0}{C}} x, \overset{i}{\underset{0}{C}} v\right), \overline{F}_1(i,\bullet,\bullet): X[0,i] \times V[0,i] \to R^p$ – непрерывный оператор при каждом $i \in [0,N] = \overline{0,N}, \overset{i}{\underset{0}{C}}$ – оператор, который каждому $x = \{x_0, ..., x_N\}$ ставит в соответствие $\overset{i}{\underset{0}{C}} x = \{x_0, ..., x_i\}$, где $x_j \in R^n, F_2: X[0,N] \times V[0,N] \times \Omega \to W, F_2(x,v,\omega)(i) = \overline{F}_2\left(i, \overset{i}{\underset{0}{C}} x, \overset{i}{\underset{0}{C}} v, \omega\right)$, $\overline{F}_2(i,\bullet,\bullet,\omega): X[0,i] \times V[0,i] \to R^p$ – непрерывный оператор при каждом $i \in [0,N]$ и при каждом $\omega \in \Omega$.

А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y = \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{v}, z = \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{x}, 0 < j < N, \tag{2}$$

где $Y = R^{m(j+1)}, Z = R^{n(j+1)}$.

Теорема 1. *Пусть задача идентификации для* (1), (2) *при* $\varepsilon = 0$ *разрешима, тогда для любого оператора* $\overline{Q}: R^{p(j+1)} \to R^k$ *уравнение*

$$\overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{F}_2\left(\bullet, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} z, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} y, \omega\right) = \overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{F}_1\left(\bullet, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} z, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} y\right) \tag{3}$$

имеет решение ω *в области* Ω.

Доказательство. Если задача идентификации для (1), (2) при $\varepsilon = 0$ разрешима, то существует такое $\overline{\omega} \in \Omega$, что $F_1(\overline{x}, \overline{v}) = F_2(\overline{x}, \overline{v}, \overline{\omega})$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}}$, получим равенство $\overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{F}_1(\overline{x}, \overline{v}) = \overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} F_2(\overline{x}, \overline{v}, \overline{\omega})$ или, что то же самое, $\overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{F}_1\left(\bullet, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} \overline{x}, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} \overline{v}\right) = \overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{F}_2\left(\bullet, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} \overline{x}, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} \overline{v}, \overline{\omega}\right)$. Далее, это равенство равносильно равенству $\overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{F}_1\left(\bullet, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} z, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} y\right) = \overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}} \overline{F}_2\left(\bullet, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} z, \overset{(\bullet)}{\underset{0}{C}} y, \overline{\omega}\right)$. Следовательно, $\omega = \overline{\omega}$ является решением уравнения (3). Таким образом, для любого оператора $\overline{Q}$ уравнение (3) имеет решение $\omega = \overline{\omega}$ в области Ω. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если задача идентификации для* (1), (2) *при* $\varepsilon = 0$ *разрешима, то существует такой оператор* $\overline{Q} : R^{p(j+1)} \to R^k$, *что уравнение* (3) *имеет решение* ω *в области* Ω.

Доказательство. В силу теоремы 1 для любого оператора $\overline{Q}$ уравнение (3) разрешимо относительно ω в области Ω. Следовательно, существует такой оператор $\overline{Q}$, при котором уравнение (3) разрешимо относительно ω в области Ω, что и требовалось доказать.

Следствие 2. *Если существует такой оператор* $\overline{Q}$, *что уравнение* (3) *неразрешимо относительно* ω *в области* Ω, *то задача идентификации для* (1), (2) *при* $\varepsilon = 0$ *неразрешима.*

Доказательство этого следствия получается отрицанием утверждения теоремы 1.

Теорема 1 и ее следствия дают необходимые условия разрешимости задачи идентификации для (1), (2) при $\varepsilon = 0$. А следующая теорема дает достаточные условия разрешимости этой задачи.

Теорема 2. *Пусть*

1) существует такое $\overline{\omega} \in \Omega$, *что выполняются все условия определения* 1 *для* $F(x, v) = F_1(x, v) - F_2(x, v, \overline{\omega})$ *при* $\varepsilon = 0$;

2) найдется такой оператор $\overline{Q} : R^{p(j+1)} \to R^k$, *что уравнение* (3) *имеет единственное решение* $\tilde{\omega}$ *в области* Ω.

Тогда задача идентификации для (1), (2) *при* $\varepsilon = 0$ *имеет единственное решение* $\omega = \overline{\omega}$.

Доказательство. В силу условия 1) существует такое $\overline{\omega} \in \Omega$, что выполняется равенство $F_1(\overline{x}, \overline{v}) = F_2(\overline{x}, \overline{v}, \overline{\omega})$. Применяя к обеим частям этого равенства оператор $\overline{Q} \overset{j}{\underset{0}{C}}$, получаем равенство (3) при $\omega = \overline{\omega}$. Но уравнение (3) имеет единственное решение $\omega = \tilde{\omega}$ в области Ω, следовательно, $\omega = \overline{\omega} = \tilde{\omega}$ – единственное решение задачи идентификации для (1),(2) при $\varepsilon = 0$. Теорема доказана.

Эту теорему иллюстрирует пример 1.

Пример 1. Пусть дискретная ε-модель (при $\varepsilon = 0$) объекта имеет вид

$$x_i - \omega_1 (v_{1i})^{\omega_2} (v_{2i})^{\omega_3} = 0, i = \overline{0,5}, \tag{4}$$

где $v_i = \{v_{1i}, v_{2i}\} \in \overline{V} = \{v_i \in R^2 : v_{1i} > 0, v_{2i} > 0\}$, $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \Omega = \{\omega \in R^3 : \omega_1 > 0, \omega_2 \in [0,1], \omega_3 \in [0,1]\}$, $x_i \in \overline{X} = \{x_i \in R^1 : x_i > 0\}$. А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$\left\{\begin{array}{l} y_i = \{y_{1i}, y_{2i}\} = \{\overline{v}_{1i}, \overline{v}_{2i}\} = \{100 + 2i, 50 + 3i\}, i = \overline{0,2} \\ z_i = \overline{x}_i = 2(100 + 2i)^{0.5}(50 + 3i)^{0.3}, i = \overline{0,2}, j = 2 \end{array}\right\}. \tag{5}$$

Возьмем $\overline{Q} : R^3 \to R^3, \overline{Q}(\tilde{x}) = \{\ln \tilde{x}_0, \ln \tilde{x}_1, \ln \tilde{x}_2\}$ при $\tilde{x}_0 > 0, \tilde{x}_1 > 0$, $\tilde{x}_2 > 0$ и $\overline{Q}(\tilde{x}) = 0$ при $\tilde{x}_0 \le 0$ или $\tilde{x}_1 \le 0$ или $\tilde{x}_2 \le 0$. Тогда уравнение (3) примет вид

$$\left\{\begin{array}{l} \ln \omega_1 + \omega_2 \ln y_{10} + \omega_3 \ln y_{20} = \ln z_0 \\ \ln \omega_1 + \omega_2 \ln y_{11} + \omega_3 \ln y_{21} = \ln z_1 \\ \ln \omega_1 + \omega_2 \ln y_{12} + \omega_3 \ln y_{22} = \ln z_2 \end{array}\right\}.$$

Это уравнение (система) имеет единственное решение $\tilde{\omega} = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3\} = \{2, 0.5, 0.3\}$ в области Ω. Следовательно, задача идентификации для (4), (5) при $\varepsilon = 0$ имеет единственное решение $\omega = \tilde{\omega} = \{2, 0.5, 0.3\}$. Пример закончен.

Замечание 1. Модель вида (4) встречается в экономике.

Пусть далее дискретная ε-модель имеет вид (1). Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть*

1) существует такое $\tilde{\omega} \in \Omega$, *что выполняются все условия определения* 1 *для* $F(x,v) = F_1(x,v) - F_2(x,v,\overline{\omega})$;

2) существует такой оператор $\overline{Q} : W \to H$, *что* $\left\| \overline{Q}(f_1) - \overline{Q}(f_2) \right\| \le c_1 \left\| f_1 - f_2 \right\|$, *где* $f_1 = F_1(\overline{x},\overline{v})$, $f_2 = F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega})$, $c_1 = \text{const} \ge 0$, H – *нормированное пространство*;

3) $\exists \tilde{\omega} = \arg\min\limits_{\omega \in \Omega} \left\| \bar{Q}F_1\left(\overline{x},\overline{v}\right) - \bar{Q}F_2\left(\overline{x},\overline{v},\omega\right) \right\|$;

4) $\exists G : H \to \Omega, \overline{\omega} = G(\overline{f}), \tilde{\omega} = G(\tilde{f})$, *где* $\overline{f} = \bar{Q}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \bar{Q}F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega})$, $\tilde{f} = \bar{Q}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \bar{Q}F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}), \left\| G(\overline{f}) - G(\tilde{f}) \right\| \le c_2 \left\| \overline{f} - \tilde{f} \right\|, c_2 = \text{const} \ge 0.$

Тогда $\left\| \overline{\omega} - \tilde{\omega} \right\| \le 2c_1 c_2 \varepsilon.$

Доказательство. В силу условий леммы1

$$\left\| \overline{f} \right\| = \left\| \bar{Q}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \bar{Q}F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}) \right\| \le c_1 \left\| F_1(\overline{x},\overline{v}) - F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}) \right\| \le c_1 \varepsilon,$$

$$\left\| \tilde{f} \right\| = \left\| \bar{Q}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \bar{Q}F_2(\overline{x},\overline{v},\tilde{\omega}) \right\| \le \left\| \bar{Q}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \bar{Q}F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}) \right\| \le$$

$$\le c_1 \varepsilon, \left\| \overline{\omega} - \tilde{\omega} \right\| = \left\| G(\overline{f}) - G(\tilde{f}) \right\| \le c_2 \left\| \overline{f} - \tilde{f} \right\| \le c_2 \left(\left\| \overline{f} \right\| - \left\| \tilde{f} \right\| \right) \le$$

$$\le 2c_1 c_2 \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Пусть далее $F_1(x,v)(i) = f_1(i,x_i,v_i), F_2(x,v,\omega)(i) = f_2(i,x_i,v_i,\omega)$, то есть дискретная ε-модель имеет вид

$$f_1(i,x_i,v_i) - f_2(i,x_i,v_i,\omega) = 0, i = \overline{0,N}, \tag{6}$$

где $f_1 : [0,N] \times \overline{X} \times \overline{V} \to R^p$ и $f_2 : [0,N] \times \overline{X} \times \overline{V} \times \Omega \to R^p$ – непрерывные вектор-функции, $\omega \in \Omega \subseteq R^k, \overline{X} \subseteq R^n, \overline{V} \subseteq R^m$. А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$y = \overset{j}{\underset{\mu}{C}}\,\overline{v}, z = \overset{j}{\underset{\mu}{C}}\,\overline{x}, 0 \le \mu < N. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть*

1) $\exists \overline{\omega} \in \Omega$: *выполняются все условия определения* 1 *для* $F(x,v) = F_1(x,v) - F_2(x,v,\overline{\omega})$ *(для модели* (6));

2) $\exists \tilde{Q} : R^{p(j-\mu+1)} \to H, \left\| \tilde{Q} \overset{j}{\underset{\mu}{C}} \hat{f}_1 - \tilde{Q} \overset{j}{\underset{\mu}{C}} \hat{f}_2 \right\| \le c_1 \left\| \hat{f}_1 - \hat{f}_2 \right\|$, *где* $\hat{f}_1 = F_1(\overline{x},\overline{v})$, $\hat{f}_2 = F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}), c_1 = \text{const} \ge 0$, H – *нормированное пространство;*

3) $\exists\tilde{\omega} = \arg\min_{\omega\in\Omega}\left\|\tilde{Q}\overset{j}{\underset{\mu}{C}}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \tilde{Q}\overset{j}{\underset{\mu}{C}}F_2(\overline{x},\overline{v},\omega)\right\|$;

4) $\exists G: H\to\Omega, \overline{\omega} = G(\overline{f}), \tilde{\omega} = G(\tilde{f}), \left\|G(\overline{f}) - G(\tilde{f})\right\| \le c_2\left\|\overline{f} - \tilde{f}\right\|$, *где*

$\overline{f} = \tilde{Q}\overset{j}{\underset{\mu}{C}}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \tilde{Q}\overset{j}{\underset{\mu}{C}}F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}), \tilde{f} = \tilde{Q}\overset{j}{\underset{\mu}{C}}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \tilde{Q}\overset{j}{\underset{\mu}{C}}F_2(\overline{x},\overline{v},\tilde{\omega})$,

$c_2 = \text{const} \ge 0$.

Тогда $\|\overline{\omega} - \tilde{\omega}\| \le 2c_1c_2\varepsilon$, *где* $\overline{\omega}$ *– искомый вектор параметров модели в задаче идентификации для* (6),(7), *а* $\tilde{\omega}$ *– приближенное решение этой задачи.*

Доказательство. Достаточно отметить, что при $\overline{Q} = \tilde{Q}\overset{j}{\underset{\mu}{C}}$ выполняются условия леммы 1.

Эту теорему иллюстрирует пример 2.

Пример 2. Пусть дискретная ε-модель имеет вид

$$x_i - \omega_1(v_{1i})^{\omega_2}(v_{2i})^{\omega_3} = 0, i = \overline{0,6}, \quad (8)$$

где $v_i = \{v_{1i}, v_{2i}\} \in \overline{V} = \{v_i \in R^2 : v_{1i} \in [100,112], v_{2i} \in [50,68]\}, x_i \in \overline{X} =$
$= \{x_i \in R^1 : x_i \in [1,22900]\}$;

$$\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \in \Omega\{\omega \in R^3 : \omega_1 \in [1,3], \omega_2[0,1], \omega_3[0,1]\}, \varepsilon = 0.0000001.$$

А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$\left\{\begin{array}{l} y_i = \{y_{1i}, y_{2i}\} = \{\overline{v}_{1i}, \overline{v}_{2i}\} = \{100+2i, 50+3i\}, i = \overline{1,5} \\ z_i = \overline{x}_i = 2(100+2i)^{0,5}(50+3i)^{0,3}, i = \overline{1,5}, \mu = 1, j = 5 \end{array}\right\}.$$

Возьмем

$$\tilde{Q}: R^5 \to R^5, \tilde{Q}(x) = \left\{\begin{array}{c} (\ln x_1, \ln x_2, \ln x_3, \ln x_4, \ln x_5), \text{ при } x_i > 0, i = \overline{1,5} \\ 0 \text{ при } x_i \le 0, i = \overline{1,5} \end{array}\right\},$$

где $x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x\}$. Тогда $\left\|\tilde{Q}\overset{5}{\underset{1}{C}}\hat{f}_1 - \tilde{Q}\overset{5}{\underset{1}{C}}\hat{f}_2\right\| \le \left\|\hat{f}_1 - \hat{f}_2\right\|$, где $\tilde{f}_{1i} = \overline{x}_i$,

$\tilde{f}_{2i} = \overline{\omega}_1(\overline{v}_{1i})^{\overline{\omega}_2}(\overline{v}_{2i})^{\overline{\omega}_3}, i = \overline{0,6}, \left\|\hat{f}\right\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{6}(\hat{f}_i)^2}$, т.е. $c_1 = 1$. Далее,

$$\tilde{\omega} = \arg\min_{\omega\in\Omega}\left\|\tilde{Q}\overset{5}{\underset{1}{C}}F_1(\overline{x},\overline{v}) - \tilde{Q}\overset{5}{\underset{1}{C}}F_2(\overline{x},\overline{v},\omega)\right\| = \{\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3\} = \{2, 0.5, 0.3\},$$

где $F_1(x,v)(i) = x_i$, $F_2(x,v,\omega)(i) = \omega_1(v_{1i})^{\omega_2}(v_{2i})^{\omega_3}$. Далее возьмем $G : R^5 \to\to \Omega$, где $\omega = G(f)$ – решение системы

$$\begin{cases} \ln\omega_1 + \omega_2 \ln y_{11} + \omega_3 \ln y_{21} = \ln z_1 - f_1, \\ \ln\omega_1 + \omega_2 \ln y_{12} + \omega_3 \ln y_{22} = \ln z_2 - f_2, \\ \ln\omega_1 + \omega_2 \ln y_{13} + \omega_3 \ln y_{23} = \ln z_3 - f_3, \end{cases}$$

а $f = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$. Тогда $G(f) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, где $\omega_1 = e^{\lambda_1}$, $\omega_2 = \lambda_2, \omega_3 = \lambda_3$, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = A^{-1}$ – матрица обратная к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \ln y_{11} & \ln y_{21} \\ 1 & \ln y_{12} & \ln y_{22} \\ 1 & \ln y_{13} & \ln y_{23} \end{pmatrix}, \bar{z}_* = \{\ln z_1, \ln z_2, \ln z_3\}, f_* = \{f_1, f_2, f_3\}.$$

Далее, $\left\|G(\bar{f}) - G(\tilde{f})\right\| = \left\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\right\|$, где $\bar{\omega} = \left\{e^{\bar{\lambda}_1}, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3\right\}, \tilde{\omega} = \left\{e^{\tilde{\lambda}_1}, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3\right\}$, $\bar{\lambda} = A^{-1}(\bar{z}_* - \tilde{f}_*)$, $\tilde{\lambda} = A^{-1}(\bar{z}_* - \tilde{f}_*)$. Причем $\left\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\right\| \le c_2 \left\|\bar{f} - \tilde{f}\right\|$, где $c_2 = 38190,7731$. В силу теоремы 3 $\left\|\bar{\omega} - \tilde{\omega}\right\| \le 2c_1c_2\varepsilon = 0,0076$. Выбранное $\varepsilon = 0,000001$ достаточно мало, так как $2c_1c_2\varepsilon = 0,0076 <$ $< 0,01\left\|\tilde{\omega}\right\| = 0,0208$. Пример закончен.

Пусть далее дискретная ε-модель имеет вид

$$F_1(x,v) - F_2(x,v,\omega) = 0, \tag{9}$$

где $F_1 : X[0,N] \times V[0,N] \to R^{p(N+1)}, F_1(x,v)(i) = f_1(i, x_i, v_i, \sum_{j=0}^{i} x_j, \sum_{j=0}^{i} v_j)$,

$f_1 : [0,N] \times \bar{X} \times \bar{V} \times R^n \times R^m \to R^p$ – непрерывная вектор-функция,

$F_2 : X[0,N] \times V[0,N] \times \Omega \to R^{p(N+1)}, F_2(x,v,\omega)(i) = f_2(i, x, v_i, \sum_{j=0}^{i} x_j, \sum_{j=0}^{i} v_j, \omega)$,

$f_2 : \left[0,N\right] \times \bar{X} \times \bar{V} \times R^n \times R^m \times \Omega \to R^p$ – непрерывная вектор-функция, $\omega \in \Omega \subseteq R^k$. А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$\left\{\begin{array}{l} y_i = \bar{v}_i, i = 2\xi, \xi = \overline{0,\eta}, 0 < 2\eta < N, \bar{y}_i = \sum_{i=0}^{i} \bar{v}_j, i = 2\xi, \xi = \overline{0,\eta} \\ z_i = \bar{x}_i, i = 2\xi, \xi = \overline{0,\eta}, \bar{z}_i = \sum_{j=0}^{i} \bar{x}_j, i = 2\xi, \xi = \overline{0,\eta}, 0 < 2\eta < N. \end{array}\right\}. \tag{10}$$

Теорема 4. *Пусть*

1) $\exists \overline{\omega} \in \Omega$: *выполняются условия определения* 1 *для* $F(x,v) = F_1(x,v) - F_1(x,v,\overline{\omega})$*;*

2) $\exists \tilde{Q} : R^{p(\eta+1)} \to H, \left\| \tilde{Q}D(\hat{f})_1 - \tilde{Q}D(\hat{f}_2) \right\| \le c_1 \left\| \hat{f}_1 - \hat{f}_2 \right\|$, где

$\hat{f}_1 = F_1(\overline{x},\overline{v}), \hat{f}_2 = F_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}), c_1 = \mathrm{const} \ge 0,\ D : R^{p(N+1)} \to$
$\to R^{p(\eta+1)}, D(f) = \left\{ f_0, f_2, ..., f_{2\eta} \right\}, f = \left\{ f_0, f_1, f_3, ..., f_N \right\}, f_i \in R^p, i = \overline{0,N}$;

3) $\exists \tilde{\omega} = \arg\min\limits_{\omega\in\Omega} \left\| \overline{Q}DF_1(\overline{x},\overline{v}) - \overline{Q}DF_2(\overline{x},\overline{v},\omega) \right\|$;

4) $\exists G : H \to \Omega, \overline{\omega} = G(\overline{f}), \tilde{\omega} = G(\tilde{f}), \left\| G(\overline{f}) - G(\tilde{f}) \right\| \le c_2 \left\| \overline{f} - \tilde{f} \right\|$, *где*

$$\overline{f} = \tilde{Q}DF_1(\overline{x},\overline{v}) - \tilde{Q}DF_2(\overline{x},\overline{v},\overline{\omega}), \tilde{f} = \tilde{Q}DF_1(\overline{x},\overline{v}) - \tilde{Q}DF_2(\overline{x},\overline{v},\tilde{\omega}),$$
$$c_2 = \mathrm{const} \ge 0.$$

Тогда $\left\| \overline{\omega} - \tilde{\omega} \right\| \le 2c_1c_2\varepsilon$, *где* $\overline{\omega}$ *– искомый вектор параметров в задаче идентификации для* (8),(9), *а* $\tilde{\omega}$ *– приближенное решение этой задачи.*

Доказательство. Достаточно отметить, что при $\overline{Q} = \tilde{Q}D$ выполняются все условия леммы1. Теорема доказана.

Эту теорему иллюстрирует пример 3.

Пример 3. Пусть дискретная ε-модель имеет вид

$$x_i - \omega_1 + \frac{\omega_2}{\omega_3}\sum_{j=0}^{i} x_j - \frac{1}{\omega_3}\sum_{j=0}^{i} v_j = 0, i = \overline{0,7}, \tag{11}$$

где $v_j \in R^1, x_i \in R^1, \omega = \left\{ \omega_1, \omega_2, \omega_3 \right\} \in \Omega = \left\{ \omega \in R^3 : \omega_1 \in R^1, \omega_2 > 0, \omega_3 > 0 \right\}$, $\varepsilon = 0,001$.

А измерения входа и выхода объекта имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{y}_0 = \overline{v}_0 = 1, \overline{y}_2 = \overline{v}_0 + \overline{v}_1 + \overline{v}_2 = 6, \overline{y}_4 = \overline{v}_0 + \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4 = 15, \\ \overline{y}_6 = \overline{v}_0 + \overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \overline{v}_3 + \overline{v}_4 + \overline{v}_5 + \overline{v}_6 = 28, \\ z_0 = \overline{x}_0 = 0, z_2 = \overline{x}_2 = 2, z_4 = \overline{x}_4 = 4, z_6 = \overline{x}_6 = 6, \overline{z}_0 = \overline{x}_0 = 0, \overline{z}_2 = \\ = \overline{x}_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2 = 3, \\ \overline{z}_4 = \overline{x}_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4 = 10, \overline{z}_6 = \overline{x}_0 + \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 + \overline{x}_4 + \overline{x}_5 + \overline{x}_6 = 21. \end{array} \right\} \tag{12}$$

Проверим условия теоремы 4 для этого примера в предположении, что условие 1) выполняется.

Здесь $p=1, N=7, \eta=3, H=R^4, k=3, F_1(x,v)(i)=x_i, F_2(x,v,\omega)=$
$$=\omega_1-\frac{\omega_2}{\omega_3}\sum_{j=0}^{i}x_j+\frac{1}{\omega_3}\sum_{j=0}^{i}v_j, D: R^8\to R^4, D(f)=\{f_0,f_2,f_4,f_6\},$$
$$f=\{f_0,f_1,f_2,...,f_7\}.$$

Возьмем $\widetilde{Q}: R^4\to R^4, \widetilde{Q}(x)=x=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Тогда условие 2) выполняется, так как $\left\|\widetilde{Q}D(\hat{f}_1)-\widetilde{Q}D(\hat{f}_2)\right\|\le\left\|\hat{f}_1-\hat{f}_2\right\|$ для любых $\hat{f}_1,\hat{f}_2\in R^8$. То есть $c_1=1$.

Условие 3) выполняется, так как $\tilde{\omega}=\{\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2,\tilde{\omega}_3\}=$ $=\arg\min\limits_{\omega\in\Omega}\left\|\tilde{Q}DF_1(\bar{x},\bar{v})-\tilde{Q}DF_2(\bar{x},\bar{v},\omega)\right\|=\{-1,1,1\}$.

Условие 4) выполняется, так как в качестве G можно взять оператор, выражающий решение $\omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ уравнения (системы)
$$\begin{cases}\omega_1-\dfrac{\omega_2}{\omega_3}\bar{z}_0+\dfrac{1}{\omega_3}\bar{y}_0=z_0-f_1,\\ \omega_1-\dfrac{\omega_2}{\omega_3}\bar{z}_2+\dfrac{1}{\omega_3}\bar{y}_2=z_2-f_2,\\ \omega_1-\dfrac{\omega_2}{\omega_3}\bar{z}_4+\dfrac{1}{\omega_3}\bar{y}_4=z_4-f_3.\end{cases}$$

Через $f=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$ оператор G имеет вид $G(f)=\left\{\alpha_1,-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_3},\dfrac{1}{\alpha_3}\right\}$, где $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\alpha=A^{-1}(z_*-f_*)$, A^{-1}– матрица обратная к матрице
$$A=\begin{pmatrix}1 & \bar{z}_0 & \bar{y}_0\\ 1 & \bar{z}_2 & \bar{y}_2\\ 1 & \bar{z}_4 & \bar{y}_4\end{pmatrix}, z_*=\{z_0,z_2,z_4\}, f_*=\{f_1,f_2,f_3\}.$$

Таким образом,
$$c_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\bar{a}_{ij}^{\,2}}\times\sqrt{\max\left(1,\frac{2}{\tilde{\alpha}_3^2},\frac{2\tilde{\alpha}_2^2+\tilde{\alpha}_3^2}{\tilde{\alpha}_3^4}\right)}=6{,}14668,$$ где $\bar{a}_{ij}$– элементы матрицы A^{-1}, а $\{\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3\}=\{-1,-1,1\}$ – решение системы $A\tilde{\alpha}=z_*$. Далее, в силу утверждения теоремы 4 $\|\bar{\omega}-\tilde{\omega}\|\le$

$\leq 2c_1c_2\varepsilon = 0,012293$, где $\overline{\omega}$ – искомое решение задачи идентификации для (10),(11), а $\tilde{\omega} = \{-1,1,1\}$ – приближенное решение этой задачи. В заключение отметим, что $\varepsilon = 0,001$ достаточно мало, так как $2c_1c_2\varepsilon = 0,01\|\tilde{\omega}\| = 0,01732$. Пример закончен.

Замечание 2. Модель вида (11) встречается в электротехнике.

Заключение

Получены новые эффективные теоремы о разрешимости задачи идентификации для дискретных ε-моделей реальных объектов при прямых и косвенных измерениях входов и выходов этих объектов. Задача идентификации дискретных моделей весьма актуальна, так как ее решение позволяет строить дискретные модели реальных объектов по результатам прямых и косвенных измерений входов и выходов этих объектов, что очень важно при анализе и синтезе математических моделей реальных систем и процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (региональный грант № 10-01-96054 УралРФФИ).

Библиографический список

1. Растригин А.А.,Маджаров Н.Е. Введение в идентификацию объектов управления. – М.: Энергия, 1977. – 216 с.

2. Сейдж Э.П., Мелса Д.Л. Идентификация систем управления. – М.: Наука. – 1974. – 248 с.

3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 684 с.

4. Гроп Д. Методы идентификации систем. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

5. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

Получено 02.07.2011

S.U. Kultyshev, L.M. Kultysheva

The Perm national research polytechnic university

IDENTIFICATION OF DISCRETE EPSILON-MODELS OF REAL OBJECTS

We exemine the following problem: to find parameters of discrete model of real object if is known result of measuring of it input and output. We receive theorems about solving this problem for some models and some cases of measuring input and output of this objects.

Keywords: identification, discrete models, real objects, measuring of input and output, observations.