

УДК 531/534:[57+61]

**А.Н. Бражкин, М.А. Осипенко**

**A.N. Brazhkin, M.A. Osipenko**

Пермский национальный исследовательский  
политехнический университет

Perm National Research Polytechnic University

## **ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА**

### **INVESTIGATION OF THE NONLINEAR BENDING OF AN ELASTIC ELEMENT**

Рассматривается контактная задача об изгибе двухлистовой рессоры. Протез смоделирован в виде консольно закрепленной двухлистовой рессоры. Сформулирована постановка задачи, построено решение нелинейного изгиба задачи. Результаты получены в виде графиков.

**Ключевые слова:** протез стопы, упругий элемент, двухлистовая рессора, совместный нелинейный изгиб двух листов.

The contact problem of the bending of a two-leaf spring is considered. The prosthesis is modeled in the form of a cantilevered two leaf spring. The statement of the problem is formulated, the solution of the nonlinear bending of the problem is constructed. The results are obtained in the form of graphs, which are investigated in the sequel.

**Keywords:** foot prosthesis, elastic element, two leaf spring, joint nonlinear bending of two sheets.

Листовые рессоры используются в качестве упругих элементов. Они широко применяются в машиностроении, медицине. Упругий элемент протеза стопы представляет собой листовую рессору. Подобную применяют в подвесках в автомобильном и железнодорожном транспорте [1].

Поставлена задача о совместном изгибе двух листов, которая является контактной. Цель работы – построение решения задачи изгиба комбинированной (с листами различных профилей) двухлистовой рессоры с длинным нижним и коротким верхним листом постоянного профиля. Листы представляют собой консольно закрепленную прямолинейную балку; сила сосредоточена на свободном конце длинного листа [2–4]. Сечения листов являются прямоугольниками одинаковых постоянных ширины и высоты, но с различной длиной (профилями). В отсутствии нагрузки листы плотно прилегают друг к другу. Трением пренебрегаем. Задача заключается в отыскании линии изгиба листов. В общем случае применен численный метод решения контактной задачи, и получены формы изгиба листов.

**Задача 1. Нелинейный изгиб одного листа под действием следящей силы.** Используемая модель упругого элемента показана на рис. 1. В ней упругий элемент представляет собой листовую рессору прямоугольного сечения, край листа зашпелен, другой свободен. Лист изготовлен из материала с модулем Юнга  $E$  и имеет ширину  $w$ , длину  $l$  и толщину  $h$ . К краю нижнего листа приложена заданная следящая сила  $\bar{P}$ , равномерно распределенная по ширине листа (рис. 2, 3). Под действием силы  $\bar{P}$  лист испытывает совместный изгиб (см. рис. 3; изгиб не предполагается малым).

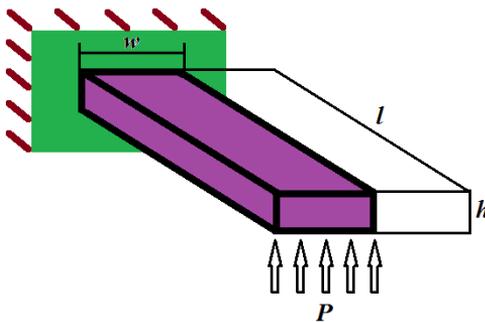


Рис. 1. Модель упругого элемента

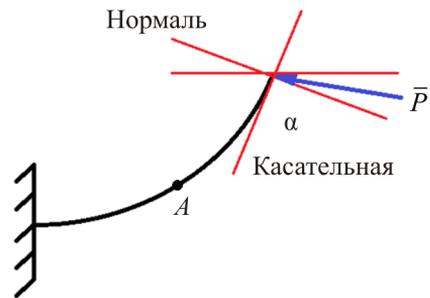


Рис. 2. Схема изгиба упругого элемента

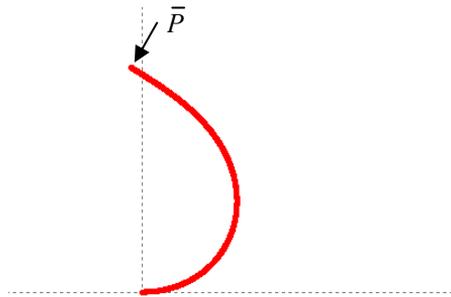


Рис. 3. График изгиба упругого элемента

Уравнение равновесия: кривизна в точке  $A = \frac{12}{Ewh^3} \cdot m_A(\bar{P})$ .

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{12}{Ewh^3} (P \sin(90^\circ - (\varphi l) - \alpha) \int_s^l \cos \varphi(s) ds + \\ &+ P \cos(90^\circ - (\varphi l) - \alpha) \int_s^l \sin \varphi(s) ds); \\ \begin{cases} \varphi'(s) = \frac{12}{Ewh^3} \int_s^l \cos(\varphi(s) - \varphi(l) - \alpha) ds, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, можно построить график.

**Решение задачи 1.** Дифференцируем переменные:

$$k = \frac{12P}{Ewh^3};$$

$$\begin{cases} \varphi''(s) = -k \cdot \cos(\varphi(s) - \varphi(l) - \alpha), & 0 < s < l, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(l) = 0. \end{cases}$$

Особенность заключается в том, что в самом уравнении есть неизвестное  $\varphi(l)$ , поэтому для подбора  $\varphi(l)$  используем метод Ньютона:

$$\begin{cases} \omega' = -k \cdot \cos(\varphi - \varphi(l) - \alpha), & 0 \leq s \leq l, \\ \varphi' = \omega, \\ \omega(l) = 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Результаты решения представлены ниже.

Сила $P$ , Н	Угол $\alpha$	Модуль Юнга $E$ , Па	Длина листа $L$ , м	Ширина листа $w$ , м	Высота листа $h$ , м	Количество точек $N$
3	0	200 000	0,7	0,1	0,05	1000

**Задача 2. Нелинейный изгиб одного листа под действием одной следящей и одной постоянной силы.** Сила  $\bar{F}$  вертикальна. Сила  $\bar{P}$  перпендикулярна нижнему листу, так как трения нет (рис. 4, 5). Пусть  $l$  – длина нижнего листа;  $l_1$  – криволинейная координата приложения силы  $\bar{P}$ , т.е. дуга  $\bar{OM}$ . Дано  $l, l_1$  выражаем в единицах  $l$ , т.е.  $0 < l_1 < l$ .

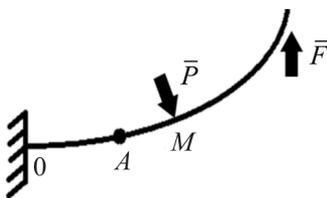


Рис. 4. Модель расчетной схемы

Уравнение равновесия для следящей силы следующее: кривизна в точке  $A = \frac{12}{Ewh^3} m_A(\bar{P})$ ;

$$\begin{aligned} \varphi' = \frac{12}{Ewh^3} & \left( P \sin(90^\circ - (\varphi(l) - \alpha)) \int_s^l \cos \varphi(s) ds + \right. \\ & \left. + P \cos(90^\circ - (\varphi(l) - \alpha)) \int_s^l \sin \varphi(s) ds \right). \end{aligned}$$

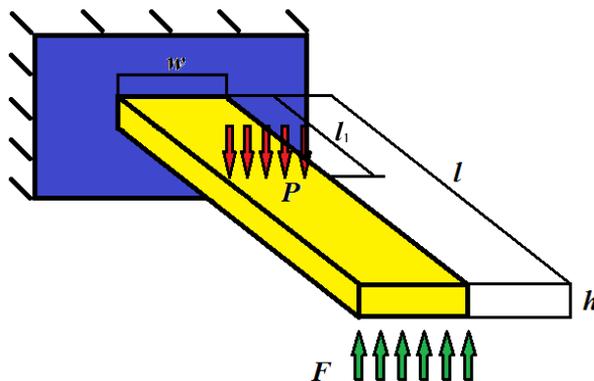


Рис. 5. Расчетная схема

Условие защемления:

$$\begin{cases} \varphi'(s) = \frac{12}{Ewh^3} \int_s^l \cos(\varphi(s) - \varphi(l) - \alpha) ds, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Уравнение равновесия для постоянной силы таково: кривизна в точке

$$A = \frac{12}{Ewh^3} m_A(\vec{F});$$

$$\varphi'(s) = \frac{12}{Ewh^3} Fd, \quad d = \int_s^l \cos\varphi(s) ds.$$

Условие защемления:

$$\begin{cases} \varphi'(s) = k \int_s^l \cos\varphi(s) ds, \\ \varphi(0) = 0; \quad 0 \leq s \leq l. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi''(s) = \begin{cases} -k\cos\varphi(s) + k_1 \cos(\varphi(s) - \varphi(l_1)) & \text{при } 0 \leq s \leq l_1, \\ -k\cos\varphi(s) & \text{при } l_1 \leq s \leq l, \end{cases} \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi'(l) = 0, \end{cases}$$

здесь  $k = \frac{12F}{EWh^3}$ ,  $k_1 = \frac{12P}{EWh^3}$ .

Решим уравнение при разных параметрах и построим графики  $x(s)$ ,  $y(s)$ .

**Решение задачи 2.** Метод решения  $k, k_1, l_1$  считаем известными, но  $\varphi(l_1)$  и  $\varphi'(0)$  – неизвестными. Иными словами, нужно подобрать уже две величины, а далее, когда перейдем к двухлистному элементу, еще больше неизвестных, поэтому вместо подбора используем метод Ньютона:  $\varphi'(0) = \omega$ .

Результаты решения представлены ниже.

Сила $P$ , Н	Сила $F$ , Н	Модуль Юнга $E$ , Па	Длина листа, м	Длина приложения силы $P$ , м	Ширина, м	Высота, м	Количество точек $N$	$\varphi(l_1)$	$\omega$
3	1,1	200 000	1	0,5	0,1	0,05	1000	0,079	-2,056

График изгиба упругого элемента изображен на рис. 6.

**Задача 3. Совместный нелинейный изгиб двух листов под действием одной постоянной силы.** Длина нижнего и верхнего листов –  $l, l_0$ , ширина нижнего и верхнего листов –  $w$ , а высота –  $h$  (рис. 7). На нижний лист действует постоянная сила  $F; P, \lambda, \alpha$  неизвестны. Для их нахождения есть система трех уравнений:  $X_{A1} = X_{A2}, Y_{A1} = Y_{A2}, \alpha = \varphi_{1A} - \varphi_{2A}$ . Эта система решается методом Ньютона.  $\lambda$  – длина дуги  $OM$ ,  $P$  – сила, действующая на верхний лист при контакте (рис. 8).

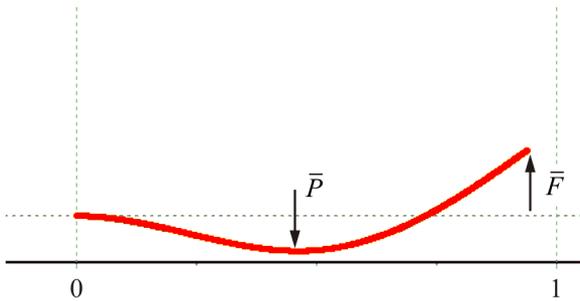


Рис. 6. График изгиба упругого элемента

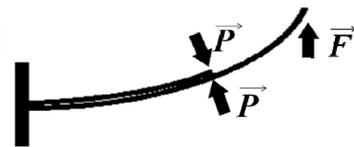


Рис. 7. Модель расчетной схемы

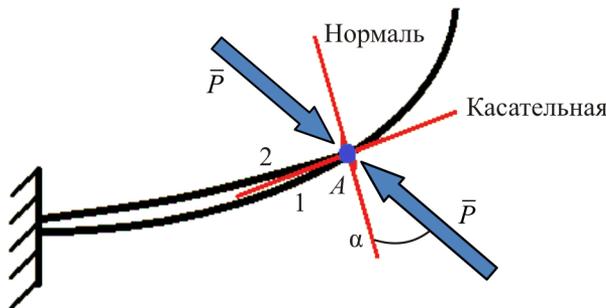


Рис. 8. Схема изгиба упругого элемента

Сила постоянная  $\bar{F}$  вертикальна (рис. 9).

Решение задачи 3 является совместным, поэтому объединяем решения задач 1 и 2. В задаче 3 системы нелинейных уравнений решаются численным методом Ньютона.

Результаты решения задачи 3 представлены ниже.

Постоянная сила $F$ , Н	Модуль Юнга $E$ , Па	Длина нижнего листа $L$ , м	Ширина $w$ , м	Высота $h$ , м	Длина верхнего листа $L_0$ , м	Количество точек $N$	Сила $P$	Длина дуги ОМ $L_1$	Угол $\alpha$
9,0	2 000 000	1	0,1	0,05	0,55	2000	7,838	0,553	0,155

График изгиба упругого элемента представлен на рис. 10.

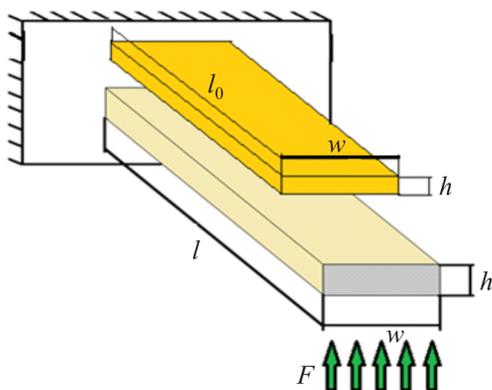


Рис. 9. Модель упругого элемента

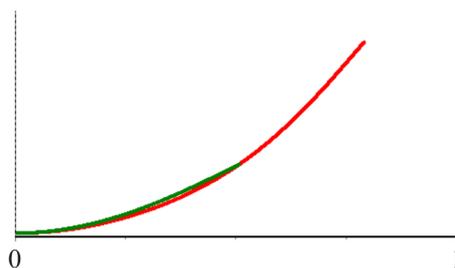


Рис. 10. График изгиба упругого элемента

Выводы:

1. Рассмотрена задача о нелинейном изгибе упругого элемента протеза стопы. Сформулирована математическая постановка задачи, построен алгоритм численного решения.

2. Построено численное решение контактной задачи о совместном нелинейном изгибе двухлиствого упругого элемента, моделирующего двухлистовую автомобильную рессору или упругий элемент протеза стопы, и построен график изгиба.

3. Полученные результаты допускают дальнейшее изучение.

### Список литературы

1. Пархилковский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.

2. Нянин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н. К теории изгиба листовой рессоры // Изв. РАН. МТТ. – 2002. – № 6. – С. 134–143.

3. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – № 40. – P. 3129–3136.

4. Осипенко М.А., Брынских С.И. Отыскание толщин листов равнонапряженных листовых рессор // Вычислительная механика: сб. науч. тр. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2004. – № 2. – С. 51–54.

Получено 31.05.2017

**Бражкин Андрей Николаевич** – студент кафедры «Теоретическая механика и биомеханика», факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.

**Осипенко Михаил Анатольевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и биомеханика», факультет прикладной математики и механики, Пермский национальный исследовательский политехнический университет.