

DOI: 10.15593/2224-9982/2016.47.01

УДК 532.536.2

В.И. Шалаев

Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского,
Жуковский, Россия

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ УРАВНЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И СТРУКТУРЕ ТЕЧЕНИЯ В ИХ ОКРЕСТНОСТИ

Рассмотрены особенности, возникающие в решениях уравнений трехмерного пограничного слоя при столкновении двух семейств линий тока. Исследованы автомодельные уравнения для конических тел с помощью асимптотических методов. Получены аналитические решения для внешней части пограничного слоя и исследованы их особенности в плоскости стекания. На основе уравнений Навье–Стокса построена структура течения около особенности при больших числах Рейнольдса. Для различных асимптотических областей получены аналитические решения уравнений, которые срощены с решениями уравнений пограничного слоя. Исследованы свойства уравнений пограничного слоя в пристеночной области плоскости стекания и найден критерий исчезновения решения. Показано, что этот критерий разделяет две различные топологические структуры течения и соответствует появлению особенности в решении полных уравнений в этой плоскости. Представлены вычисления, подтверждающие полученные результаты.

Ключевые слова: трехмерный ламинарный пограничный слой, особенности решения уравнений, структура течения, конические течения.

V.I. Shalaev

Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Russian Federation
Central Aerohydrodynamic Institute, Zhukovsky, Russian Federation

ABOUT SINGULARITIES OF THREE-DIMENSIONAL BOUNDARY LAYER EQUATIONS AND FLOW STRUCTURE IN THEIR VICINITY

Singularities appearing in solutions of three-dimensional laminar boundary layer equations, when two streamline families are collided, are considered. For conical bodies, self-similar equations are investigated using asymptotic methods. For the outer boundary-layer region, analytical solutions are obtained and their singularities in the runoff plane are studied. The flow structure near the singularity is constructed on the base of Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers. For different asymptotic regions analytical solutions are found and are matched with boundary-layer equation solutions. Properties of boundary-layer equations for the near-wall region in the runoff plane are investigated and

a criterion of the solution disappearing is found. It is shown that this criterion separates two different topological flow structures and corresponds to the singularity appearance in this plane in solutions of full equations. Calculations confirmed obtained results are presented.

Keywords: three-dimensional laminar boundary layer, singularities of equation solutions, flow structure, conical flows.

Введение

Исследование особенностей уравнений нестационарного и трехмерного пограничного слоя имеет принципиальное значение для таких проблем аэродинамики, как пространственный отрыв потока, построение регулярных моделей течения при больших числах Рейнольдса и определение условий существования и единственности решений, а также для численного моделирования аэродинамических приложений при высоких скоростях полета. Эта область математической физики слабо изучена из-за трудностей аналитических исследований сложных нелинейных уравнений и неопределенности трактовки численных результатов.

Впервые сингулярность была обнаружена в решении уравнений нестационарного пограничного слоя для задачи Рэлея – течения около пластины, мгновенно приведенной в движение [1]. Она имела логарифмический тип и находилась во внешней части пограничного слоя на границе области нестационарного течения. Особенность подобного типа была найдена в трехмерном стационарном пограничном слое на боковой границе пластины, занимающей один квадрант в однородном потоке [2] и при столкновении двух струй [3, 4]. Появление особенностей в численных решениях для трехмерного ламинарного и турбулентного пограничного слоя обсуждалось в работах [5–8], но тип этих сингулярностей не был определен. В работе [8] сформулированы необходимые условия для образования особенностей в автомодельных нестационарных и трехмерных пограничных слоях, но достаточные условия и типы сингулярностей исследованы не были.

Явных признаков появления особенностей уравнения пограничного слоя не содержат, но из известных работ следовало, что они могут возникать, когда сталкиваются два семейства субхарактеристик (линий тока) – это необходимое условие. Такая ситуация обычно появляется на наветренной плоскости симметрии (плоскости стекания) тела вращения под углом атаки α^* . Необычные свойства численных решений автомодельных уравнений в этой плоскости для тонкого кругового конуса были изучены во многих работах вследствие практического инте-

реса к теплообмену на головных частях летательных аппаратов в сверхзвуковом потоке [9–19]. В этом случае свойства течения определяются единственным параметром $k = 4\alpha^*/(3\delta_c)$, где δ_c – половина угла раствора конуса, если использовать линейный закон для вязкости и положить число Прандтля $Pr = 1$. В подветренной плоскости симметрии (плоскости растекания) и в плоскости стекания для малых углов атаки ($k \leq k_c$) было обнаружено два решения, причем одно из них имело особенность при $k \rightarrow 0$. Ни одного решения не было найдено в плоскости стекания при умеренных углах атаки ($k_c \leq k < 2/3$), и много решений обнаружено при больших углах атаки вплоть до отрыва пограничного слоя ($2/3 \leq k < 1$). В работе [11] исследована зависимость характера решений в этих плоскостях от числа Прандтля Pr . Решения задачи Коши для полных уравнений пограничного слоя с начальными условиями в подветренной плоскости симметрии зафиксировали нарушение условий симметрии в плоскости стекания – скачок поперечной скорости через эту плоскость в диапазоне углов атаки, где автомодельное решение отсутствовало [16–18]. Подобные результаты были получены для течения около крыла [5, 6] и эллипсоида под углом атаки [7]. Задача для конуса была решена численно на основе параболизированных уравнений Навье–Стокса, без учета продольной вязкой диффузии [19], и результаты по теплообмену хорошо соответствовали экспериментальным данным. Однако проблема осталась, так как структура течения и необычные свойства пограничного слоя не были объяснены.

Аналитические решения задачи Коши для полных уравнений во внешней части пограничного слоя на тонком круговом конусе с начальными условиями в подветренной плоскости симметрии были исследованы в работе [20]. Оказалось, что решение в плоскости растекания с особенностью при $k \rightarrow 0$ порождает также особенность степенного типа в плоскости стекания: при нулевом угле атаки это решение остается трехмерным, поскольку скорость поперечного течения остается ненулевой. Второе, регулярное при $k \rightarrow 0$ решение имело в наветренной плоскости особенности двух типов при конечных углах атаки. Одна особенность логарифмического типа возникала у поперечной скорости при $k = 1/3$; при $k > 1/3$ она становилась степенной. Вторая особенность предсказывала рост толщины пограничного слоя до бесконечности при приближении к плоскости стекания для углов атаки $k \geq 1$: при $k = 1$ этот рост был логарифмический, а при $k > 1$ – степен-

ной. Было показано, что численные решения уравнений давали неправильный результат около особенности из-за потери точности. Подобные, но более сложные результаты были получены для произвольных конических поверхностей; они позволили определить достаточные условия возникновения особенностей [21, 22].

На основе уравнений Навье–Стокса была построена асимптотическая структура течения при больших числах Рейнольдса, для различных асимптотических областей были получены аналитические решения, которые были сращены с решениями уравнений пограничного слоя. В частности, анализ области вязко-невязкого взаимодействия выявил, что сингулярность может возникать не только в автомоделных, но и полных уравнениях трехмерного пограничного слоя. Теория показала, что появление сингулярности связано с собственными решениями уравнений пограничного слоя, возникающих у плоскости стекания; она также позволила объяснить численные результаты, полученные на основе параболизированных уравнений Навье–Стокса.

Появление особенности во внешней части пограничного слоя дает одно значение критического угла атаки $k_c = 1/3$. Однако вычисления показывают, что $k_c = k_c(M_\infty, Pr, h_w)$, т.е. является функцией чисел Маха M_∞ , Прандтля Pr и температуры стенки h_w [9–19]. Это указывает на то, что сингулярность может возникнуть в пристеночной области, и представленные ниже новые результаты подтверждают это. Разложение в ряды пристеночного решения в плоскости стекания показало наличие параметра α , линейной комбинации компонентов напряжения трения на стенке, изменение знака которого ведет к изменению физической топологии течения около этой плоскости. Анализ уравнений пограничного слоя около стенки показал, что $\alpha = 0$ соответствует критическому значению k_c , и это подтверждено всеми опубликованными расчетами [9–15]. Был обнаружен новый тип особенности в решениях полных уравнений пограничного слоя в плоскости стекания, который связан с собственным решением, возникающим около этой плоскости. Представленные результаты расчетов для треугольного крыла подтверждают наличие сингулярности.

В п. 1 представлена общая постановка задачи трехмерного ламинарного пограничного слоя на конической поверхности. В п. 2 приведены основные результаты по исследованию особенностей решений уравнений для внешней части пограничного слоя и построению регу-

лярной модели течения. В п. 3 изучены особенности, возникающие в пристеночной области течения около плоскости стекания. В заключении приведены основные выводы.

1. Постановка задачи

Трехмерный пограничный слой на конической поверхности в ортогональной системе координата $x\varphi$ (рис. 1) описывается следующей системой автомодельных уравнений и краевых условий [21, 22]:

$$\begin{aligned} u_{yy} &= Awu_\varphi + vu_y + A_1w(u - w), \\ w_{yy} &= Aww_\varphi + vw_y + w\left(\frac{2}{3}u + Kw\right) - h\left(\frac{2}{3} + K\right), \\ h_{yy} &= Awh_\varphi + vh_y - M_e\left(u_y^2 + \frac{3}{2}A_1w_y^2\right), \quad \rho h = 1, \quad y = \varepsilon \sqrt{\frac{3\rho_e u_e}{2x\mu_e}} \int_0^{y^*} \rho d\frac{y^*}{l}, \\ \text{Re} &= \varepsilon^{-2} = \frac{\rho_\infty u_\infty l}{\mu_\infty}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$f_y = u, \quad g_y = w, \quad v = -\left\{ f + \left[K - \frac{1}{2} A(\ln(\rho_e \mu_e / u_e)) \right]_\varphi \right\} g + A g_\varphi,$$

$$y = 0 : u = v = w = 0, \quad h = h_w (h_y = 0), \quad y = \infty : u = w = h = 1.$$

Коэффициенты уравнений определяются выражениями

$$M_e(\varphi) = (\gamma - 1) M_\infty^2 \frac{u_e^2}{h_e}, \quad K(\varphi) = \frac{2w_{e\varphi}}{3Ru_e}, \quad A(\varphi) = \frac{2w_e}{3Ru_e}, \quad A_1(\varphi) = \frac{2}{3} \left(\frac{w_e}{u_e} \right)^2.$$

В этих уравнениях плотность ρ , энтальпия h , вязкость μ , продольная u и поперечная w скорости нормированы к их значениям на внешней границе. Последние обозначены индексом e и отнесены к параметрам невозмущенного потока, обозначенным индексом ∞ . Для конических течений они являются функциями только безразмерной поперечной координаты φ , которая для кругового конуса является полярным углом цилиндрической системы координат (рис. 1). Для сокращения формул предполагается $\text{Pr} = 1$ и линейная зависимость вязкости от температуры, $\rho\mu = 1$. Индексы y и φ обозначают производные по соответствующим переменным; x – расстояние вдоль

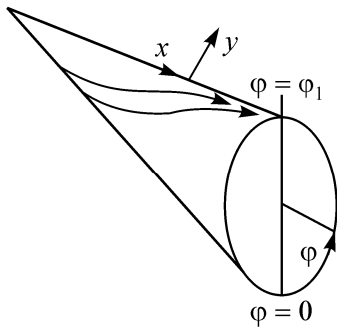


Рис. 1. Схема течения и координаты

образующей от носка тела, отнесенное к длине тела l ; y – переменная А.А. Дородницына; y^* – нормаль к поверхности тела; $f(y, \varphi)$ и $g(y, \varphi)$ – продольная и поперечная функции тока, $v(y, \varphi)$ – преобразованная нормальная скорость; $R(\varphi)$ – метрический

коэффициент. Поперечная скорость на внешней границе пограничного слоя $w_e = 0$ в плоскости начальных данных (плоскость растекания) $\varphi = 0$, в которой $K(0) > 0$, и в плоскости стекания $\varphi = \varphi_1$, в которой $K(\varphi_1) = -k < 0$ и две части пограничного слоя, пришедшие с разных сторон плоскости стекания, сталкиваются. Для кругового конуса $\varphi_1 = \pi$.

Уравнения (1.1) упрощаются для тонких тел, так как в этом случае $A_1 \ll 1$, $u_e = \rho_e = \mu_e = 1$. Пренебрегая в уравнениях (1.1) членами, пропорциональными A_1 , получим интеграл Крокко для энтальпии и уравнения импульса в следующей форме:

$$h = h_w + h_r u - \frac{1}{2} M_e u^2, \quad h_r = 1 - h_w + \frac{1}{2} M_e, \\ M_e = (\gamma - 1) M_\infty^2, \quad v = -(f + Kg + Ag_\varphi), \quad (1.2)$$

$$u_{yy} = Awu_\varphi + vu_y, \quad w_{yy} = Aww_\varphi + vw_y + w\left(\frac{2}{3}u + Kw\right) - h\left(\frac{2}{3} + K\right).$$

Для тонкого кругового конуса

$$w_e = 2\alpha^* \sin \varphi, \quad K(\varphi) = k \cos \varphi, \quad A(\varphi) = k \sin \varphi.$$

В этом случае уравнения (1.2) имеют достаточно простой вид.

2. Особенности уравнений во внешней части пограничного слоя и соответствующая им структура течения

Рассмотрим асимптотическую форму уравнений (1.2) при $y \gg 1$, так что функции течения представляются так [22, 23]:

$$\begin{aligned} u = 1 + U(\eta, \varphi), \quad w = 1 + W(\eta, \varphi), \quad \eta = (y - \delta) / \sqrt{a(\varphi)}, \\ h = 1 + H = 1 - \left(\frac{1}{2} M_e + h_w - 1 \right) U - \frac{1}{2} M_e U^2. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\delta(\varphi)$ – толщина вытеснения, определяемая уравнением Ф. Мура [9], функция $a(\varphi)$ определяется условием локальной автомодельности, $U \ll 1$ и $W \ll 1$ – возмущения скоростей относительно краевых условий, которые в линейном приближении удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} U_{\eta\eta} + \eta U_\eta - a A U_\varphi = 0, \\ W_{\eta\eta} + \eta W_\eta - \frac{2}{3} a \left[\frac{3}{2} A W_\varphi + (1 + 3K) W \right] = \frac{2}{3} a p(\varphi) U. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.2) имеют решения

$$\begin{aligned} U(\eta, \varphi) = C_1 \operatorname{erfc}(\eta / \sqrt{2}), \quad W(\eta, \varphi) = -b(\varphi) U, \\ W_1(\eta, \varphi) = -b(\varphi) U + B_1(k) V(\eta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Постоянные C_1 и B_1 вычисляются из условия срачивания с численным решением внутри пограничного слоя. Эти решения удовлетворяют начальным условиям в плоскости стекания и должны стремиться к нулю при $\eta \rightarrow \infty$. Функция $V(\eta, \varphi)$ является решением однородного уравнения для возмущений поперечной скорости (2.2) с нулевой правой частью; она выражается через функцию Вебера–Эрмита [19]. Функция $B_1 \sim 1/K(0)$, т.е. имеет особенность при $K(0) \rightarrow 0$. Для кругового конуса этот предел соответствует нулевому углу атаки; в этом случае аналитическое выражение для $W_1(\eta, \varphi)$ показывает наличие степенной особенности в плоскости стекания $\varphi = \varphi_1$ [17]. Первое решение $W(\eta, \varphi)$ регулярно в этом пределе, его поведение определяется функциями $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} w_e b_\varphi + 2(1 + M) w_{e\varphi} b = 2p M w_{e\varphi}, \quad p(\varphi) = 1 + \left(1 + \frac{3}{2} K \right) \left(\frac{1}{2} M_e + h_w - 1 \right), \\ w_e a_\varphi + 2(N + 1) w_{e\varphi} a = 2N w_{e\varphi}, \quad N(\varphi) = 3M(\varphi) = K^{-1}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение для $a(\varphi)$ получено из условия равенства единице коэффициента при втором члене уравнений (2.2). Решения этих уравнений с начальными условиями в плоскости растекания в общем случае представляются в интегральной форме и определяются аналитическими выражениями для кругового конуса [22, 23]. Их свойства около плоскости стекания, при $\zeta = \varphi_1 - \varphi \ll 1$, определяются соотношениями [23]:

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{3}{2} k R \zeta, \quad k = -K(\varphi_1), \quad R = R(\varphi_1), \\ p_1 &= p(\varphi_1), \quad n = 3m = -K^{-1}(\varphi_1), \\ m \neq 1: b &= \frac{m p_1}{m-1} - b_m \zeta^{2(m-1)}, \quad m = 1: b = -2 p_1 \ln \zeta + b_1, \\ n \neq 1: a &= \frac{n}{n-1} + a_n \zeta^{2(n-1)}, \quad n = 1: a = -2 \ln \zeta + a_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь a_n и b_m – известные коэффициенты [21–23]. Формулы (2.5) также справедливы для нетонких тел, так как в этом случае $A_1 = O(\zeta^2)$. Эти результаты показывают наличие во внешней части пограничного слоя двух типов сингулярностей в плоскости стекания, связанных со свойствами функций $a(\varphi)$ и $b(\varphi)$.

Для $k < 1$ функция $U(\eta, \zeta)$ существует при $\zeta = 0$, но является нерегулярной, ее поведение подробно изучено аналитически для кругового конуса [17]. Для $k \geq 1$ функция $U(\eta, \zeta)$ является сингулярной при $\zeta \rightarrow 0$, так как $a(\zeta) \rightarrow \infty$ и толщина пограничного слоя стремится к бесконечности как $\sqrt{a(\zeta)}$: при $k = 1$ сингулярность является логарифмической, а при $k > 1$ – степенной. При $k \geq 1$ в экспериментальных и численных исследованиях наблюдается отрыв потока, это явление ведет к изменению не только внешней, но и внутренней структуры пограничного слоя. Следует отметить, что такое поведение вязких возмущений скорости вблизи внешней границы пограничного слоя при развитии отрыва является новым свойством по сравнению со свойствами двумерных течений.

Функция $W(\eta, \zeta)$ имеет нерегулярный, но конечный предел в плоскости стекания при $\zeta \rightarrow 0$ и $k < 1/3$. Она сингулярна при $k \geq 1/3$: особенность является логарифмической или степенной, если $k = 1/3$ или $k > 1/3$. При $1/3 \leq k < 1$ особенность связана только с поведением поперечной скорости. Эта сингулярность ведет к усилению продольной компоненты завихренности во внешней части вязкой области. Особенность имеется как при отрицательном ($k \leq 2/3$), так и положительном ($k > 2/3$) градиенте давления, она формируется собственным решением уравнений пограничного слоя, возникающим около плоскости стекания. Критическое значение $k_c = 1/3$ для внешней части пограничного слоя не зависит от чисел Маха и Прандтля и температуры стенки, но именно она определяет реальную структуру течения около плоскости стекания при $k \geq 1/3$ [18, 19].

Вследствие нерегулярности решения уравнений пограничного слоя уже при $k \geq 1/6$ ($m \leq 2$) около плоскости стекания образуется вихревая пограничная область с поперечным размером $\zeta \sim \varepsilon^{\frac{1}{2-m}}$; при $m \sim 1$ эта величина порядка толщины пограничного слоя ε . В этой области поперечная диффузия является эффектом первого порядка, и для его описания вводятся переменные

$$z = \sqrt{kx}R\zeta/\varepsilon, \quad u = u(y, z), \quad h = h(y, z), \quad w = w(y, z),$$

$$\varepsilon = \left[\frac{3}{2} \operatorname{Re} \rho_e(\varphi_1) u_e(\varphi_1) / \mu_e(\varphi_1) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

При использовании этих переменных из уравнений Навье–Стокса следует, что при $\zeta \sim \varepsilon \ll 1$ течение в пограничной области в главном приближении описывается автомодельными параболизированными уравнениями Навье–Стокса, которые для внешней ее части, при $y \gg 1$, принимают вид [21, 22]

$$U_{yy} + kU_{zz} + (1-k)yU_y + kzU_z = 0,$$

$$W_{yy} + (1-k)yW_y + kW_{zz} + \left(\frac{2}{z} + kz \right) W_z + 2k(m-1)W + \frac{2}{3}p_1U = 0. \quad (2.6)$$

Для $k < 1$ эти уравнения имеют решение

$$U(y, z) = C_1 \operatorname{erfc}\left(y\sqrt{(1-k)/2}\right) \operatorname{erf}\left(z/\sqrt{2}\right),$$

$$W = -B(z) C_1 \operatorname{erfc}\left(y\sqrt{(1-k)/2}\right), \quad (2.7)$$

$$B_{zz} + \left(\frac{2}{z} + z\right) B_z - 2(m-1)B = -2mp_1 F(z), \quad F(z) = \operatorname{erf}\left(z/\sqrt{2}\right).$$

Функция $B(z)$ выражается через функцию Куммера $\Phi(a, b, x)$ [25]:

$$B = mp_1 B_0(z) + B_m \Phi\left(1-m, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}z^2\right), \quad B_m = b_m \left(R\sqrt{kx}/\varepsilon\right)^{2(1-m)}. \quad (2.8)$$

Здесь $B_0(z)$ – частное решение неоднородного уравнения (2.7). Коэффициент B_m определяется из условий сращивания выражений (2.8) и (2.5).

На рис. 2 представлено сравнение решений уравнений пограничного слоя (пунктирные линии) и Навье–Стокса (сплошные линии) для $m=1/2$ (кривые 1 и 2) и $m=1$ (кривые 3 и 4). Видно, что решения уравнений Навье–Стокса быстро сходятся к сингулярным решениям уравнений пограничного слоя.

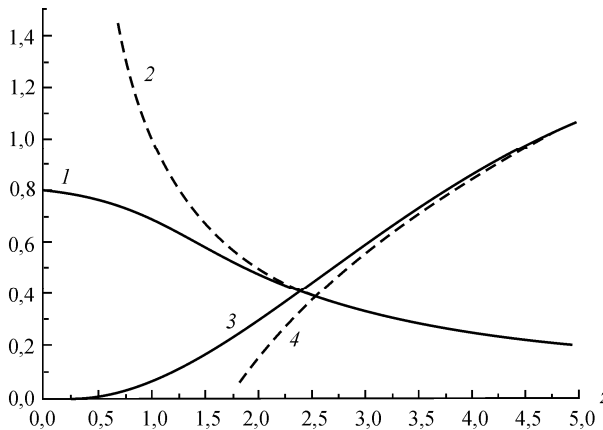


Рис. 2. Сравнение решений уравнений пограничного слоя (пунктирные кривые) и Навье–Стокса (сплошные кривые): 1 и 2 – $m = 1/2$; 3 и 4 – $m = 1$

Другой эффект, генерируемый внешней сингулярностью при $k \geq 1/3$, это рост толщины пограничного слоя при $\zeta \rightarrow 0$ и вязко-

невязкое взаимодействие. Можно получить следующие оценки для безразмерной толщины пограничного слоя $\Delta(\zeta)$ в окрестности плоскости стекания:

$$\frac{1}{3} < k < 1: \Delta \sim \sqrt{\frac{1-m}{1-k} \ln\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)}, \quad k = \frac{1}{3}: \Delta \sim \sqrt{\ln \ln\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)}.$$

Эффект вязко-невязкого взаимодействия важен в области, где невязкая и индуцированная пограничным слоем поперечные скорости имеют одинаковый порядок. Это условие определяет поперечный размер области $\Delta\varphi$ и масштаб скорости в ней:

$$\Delta\varphi \sim \sqrt{\varepsilon} x^{-\frac{1}{4}}, \quad w_e \sim k R u_e \sqrt{\varepsilon} x^{-\frac{1}{4}}.$$

В этой области течение имеет двухслойную структуру. Предполагая течение во внешней невязкой области потенциальным, решение уравнения потенциала в ней представляем несобственным интегралом от толщины вытеснения $\delta(x, s)$. В пограничном слое течение описывается полными трехмерными уравнениями:

$$\begin{aligned} s &= \frac{R\zeta}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad w_e = \frac{3}{2} u_e \sqrt{\varepsilon} W_e(x, s), \quad W_e(x, s) = -ks[1+r], \\ r &= \frac{4m}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\delta(x, t) dt}{s^2 - t^2}, \\ v &= f + Kg + Ag_s + \frac{2}{3} x f_x, \quad u_{yy} = W_e w u_s - v u_y + \frac{2}{3} x u u_x, \\ h &= h_w + h_r u - \frac{1}{2} M_e(\varphi_1) u^2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$w_{yy} = W_e w w_s - v w_y + w \left(\frac{2}{3} u + W_{es} w \right) - h \left(\frac{2}{3} + W_{es} \right) + \frac{2}{3} x u w_x.$$

Краевые условия для уравнений (2.9) имеют вид (1.1). Решение уравнений (2.9) должно быть сращено с решениями (2.3) при $s \rightarrow \infty$. Для уравнений (2.9) необходимы также начальные условия в некотором поперечном сечении $x = x_0$, которые могут быть получены из решения уравнений Навье–Стокса около носка тела; это обстоятельство существенно усложняет задачу. Для гиперзвуковых течений со слабым

вязко-невязким взаимодействием уравнения (2.9) допускают автомодельное решение при некоторых дополнительных предположениях.

Во внешней части пограничного слоя, при $y \gg 1$, решение уравнений (2.9) имеет вид

$$t = y/\sqrt{d(x,s)}, \quad u = 1 + U(x,t,s), \quad w = 1 - c(x,s)U, \quad U = C_1 \operatorname{erfc}(t/\sqrt{2}),$$

$$(1+r)sd_s - 2mxd_x - 2(n-1-r_s)d = -2n,$$

$$(1+r)sc_s - 2mxc_x - 2(m-1-r_s)c = -2m(p_1 - qp_0), \quad p_0 = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}M_0 + h_w - 1\right).$$

Вдоль характеристик $\xi(x,s) = \text{const}$, которые есть линии тока невязкого течения, уравнения для функций $d = d(\xi, s)$ и $c = c(\xi, s)$ интегрируются, и при $s \rightarrow 0$ эти функции представляются в виде

$$c = Cs^L + \frac{m(p_1 + p_0 r_s)}{m-1-r}, \quad L(\xi, s) = \frac{m-1-r_s}{1+r}; \quad d = Ds^I + \frac{n}{n-1-r_s}, \quad (2.10)$$

$$I(\xi, s) = \frac{n-1-r_s}{1+r}, \quad C = b_m \varepsilon^{m-1}, \quad D = a_n \varepsilon^{n-1}.$$

Коэффициенты C и D получены сращиванием выражений для d и c при $s \rightarrow \infty$ с соотношениями (2.5) для a и b [21, 22]. Появление логарифмической особенности в этих функциях соответствует $L=0$ или $I=0$. При $L(\xi, 0) < 0$ и $I(\xi, 0) < 0$ особенность является степенной. Из представленных результатов следует, что вязко-невязкое взаимодействие не устраняет особенность, оно только сдвигает критическое значение k_c , соответствующее $L=0$.

3. Особенности в пристеночной области пограничного слоя

Выше отмечалось, что появление особенности во внешней части пограничного слоя дает единственное критическое значение $k_c = 1/3$, хотя расчеты показывают, что $k_c = k_c(M_\infty, \text{Pr}, h_w)$, т.е. зависит от числа Маха M_∞ , числа Прандтля Pr и температуры стенки h_w . Последнее обстоятельство указывает на возможность возникновения особенности в пристеночной области. Для исследования этой возможности изучим

поведение решения уравнений (1.2) при $y \ll 1$ в плоскости стекания $\varphi = \varphi_1$. Представим решение в следующей форме:

$$f_0 = \tau_0 \frac{y^2}{2} + F_0(y), \quad g_0 = \theta_0 \frac{y^2}{2} + G_0(y), \quad \tau_0 = \frac{du_0(0)}{dy}, \quad \theta_0 = \frac{dw_0(0)}{dy},$$

$$u_0 = \tau_0 y + U_0(y), \quad w_0 = \theta_0 y + W_0(y), \quad v_0 = -\alpha y^2 - F_0 + kG_0,$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\tau_0 - k\theta_0), \tag{3.1}$$

$$h_0 = h_w + h_r \tau_0 y - M_e \tau_0^2 y^2 + (h_r - 2M_e \tau_0 y) U_0 - M_e U_0^2.$$

Здесь параметры τ_0 и θ_0 определяют напряжения трения на стенке в продольном и поперечном направлениях. С помощью уравнений (1.2) вторые члены этих разложений можно представить в виде рядов

$$U_0 = F_{0y} = \sum_{i=0} \frac{\alpha_i y^{i+4}}{(i+4)!}, \quad F_0 = \sum_{i=0} \frac{\alpha_i y^{i+5}}{(i+5)!},$$

$$W_0 = G_{0y} = \sum_{i=0} \frac{\beta_i y^{i+2}}{(i+2)!}, \quad G_0 = \sum_{i=0} \frac{\beta_i y^{i+3}}{(i+3)!} \tag{3.2}$$

Первые три коэффициента этих рядов определяются соотношениями

$$\alpha_0 = -2\tau_0 \alpha, \quad \alpha_1 = k\tau_0 \beta_0, \quad \alpha_2 = k\tau_0 \beta_1, \quad p = \frac{2}{3} - k,$$

$$\beta_0 = -ph_w, \quad \beta_1 = -p\tau_0 h_r, \quad \beta_2 = \frac{1}{3}(\tau_0 - 3k\theta_0)\theta_0 + 2pM_e \tau_0^2. \tag{3.3}$$

Параметр p характеризует градиент давления, который отрицателен при $p > 0$ и положителен при $p < 0$. С помощью разложений (3.2) можно качественно изучить зависимость структуры течения около плоскости стекания от параметров, анализируя поведение субхарактеристик уравнений (1.2). Преобразованная нормальная к поверхности тела скорость v и поперечная скорость w при $\zeta \ll 1$ и $y \ll 1$ в главном приближении представляются в виде

$$v = v_0 = -\left(\alpha y^2 - \frac{1}{6} k \beta_0 y^3 \right) = -\frac{1}{6} k \beta_0 y^2 (y + y_c),$$

$$y_c = -\frac{6\alpha}{k\beta_0} = \frac{6\alpha}{kph_w}, \quad w = -w_0 = -k\theta_0\zeta y.$$

В плоскости $\zeta = 0$ поперечная скорость $w = 0$ вследствие условий симметрии. В этой плоскости может быть две критические точки, в которых $v = 0$. Первая точка расположена на поверхности конуса $y = 0$, а вторая $y = -y_c$ появляется в физической плоскости при $\alpha < 0$, если $p > 0$, что для кругового конуса соответствует малым углам атаки ($k < 2/3$), и при $\alpha > 0$, если $p < 0$. Обычно критическое значение градиента поперечной скорости $k_c \leq 1/3$ и соответствует отрицательному поперечному градиенту давления $p > 0$; поперечное напряжение трения в этой области положительно, так как $\theta_0 > 0$.

С помощью этих выражений уравнение для субхарактеристик уравнений (1.2) находится в аналитическом виде:

$$\frac{y_c dy}{y(y + y_c)} = \beta \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad \beta = \frac{\alpha}{k\theta_0}; \quad \alpha \neq 0: y = \frac{y_c y_0 s^\beta}{y_c + y_0(1 - s^\beta)}, \quad s = \left| \frac{\zeta}{\zeta_0} \right|;$$

$$\alpha = 0: y = \frac{y_0}{1 - y_0 d \ln s}, \quad d = \frac{ph_w}{6\theta_0}.$$

Координаты y_0 и z_0 относятся к начальной точке в поперечной плоскости, через которую проходит данная субхарактеристика.

Поведение субхарактеристик показано на рис. 3, *a* и *б* для $p > 0$. При $\alpha > 0$ скорости $v < 0$ и $w < 0$; единственная критическая точка-узел находится в начале координат, и субхарактеристики сходятся к ней из области $\zeta \neq 0$ (см. рис. 3, *a*). При $\alpha = 0$ $y_c = 0$ и точка $\zeta = y = 0$ является двойной критической точкой типа седло-узел: седло находится в нижней полуплоскости ($y = -0$), т.е. вне физической области течения; узел расположен в верхней полуплоскости ($y = +0$) и картина субхарактеристик остается той же, что при $\alpha > 0$. При $\alpha < 0$ узел перемещается в точку $\zeta = 0$, $y = -y_c > 0$, а начало координат становится седловой точкой (см. рис. 3, *б*). В этом случае при $y > -y_c$ нормальная скорость $v < 0$, а при $0 < y < -y_c$ $v > 0$; $v = 0$ на линии $y = -y_c$.

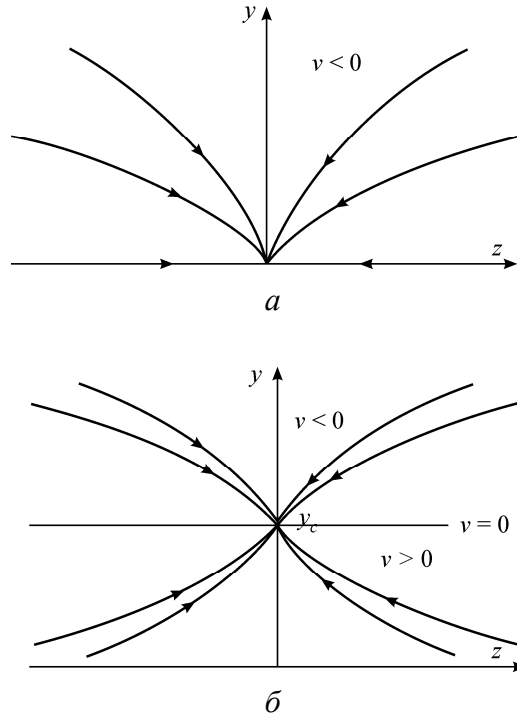


Рис. 3. Субхарактеристики в поперечной плоскости при $\alpha \geq 0$ (а) и $\alpha < 0$ (б); $p > 0$

Этот анализ показывает, что при изменении знака параметра α физическая структура течения качественно изменяется и значение $\alpha = 0$ является критерием появления новых свойств течения. Подобное течение с двумя критическими точками формируется перед отрывом нестационарного двухмерного пограничного слоя. В этом случае в области между критическими точками $y = 0$ и $y = -y_c$ мгновенная скорость отрицательна, а отрыв возникает, когда в точке $y = -y_c$ выполняется критерий Мура–Рота–Сирса – нормальная производная скорости обращается в ноль [24]. Для стационарного трехмерного пограничного слоя на эллипсоиде вращения под углом атаки в численных расчетах была обнаружена аналогичная область возвратных поперечных течений [7, 25].

В рассматриваемом случае на линии $y = -y_c$ только нормальная скорость изменяет знак, а для изменения знака поперечной скорости требуется изменение знака градиента давления, который остается от-

рицательным при $k < 2/3$. Отрыв в виде формирования вихря продольной ориентации рядом с плоскостью симметрии образуется при $k > 2/3$. Такое течение возникает также около плоскости симметрии треугольного крыла и не описывается уравнениями пограничного слоя, поскольку вязкая диффузия внутри вихря распределена вдоль радиуса от его оси, а не вдоль нормали к поверхности тела [26].

На основе этого качественного анализа можно предположить, что критическое значение $k_c(M_\infty, Pr, h_w)$, при котором решение уравнений пограничного слоя перестает существовать, определяется соотношением

$$2\alpha(k_c) = \tau_0(k_c) - k_c\theta_0(k_c) = 0. \quad (3.4)$$

Для подтверждения этой гипотезы проанализируем уравнения для функций $U_0(y)$ и $W_0(y)$, которые выводятся подстановкой разложений (3.1) в уравнения (1.2). Рассматривая функции $U_0(y)$ и $W_0(y)$ как возмущения, уравнения для них можно линеаризовать и получить в главном приближении следующие соотношения:

$$\begin{aligned} U_{0yy} + \alpha y^2 U_{0y} + \tau_0(F_0 - kG_0) &= -\alpha\tau_0 y^2, \\ W_{0yy} + \alpha y^2 W_{0y} - \frac{2}{3}(\tau_0 - 3k\theta_0)yW_0 + \theta_0(F_0 - kG_0) &= \\ = \beta_0 + \beta_1 y + \frac{1}{2}\beta_2 y^2 + \left[\frac{2}{3}\theta_0 y - p(h_r - 2M_e\tau_0 y) \right] U_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При $y \rightarrow 0$ $U_0(y)$ и $W_0(y)$ определяются рядами (3.3), а для того чтобы срастить их с численным решением уравнений (1.2) в основной части пограничного слоя, эти функции должны расти при $y \rightarrow \infty$ не быстрее степенной функции. Уравнения имеют большой порядок, и затруднительно найти их аналитическое решение. Для исследования поведения их решения при $y \rightarrow \infty$ и $\alpha \neq 0$ введем новую переменную

$$\xi = -\alpha y^3/3, \quad y = -(3\xi/\alpha)^{1/3}. \quad (3.6)$$

В пределе $y \rightarrow \infty$, $\alpha \neq 0$ преобразованные с помощью формул (3.6) уравнения (3.5) сводятся к следующим:

$$\xi \frac{\partial^2 U_0}{\partial \xi^2} + \left(\frac{2}{3} - \xi \right) \frac{\partial U_0}{\partial \xi} = -\frac{\tau_0}{3} \left(\frac{3\xi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$\xi \frac{\partial^2 W_0}{\partial \xi^2} + \left(\frac{2}{3} - \xi \right) \frac{\partial W_0}{\partial \xi} + cW_0 = -\frac{\beta_1}{3\alpha} + \frac{\beta_2}{6\alpha} \left(\frac{3\xi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9\alpha} (\theta_0 + 3M_e \tau_0) U_0.$$

Решения этих уравнений можно представить так:

$$W_0 = B_{00} \Phi \left(-c, \frac{2}{3}, \xi \right) + B_{01} \xi^{\frac{1}{3}} \Phi \left(\frac{1}{3} - c, \frac{4}{3}, \xi \right) - \frac{3\beta_1}{2(\tau_0 - 3k\theta_0)} - \frac{3\beta_2}{\tau_0 - 9k\theta_0} \left(\frac{3\xi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{\theta_0 + 3M_e \tau_0}{\tau_0 - 3k\theta_0} U_{00}, \quad (3.7)$$

$$U_0 = A_{00} \int_0^y e^{-\frac{1}{3}\alpha s^3} ds + \tau_0 \left(\frac{3\xi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Первые члены этих выражений являются решениями однородных уравнений, с нулевыми правыми частями; A_{00} , B_{00} и B_{01} – постоянные, которые определяются из условий сращивания (3.7) с численным решением в основной части пограничного слоя; $\Phi(a, b, x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [28], которая при $\xi \rightarrow \infty$ имеет асимптотики

$$\alpha > 0, \xi < 0: \Phi \sim (-\xi)^c; \quad \alpha < 0, \xi > 0: \Phi \sim e^{\xi} \xi^{c-\frac{2}{3}}.$$

Отсюда следует, что решения (3.7) растут экспоненциально при $\alpha < 0$ и $p > 0$, так что их нельзя срастить с решением в основной части. Следовательно, при этих условиях решение уравнений пограничного слоя не может существовать.

Этот вывод, а также критерий (3.4) границы существования решения в наветренной плоскости симметрии подтверждаются численными расчетами для тонкого кругового конуса под углом атаки [10–15, 23], часть из которых представлена на рис. 4. На этом рисунке символы соответствуют расчетам граничных значений $\alpha(k_c)$ для существования решения в диапазоне чисел Маха от 2 до ∞ при $\text{Pr} = 1$ и различных температурах поверхности. При $k < 1/3$ данные группируются возле

значения $\alpha = 0$ в соответствии с соотношением (3.4); разброс, по-видимому, связан с уменьшением точности вычислений при приближении к критическому значению k_c , а также с ошибками копирования данных из статей. При $k > 1/3$ все вычисления заканчиваются при $\alpha > 0$, так как существование решения в этой области определяется сингулярностями во внешней части пограничного слоя, а не в пристеночной области.

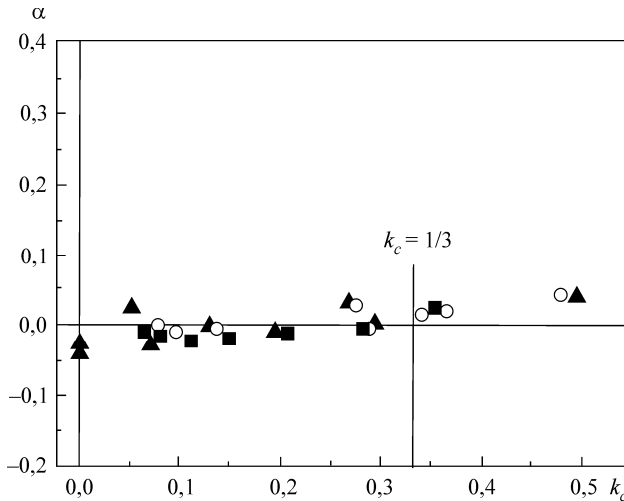


Рис. 4. Граница существования решения в наветренной плоскости симметрии тонкого кругового конуса под углом атаки и при $Pr = 1$ в зависимости от критического значения k_c : ▲ – [13], ■ – [14], ○ – [23]

Далее рассмотрим поведение решения полных уравнений пограничного слоя в пристеночной области рядом с плоскостью стекания при $\zeta \ll 1$. Уравнения трехмерного пограничного слоя имеют параболический тип, и их решение перед плоскостью стекания ничего не знает о решении в этой плоскости, однако, для того чтобы первое решение гладко переходило во второе при $\alpha > 0$, оно должно быть локально автомодельно. Из этого условия продольное $\tau(\zeta)$ и поперечное $\theta(\zeta)$ напряжения трения, а также автомодельная переменная η при $\zeta \ll 1$ должны определяться выражениями

$$\tau(\zeta) = \frac{\tau_0}{a(\zeta)}, \quad \theta(z) = \frac{\theta_0}{a(\zeta)}, \quad \eta = \frac{y}{a(\zeta)}. \quad (3.8)$$

Функция $a(z)$ при $\alpha \geq 0$ удовлетворяет условию $a(0) = 1$. В этом случае функции течения в пограничном слое около стенки можно представить в виде

$$\begin{aligned} f(\eta, \zeta) &= a(\zeta) \left[\tau_0 \frac{\eta^2}{2} + F(\eta, \zeta) \right], \quad u(\eta, \zeta) = f_\eta = \tau_0 \eta + U(\eta, \zeta), \\ g(\eta, \zeta) &= a(\zeta) \left[\theta_0 \frac{\eta^2}{2} + G(\eta, \zeta) \right], \quad w(\eta, \zeta) = g_\eta = \theta_0 \eta + W(\eta, \zeta), \quad (3.9) \\ v &= a \left[\left(\alpha - \frac{1}{2} \theta_0 k \zeta \frac{a_\zeta}{a} \right) \eta^2 + F - kG \left(1 + k \zeta \frac{a_\zeta}{a} \right) - k \zeta G_\zeta - k \zeta \eta_\zeta W \right]. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (3.8) и (3.9) в уравнения (1.2) и линеаризуя результат относительно возмущений, получим уравнения первого приближения для течения в пристеночной области около плоскости стекания:

$$\begin{aligned} U_{\eta\eta} + \alpha \eta^2 U_\eta + a^2 \left\{ k \theta_0 \zeta \eta U_\zeta + \tau_0 \left[F - kG \left(1 + \frac{\zeta a_\zeta}{a} \right) - k \zeta G_\zeta \right] \right\} &= -\alpha \tau_0 \eta^2, \\ W_{\eta\eta} + \alpha \eta^2 W_\eta + \\ + a^2 \left\{ k \theta_0 \zeta \eta W_\zeta + \theta_0 \left[F - kG \left(1 + \frac{\zeta a_\zeta}{a} \right) - k \zeta G_\zeta \right] - 3\alpha \zeta \eta W \right\} &= \quad (3.10) \\ = -\alpha \theta_0 \eta^2 + a^2 \left\{ \beta_0 + \beta_1 \eta + \frac{1}{2} \beta_3 \eta^2 + \left[\frac{2}{3} (\theta_0 + 3pM_e \tau_0) \eta - ph_r \right] U \right\}. \end{aligned}$$

Здесь $\beta_3 = \frac{2}{3} \tau_0 \theta_0 - k \theta_0^2 + pM_e \tau_0^2$. В уравнениях (3.10) вследствие их локальной автомодельности при $\alpha \geq 0$ по крайней мере первые два члена должны быть инвариантны относительно преобразований (3.8)–(3.9) и должны иметь одинаковые коэффициенты с уравнениями (3.5). Это условие определяет функцию $a(\zeta)$:

$$\alpha a^2 - \frac{1}{2} k \theta_0 \zeta a a_\zeta = \alpha, \quad a^2 = 1 + C \zeta^q, \quad q = \frac{4\alpha}{k \theta_0}. \quad (3.11)$$

Постоянная C находится из сравнения с численными расчетами. Из этого соотношения следует, что при $\alpha \geq 0$ и $q < 2$ решение уравнений (1.2) в пристеночной области при $\zeta \ll 1$ можно искать в виде разложения по степеням ζ . Первые два члена есть

$$\begin{aligned} F(\eta, \zeta) &= F_0(\eta) + \zeta^q F_q(\eta) + \dots, & U(\eta, \zeta) &= U_0(\eta) + \zeta^q U_q(\eta) + \dots, \\ G(\eta, \zeta) &= G_0(\eta) + \zeta^q G_q(\eta) + \dots, & W(\eta, \zeta) &= W_0(\eta) + \zeta^q W_q(\eta) + \dots. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Первый член этого разложения совпадает по форме с решением (3.7) для плоскости стекания, но зависит от автомодельной переменной (3.8). Вторые члены определяют собственное решение уравнений пограничного слоя (1.2) при $\zeta \ll 1$, которое описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} U_{q\eta\eta} + \alpha\eta^2 U_{q\eta} + 4\alpha\eta U_q &= -\tau_0 \left[F_q + F_0 - k(q+1)(G_0 + G_q) \right], \\ W_{q\eta\eta} + \alpha\eta^2 W_{q\eta} - 3\alpha \left(c - \frac{4}{3} \right) \eta W_q - 3\alpha c \eta W_0 &= \beta_0 + \beta_1 \eta + \frac{1}{2} \beta_3 \eta^2 - \\ - \theta_0 \left[F_q + F_0 - k(q+1)(G_0 + G_q) \right] - \left[\frac{2}{3} (\theta_0 + 3pM_e \tau_0) \eta - ph_r \right] &(U_0 + U_q). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Чтобы выделить асимптотическую форму функций $U_q(\eta)$ и $W_q(\eta)$ при $\eta \rightarrow \infty$, используем преобразование, подобное (3.6):

$$\xi = -\frac{\alpha\eta^3}{3}, \quad \eta = -\left(\frac{3\xi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

С помощью этого преобразования в главном приближении при $\eta \rightarrow \infty$ уравнения (3.13) сводятся к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \xi U_{q\xi\xi} + \left(\frac{2}{3} - \xi \right) U_{q\xi} - \frac{4}{3} U_q &= 0, \\ \xi W_{q\xi\xi} + \left(\frac{2}{3} - \xi \right) W_{q\xi} + \left(c - \frac{4}{3} \right) W_q &= \\ = -\frac{\beta_1}{3\alpha} + \frac{\beta_3}{6\alpha} \left(\frac{3\xi}{\alpha} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2(\theta_0 + 3pM_e \tau_0)}{9\alpha} (U_0 + U_q). \end{aligned}$$

Решение этих уравнений выражается формулами

$$U_q(\xi) = A_{q0} \Phi\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \xi\right) + A_{q1} \xi^{\frac{1}{3}} \Phi\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \xi\right),$$

$$W_q(\xi) = B_{q0} \Phi\left(\frac{4}{3} - c, \frac{2}{3}, \xi\right) + B_{q1} \xi^{\frac{1}{3}} \Phi\left(\frac{5}{3} - c, \frac{4}{3}, \xi\right) + \frac{9\beta_1}{2\tau_0} + \frac{3\beta_2}{\frac{11}{3}\tau_0 - k\theta_0} \left(\frac{3\xi}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{\theta_0 + 3M_e\tau_0}{2\tau_0} U_0 - \frac{\theta_0 + 3M_e\tau_0}{\tau_0 - 3k\theta_0} U_q.$$

Здесь A_{q0} , A_{q1} , B_{q0} и B_{q1} – постоянные, которые определяются сращиванием этих решений с численным решением в окрестности плоскости стекания. Эти соотношения показывают, что собственное решение в пристеночной области около плоскости стекания отлично от нуля. Оно нерегулярно при $\alpha \geq 0$ и сингулярно при $\alpha < 0$. Логарифмической особенности в этом случае нет, и при критическом значении k_c решение уравнений пограничного слоя существует, в отличие от внешней области.

Численно особенности в решениях трехмерного пограничного слоя были обнаружены в центральной части стреловидного крыла [5, 6] для некоторых модельных течений [8] и в плоскости симметрии при асимптотическом анализе течения около тонких треугольных крыльев малого удлинения в сверхзвуковом потоке [22, 28]. В работе [28] при рассмотрении задач возмущений, связанных с углом атаки и пограничным слоем, оказалось, что они приводят к бесконечным возмущениям скоростей в плоскости симметрии, хотя уравнения никаких видимых сингулярностей не имели. Главное приближение здесь описывается решением Блазиуса для треугольной пластины. На рис. 5 приведены безразмерные распределения возмущений напряжений продольного и поперечного трения $f_1''(z)$ и $g_1''(z)$, обусловленные вторым приближением пограничного слоя (рис. 5, а) и наличием угла атаки (рис. 5, б) в зависимости от поперечной переменной $z = 1 - Z/X$, где X и Z – декартовы координаты вдоль и по размаху крыла. При приближении к плоскости симметрии ($z = 1$) возмущения напряжений трения бесконечно растут. Подробное исследование уравнений для этих величин

показывает, что в этих случаях имеют место особенности как в пристеночном слое, так и во внешней части пограничного слоя. Во внешней части особенность поперечной скорости соответствует значениям параметра $m = 3/4$ и $m = 7/8$ в соотношениях (2.5) для рис. 5, *а* и *б*. Особенность возмущений продольной скорости связана только с особенностью в пристеночной области.

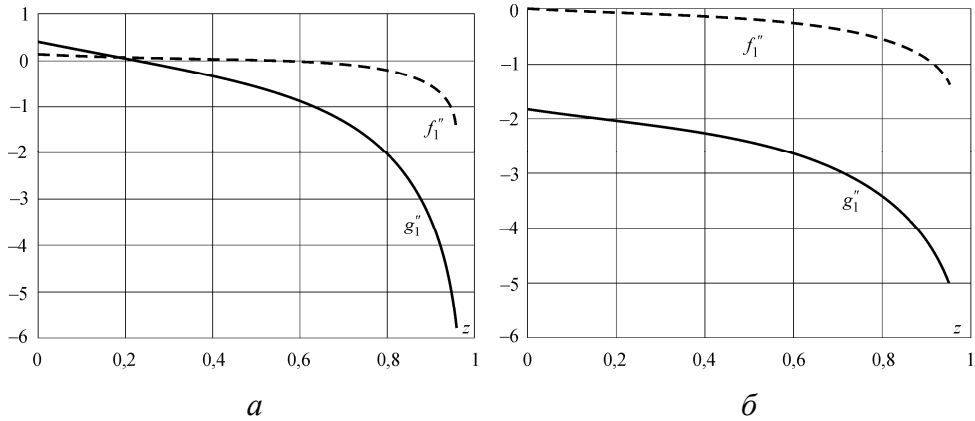


Рис. 5. Распределения возмущений напряжения трения на треугольном крыле малого удлинения при $M = 2$, связанные: *а* – со вторым приближением для пограничного слоя; *б* – углом атаки

Особенности в пристеночной области порождают структуру течения, отличную от представленной выше и не связанную с особенностями во внешней части пограничного слоя, но ее изучение выходит за рамки настоящей работы.

Заключение

В настоящей работе представлен краткий обзор исследований по изучению особенностей решений уравнений пограничного слоя, которые образуются при столкновении двух семейств линий тока. Это явление может возникнуть только в нестационарных или трехмерных задачах и не имеет аналогов в двухмерных течениях. Типичным примером такой задачи является течение в окрестности плоскости стекания тонкого конуса. Для этого случая решения уравнений для возмущений находятся в аналитической форме, что позволяет явно проанализировать характер особенностей.

Анализ решений для внешней части течения обнаружил два типа особенностей. Один тип присутствует в вязких возмущениях продольной и поперечной компонент скорости, он возникает при значениях относительного поперечного градиента давления в плоскости стекания $k \geq 1$ и приводит к экспоненциальному росту толщины пограничного слоя по мере приближения к плоскости стекания. При $k = 1$ особенность является логарифмической, а при $k > 1$ – степенной; ее появление коррелируется с возникновением отрыва пограничного слоя. Другой тип особенности при меньших значениях параметра $k \geq 1/3$ в первом приближении приводит к бесконечному росту только возмущений поперечной скорости и не связан напрямую с отрывом потока: при $k = 1/3$ особенность является логарифмической, а при $k > 1/3$ – степенной. Эти особенности уравнений пограничного слоя соответствуют определенной асимптотической структуре течения при $Re \gg 1$. Эта структура включает в себя пограничную область размером порядка толщины пограничного слоя, где эффект поперечной вязкой диффузии сглаживает особенность. Сравнение полученных решений параболизированных уравнений Навье–Стокса, описывающих течение в пограничной области, с решениями уравнений пограничного слоя подтверждают такой вывод. Вторая область обусловлена эффектом вязко-невязкого взаимодействия, имеет поперечный размер порядка корня квадратного из толщины пограничного слоя и двухслойную структуру. Для потенциального течения в невязкой внешней подобласти получено интегральное представление решения на основе теории тонкого крыла. Внутренняя подобласть описывается полными трехмерными уравнениями пограничного слоя, решение которых получено для внешней части вязкой области. Показано, что вязко-невязкое взаимодействие не устраняет особенность, а сдвигает ее в параметрическом пространстве; для исключения иррегулярности необходима вязкая пограничная область.

Для получения зависимости критического параметра появления особенностей k_c от чисел Маха и Прандтля, а также температуры стенки изучены решения уравнений пограничного слоя в пристеночной области около плоскости стекания. Анализ субхарактеристик уравнений (линий тока) показал наличие одного параметра α , знак которого определяет качественное изменение топологии линий тока и, следовательно, физической структуры течения. Показано и подтверждено сравнением со всеми имеющимися расчетами, что граница существо-

вания решений в плоскости стекания соответствует критерию $\alpha(k_c) = 0$. Анализ решений уравнений пограничного слоя около плоскости стекания выявил наличие нерегулярных при $\alpha \geq 0$ и сингулярных при $\alpha < 0$ собственных решений. Это подтверждается численными расчетами течения около треугольных крыльев малого удлинения. Сингулярности в пристеночной области порождают определенную структуру течения в своей окрестности, исследование которой выходит за рамки настоящей работы. Полученные результаты не зависят от внешних краевых условий и справедливы для всего диапазона скоростей потока, включая гиперзвуковые.

Представленное исследование позволяет заключить, что течение в окрестности плоскостей симметрии, в частности на крыльях, имеет сложную структуру, которую необходимо учитывать при численном моделировании, чтобы избежать потерь точности. Регулярные разложения параметров течения, обычно используемые при решениях уравнений трехмерного пограничного слоя, неприменимы в окрестности этой плоскости, и она не может рассматриваться как плоскость краевых условий вследствие возможного отсутствия в ней решений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-03615).

Библиографический список

1. Stewartson K. On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1951. – Vol. 4. – P. 182–198.
2. Stewartson K. The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. – Oxford: Clarendon press, 1964. – 191 p.
3. Stewartson K., Simpson C.J. On a singularity initiating a boundary layer collision // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1982. – Vol. 35. – P. 1–16.
4. Тимошин С.Н. Особенность в решении уравнений пограничного слоя при столкновении двух пристеночных струй // Известия АН СССР. МЖГ. – 1991. – № 4. – С. 75–81.
5. Cousteix J., Houdeville R. Singularities in three-dimensional turbulent boundary-layer calculations and separation phenomena // AIAA Paper. – 1981. – Paper 1201.
6. Cousteix J. Three-dimensional and unsteady boundary-layer computations // Ann. Rev. Fluid Mechanics. – 1986. – Vol. 18. – P. 173–196.

7. Cebeci T., Khattab A.K., Stewartson K. Three-dimensional laminar boundary layers and the ok of accessibility // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1981. – Vol. 107. – P. 57–87.

8. Williams J.C. Singularities in solution of three-dimensional boundary layer equations // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1985. – Vol. 160. – P. 257–279.

9. Moore F.K. Three-dimensional boundary layer theory // *Advances in Applied Mechanics*. – 1956. – Vol. 4. – P. 159–228.

10. Башкин В.А. О единственности автомодельных решений уравнений трехмерного ламинарного пограничного слоя // *Известия АН СССР. МЖГ*. – 1968. – № 5. – С. 35–41.

11. Башкин В.А., Диканский Е.А. Ламинарный пограничный слой на линиях растекания и стекания конических тел в сверхзвуковом потоке при различных числах Прандтля // *Ученые Записки ЦАГИ*. – 2001. – Т. 32, № 3–4. – С. 66–80.

12. Dwyer H.A. Boundary layer on a hypersonic sharp cone at small angle of attack // *AIAA Journal*. – 1971. – Vol. 9, № 2. – P. 277–284.

13. Roux B. Supersonic laminar boundary layer near the plane of symmetry of a cone at incidence // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1972. – Vol. 51, pt. 1. – P. 1–14.

14. Wu P., Libby P.A. Laminar boundary layer on a cone near a plane of symmetry // *AIAA Journal*. – 1973. – Vol. 11, № 3. – P. 326–333.

15. Murdock J.W. The solution of sharp cone boundary layer equations in the plane of symmetry // *Journal of Fluid Mechanics*. – 1972. – Vol. 54, pt. 4. – P. 665–678.

16. Boericke R.R. The laminar boundary layer on a cone at incidence in supersonic flows // *AIAA Journal*. – 1971. – Vol. 9, № 3. – P. 462–468.

17. Нейланд В.Я., Соколов Л.А. Ламинарный пограничный слой на конусе под углом атаки в сверхзвуковом потоке // *Труды ЦАГИ*. – 1977. – № 1819. – С. 3–9.

18. Cebeci T., Stewartson K., Brown S.N. Nonsimilar boundary layers on the leeward side of cones at incidence // *Comput. and Fluids*. – 1983. – Vol. 11, № 3. – P. 175–186.

19. Rubin S.G., Lin T.C., Tarulli F. Symmetry plane viscous layer on a sharp cone // *AIAA Journal*. – 1977. – Vol. 15, № 2. – P. 204–211.

20. Шалаев В.И. Особенности в пограничном слое на конусе под углом атаки // *Известия РАН. МЖГ*. – 1993. – № 6. – С. 25–33.

21. Шалаев В.И. Особенности решений уравнений пограничного слоя и структура течения в окрестности плоскости стекания на конических телах // Известия РАН. МЖГ. – 2007. – № 4. – С. 61–71.

22. Шалаев В.И. Применение аналитических методов в современной аэромеханике. Ч. 1. Теория пограничного слоя. – М.: Изд-во МФТИ, 2010. – 300 с.

23. Шалаев В.И. Об особенностях уравнений трехмерного пограничного слоя // XI Всерос. съезд по фундаментальным проблемам теор. и прикладной механики: сб. докл. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – С. 4162–4165.

24. Асимптотическая теория отрывных течений / В.В. Сычев, А.И. Рубан, Вик.В. Сычев, Г.Л. Королев. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

25. Патель В.К., Чой Д.Г. Расчет трехмерных ламинарных и турбулентных пограничных слоев на телах вращения, установленных под углом атаки к набегающему потоку // Турбулентные сдвиговые течения – 2: материалы второго Междунар. симпоз. по турбулентным сдвиговым течениям / под ред. Л.Дж.С. Брэдбери, Ф. Дурста, Б.Е. Лаундера, Ф.В. Шмидта, Дж.Г. Уайтлоу. – М.: Машиностроение, 1983. – С. 207–229.

26. Александров С.В., Ваганов А.В., Шалаев В.И. Физические механизмы образования продольных вихрей, появления зон высоких тепловых потоков и раннего ламинарно-турбулентного перехода в гиперзвуковом потоке около треугольного крыла с затупленными передними кромками // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. – 2016. – № 45. – С. 9–31.

27. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц [и др.]; под ред. М. Абрамовиц и И. Стегун. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

28. Шалаев В.И. Пограничный слой на тонких крыльях малого удлинения // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1992. – № 1. – С. 71–78.

References

1. Stewartson K. On the impulsive motion of a flat plate in a viscous fluid. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1951, vol. 4, pp. 182-198.

2. Stewartson K. The theory of laminar boundary layers in compressible fluids. Oxford: Clarendon press, 1964. 191 p.

3. Stewartson K., Simpson C.J. On a singularity initiating a boundary layer collision. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1982, vol. 35, pp. 1-16.

4. Timoshin S.N. Osobennost v reshenii uravneniy pogranichnogo sloya pri stolknovenii dvukh pristenochnykh struy [Singularity in solution of boundary layer equations at two wall jet collision]. *Fluid Dynamics*, 1991, vol. 26, no. 4, pp. 75-81.

5. Cousteix J., Houdeville R. Singularities in three-dimensional turbulent boundary-layer calculations and separation phenomena. *AIAA Paper*, 1981, paper 1201.

6. Cousteix J. Three-dimensional and unsteady boundary-layer computations. *Ann. Rev. Fluid Mechanics*, 1986, vol. 18, pp. 173-196.

7. Cebeci T., Khattab A.K., Stewartson K. Three-dimensional laminar boundary layers and the ok of accessibility. *Journal of Fluid Mechanics*, 1981, vol. 107, pp. 57-87.

8. Williams J.C. Singularities in solution of three-dimensional boundary layer equations. *Journal of Fluid Mechanics*, 1985, vol. 160, pp. 257-279.

9. Moore F.K. Three-dimensional boundary layer theory. *Advances in Applied Mechanics*, 1956, vol. 4, pp. 159-228.

10. Bashkin V.A. O edinstvennosti avtomodelnykh resheniy uravneniy trekhmernogo laminarnogo pogranichnogo sloya [On uniqueness of self-similar solutions of three-dimensional boundary layer equations]. *Fluid Dynamics*, 1968, no. 5, pp. 35-41.

11. Bashkin V.A., Dikanskiy E.A. Laminarnyy pogranichnyy sloy na liniyakh rastekaniya i stekaniya konicheskikh tel v sverkhzvukovom potoke pri razlichnykh chislakh Prandtlya [Laminar boundary layer on attachment and runoff lines of conical bodies in supersonic flow at various Prandtl numbers]. *Uchenye zapiski Tsentralnogo aerogidrodinamicheskogo instituta*, 2001, vol. 32, no. 3-4, pp. 66-80.

12. Dwyer H.A. Boundary layer on a hypersonic sharp cone at small angle of attack. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, no. 2, pp. 277-284.

13. Roux B. Supersonic laminar boundary layer near the plane of symmetry of a cone at incidence. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, vol. 51, pt. 1, pp. 1-14.

14. Wu P., Libby P.A. Laminar boundary layer on a cone near a plane of symmetry. *AIAA Journal*, 1973, vol. 11, no. 3, pp. 326-333.

15. Murdock J.W. The solution of sharp cone boundary layer equations in the plane of symmetry. *Journal of Fluid Mechanics*, 1972, vol. 54, pt. 4, pp. 665-678.

16. Boericke R.R. The laminar boundary layer on a cone at incidence in supersonic flows. *AIAA Journal*, 1971, vol. 9, no. 3, pp. 462-468.

17. Neyland V.Ya., Sokolov L.A. Laminar boundary layer on cone at angle of attack in supersonic flow. *Trudy Tsentralnogo aerogidrodinamicheskogo instituta*, 1977, no. 1819, pp. 3-9.

18. Cebeci T., Stewartson K., Brown S.N. Nonsimilar boundary layers on the leeside of cones at incidence. *Computers and Fluids*, 1983, vol. 11, no. 3, pp. 175-186.

19. Rubin S.G., Lin T.C., Tarulli F. Symmetry plane viscous layer on a sharp cone. *AIAA Journal*, 1977, vol. 15, no. 2, pp. 204-211.

20. Shalaev V.I. Osobennosti v pograničnom sloe na konuse pod uglom ataki [Singularities in the boundary layer on a cone at incidence]. *Fluid Dynamics*, 1993, vol. 28, no. 6, pp. 770-777.

21. Shalaev V.I. Osobennosti resheniy uravneniy pograničnogo sloya i struktura techeniya v okrestnosti ploskosti stekaniya na konicheskikh telakh [Singularities of the boundary layer equations and the structure of the flow in the vicinity of the sink plane on conical bodies]. *Fluid Dynamics*, 2007, vol. 42, no. 4, pp. 560-570.

22. Shalaev V.I. Primenenie analiticheskikh metodov v sovremennoy aeromekhanike. Chast 1. Teoriya pograničnogo sloya [Application of analytical methods in modern aerodynamics. Part 1. Boundary layer theory]. Moskovskiy fiziko-tekhnicheskij institut, 2010. 300 p.

23. Shalaev V.I. Ob osobennostyakh uravneniy trekhmernogo pograničnogo sloya [On singularities of 3D boundary layer equations]. *Sbornik dokladov XI Vserossiyskogo sezda po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki*. Kazanskiy universitet, 2015, pp. 4162-4165.

24. Sychev V.V., Ruban A.I., Sychev Vik.V., Korolev G.L. Asimptoticheskaya teoriya otrvnykh techeniy [Asymptotic theory of separated flows]. Moscow: Nauka, 1987. 256 p.

25. Patel V.K., Choy D.G. Raschet trekhmernykh laminarnykh i turbulentnykh pograničnykh sloev na telakh vrashcheniya, ustanovlennykh pod uglom ataki k nabegayushchemu potoku [Calculations of three-dimensional and turbulent boundary layers on bodies of revolution at inci-

dence to freestream]. *Materialy vtorogo Mezhdunarodnogo simpoziuma po turbulentnym sdvigovym techeniyam "Turbulentnye sdvigovye techeniya 2"*. Moscow: Mashinostroenie, 1983, pp. 207-229.

26. Aleksandrov S.V., Vaganov A.V., Shalaev V.I. Fizicheskie mekhanizmy obrazovaniya prodolnykh vikhrey, poyavleniya zon vysokikh teplovykh potokov i rannego laminarno-turbulentnogo perekhoda v giperzvukovom potoke okolo treugolnogo kryla s zatuplennymi perednimi kromkami [Physical mechanisms of longitudinal vortices formation, appearance of zones with high heat fluxes and early transition in hypersonic flow over delta wing with blunted leading edges]. *PNRPU Aerospace Engineering Bulletin*, 2016, no. 45, pp. 9-31.

27. Abramovits M., Stegun I. Spravochnik po spetsialnym funktsiyam [Handbook of mathematical functions]. Moscow: Nauka, 1979. 832 p.

28. Shalaev V.I. Pogranichnyy sloy na tonkikh krylyakh malogo udlineniya [Boundary layer on thin small aspect ratio wings]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1992, no. 1, pp. 71-78.

Об авторе

Шалаев Владимир Иванович (Жуковский, Россия) – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отделения № 8 Центрального аэрогидродинамического института им. Н.Е. Жуковского (140180, г. Жуковский, ул. Жуковского, д. 1, e-mail: vi.shalaev@yandex.ru); профессор кафедр «Информатика и вычислительная математика», «Теоретическая и прикладная аэрогидромеханика» Московского физико-технического института (государственного университета) (141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9).

About the author

Vladimir I. Shalaev (Zhukovsky, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Department No. 8, Central Aerohydrodynamic Institute (1, Zhukovsky st., Zhukovsky, 140180, Russian Federation, e-mail: vi.shalaev@yandex.ru); Professor, Department of Computer Sciences and Numerical Mathematics, Department of Theoretical and Applied Aerohydrodynamics, Moscow Institute of Physics and Technology (State University) (9, Institutskiy lane, Dolgoprudny, 141701, Russian Federation).

Получено 06.09.2016