

Романова Т.П. Несущая способность нагружаемых ослабленных ледяных пластин криволинейной формы переменной толщины // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 3. – С. 148–163. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.10

Romanova T.P. Load-bearing capacity of ice weakened plates of curvilinear shape with variable thickness. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2016. No. 3. Pp. 148-163. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.10



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.3.10

УДК 539.4+539.37

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ НАГРУЖАЕМЫХ ОСЛАБЛЕННЫХ ЛЕДЯНЫХ ПЛАСТИН КРИВОЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Т.П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 27 апреля 2016 г.

Принята: 25 июля 2016 г.

Опубликована: 30 сентября 2016 г.

Ключевые слова:

жесткопластическая модель, криволинейный контур, несжимаемое основание, ледяная пластина, переменная толщина, предельная нагрузка, разнотолщинный материал

АННОТАЦИЯ

Разработана методика определения несущей способности ослабленных ледяных нагружаемых площадок, которые моделируются идеальной жесткопластической пластиной, расположенной на несжимаемом основании. Пластина имеет свободно опертый или защемленный произвольный кусочно-гладкий криволинейный внешний контур. В центральной части пластины расположено произвольное свободное отверстие. Толщина пластины уменьшается при приближении к границе отверстия. На пластину действует нагрузка, локально распределенная около отверстия по области произвольной формы. Приложенная нагрузка является произвольной функцией координат. Учитывается свойство разной сопротивляемости льда при растяжении и сжатии. Решение построено на основе принципа виртуальной работы. В зависимости от геометрических параметров пластины рассмотрены два варианта кинематически допустимого деформирования. В обеих схемах деформирования центральная часть пластины при воздействии нагрузки движется в направлении действия нагрузки, а область около границы вследствие несжимаемости основания движется в противоположном направлении. Введена криволинейная ортогональная система координат, связанная с внешним криволинейным контуром пластины, в которой удобно проводить вычисления двойных интегралов, описывающих решение задачи. Получены аналитические выражения для предельных нагрузок. Определены две интегральные характеристики приложенной нагрузки и показано, что в случае действия на пластину различно распределенных поверхностных нагрузок, у которых эти две характеристики совпадают, пластина будет иметь одинаковые предельные нагрузки. В качестве примера рассмотрена шарнирно опертая и защемленная пластина в форме эллипса с линейной функцией толщины, находящаяся под действием нескольких видов локальных поверхностных нагрузок.

© ПНИПУ

© Романова Татьяна Павловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: lab4nemir@gmail.com

Tatiana P. Romanova – PhD in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: lab4nemir@gmail.com

LOAD-BEARING CAPACITY OF ICE WEAKENED PLATES OF CURVILINEAR SHAPE WITH VARIABLE THICKNESS

T.P. Romanova

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 27 April 2016
Accepted: 25 June 2016
Published: 30 September 2016

Keywords:

rigid-plastic model, curvilinear contour, incompressible foundation, ice plate, variable thickness, limit load, material with different tensile and compressive ultimate stresses

ABSTRACT

A method is developed for determining the load-bearing capacity of weakened ice plates, which are modeled by an ideal rigid-plastic plate located on an incompressible foundation. The plate is simply supported or clamped on arbitrary piece-wise smooth curvilinear external contour. The central part of the plate contains a free opening with an arbitrary contour. The thickness of the plate decreases when approaching the boundary of the opening. The plate is subject to a load distributed locally around the opening in the region of an arbitrary shape. The load is an arbitrary function of coordinates. The property of ice with different a resistance in tension and compression is taken into account. The solution is made based on the principle of virtual work. Two variants of kinematically admissible deformations are considered in dependence on the geometric parameters of the plate. In both deformation schemes, the central part of the plate (under loading) moves in the direction of the load; while the area near the external contour (due to the foundation incompressibility) moves in the opposite direction. An orthogonal curvilinear coordinate system associated with curvilinear external contour of the plate is considered. In this system, it is convenient to calculate double integrals describing the solution of the problem. Analytical expressions for the limit loads are obtained. Two integral characteristics of the load are determined; and it is shown that in case the plate is affected by differently distributed surface loads (in which these two characteristics coincide) the plate will have the same limit load. A simply supported and clamped plate shaped as an ellipse with a linear function of thickness under the action of several types of local surface loads is considered as an example. The proposed method allows calculating the load-bearing capacity of weakened curvilinear ice plates on an incompressible foundation and estimating the possibility to increase the load-bearing capacity by increasing the loaded area and by redistributing the load on the area of loading.

© PNRPU

Введение

Вопросы рационального проектирования разнообразных ледовых морских сооружений являются крайне важными на сегодняшний день в связи с растущим геополитическим и экономическим интересом к Арктическому региону. Существенной характеристикой ледяного поля, требующей особого изучения, является анизотропия прочностных свойств морского льда как по площади ледяного поля, так и по толщине [1, 2]. В связи с возможным использованием льда как материала для различных инженерных решений, в качестве опоры или площадки приема транспортных средств и грузов, для безопасности работ на льду особое значение имеет оценка несущей способности ледяного покрова, у которого возможно образование опасных мест, таких как полынья, промоины, проталины и т.п. В таких местах резко снижаются прочностные свойства льда и их границы при моделировании можно считать свободными отверстиями. В настоящее время обязательной составной частью расчетов ответственных ледовых площадок становится учет влияния пластических деформаций льда [3–6]. В связи с этим в предлагаемой работе разработана методика для определения предельной нагрузки ослабленных ледяных нагружаемых площадок, которые моделируются, как и в [7], идеальной жесткопластической пластиной на несжимаемом основании. Пластина имеет свободно опертый или защемленный произвольный кусочно-гладкий внешний контур. В центральной части пластины находится свободное отверстие (полынья). Толщина пластины уменьшается при приближении к границе отвер-

стия. Пластина находится под действием нагрузки, распределенной по локальной области около отверстия. Учитывается свойство разной сопротивляемости льда при растяжении и сжатии. В литературе жесткопластический анализ такой задачи проведен только в случае отсутствия отверстия и при постоянной толщине. Для свободно опертой круглой пластины без отверстия при осесимметричном нагружении точное идеальное жесткопластическое решение на основе условия пластичности для моментов типа Треска построено в [7], упругое – в [8]. В рамках жесткопластической модели на основе принципа виртуальной работы случай ледяных пластин произвольного контура постоянной толщины, нагружаемых по произвольной области, рассмотрен в работе [9], криволинейных пластин, усиленных жесткой шайбой – в [10]. Предлагаемая работа является развитием методики, разработанной в [9, 10], на случай криволинейных ледяных пластин переменной толщины с отверстием. Упругая бесконечная ледяная пластина с круглым отверстием на упругом основании, переменной толщиной вблизи отверстия рассмотрена в [11]. Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин постоянной и переменной толщины под действием равномерно распределенной нагрузки изучалось в [12–14]. В работе [15] проведен жесткопластический осесимметричный анализ плавающей ледяной пластины при условии пластичности Треска под действием локальной ударной нагрузки без учета сопротивления основания. В [16, 17] рассмотрено увеличение несущей способности ледяной плиты, усиленной различными видами геосинтетических материалов, которая моделируется как упругая пластина на упругом основании. Несущая способность ледяных балок в рамках модели упругопластической среды с образованием пластических шарниров оценена в [18] численно с помощью программного комплекса LS-DYNA.

1. Основные предположения и геометрические соотношения

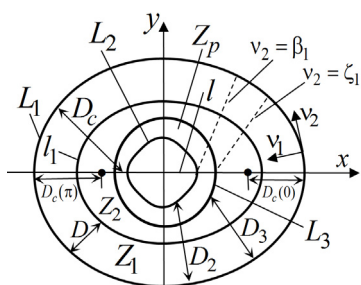


Рис. 1. Криволинейная пластина.
 Схема деформирования 1
 Fig. 1. Curvilinear plate.
 Deformation scheme 1

Рассмотрим тонкую идеальную жесткопластическую пластину с произвольным выпуклым кусочно-гладким свободно опертым или защемленным контуром L_1 (рис. 1). Пластина находится на несжимаемом основании. В центральной части пластины находится свободное отверстие с произвольным контуром L_2 . Около отверстия расположена двусвязная область Z_p с контурами L_2 и L_3 , имеющая переменную толщину. Область Z_p нагружена произвольной распределенной нагрузкой P .

Пусть уравнение контура L_1 пластины записано в декартовых координатах (x, y) в параметрической форме

$$x = x_1(\varphi), \quad y = y_1(\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Радиус кривизны контура L_1 за исключением особых точек

$$R(\varphi) = B^3(\varphi) / \left[\frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} \right) \right], \quad B(\varphi) = \sqrt{(\partial x_1 / \partial \varphi)^2 + (\partial y_1 / \partial \varphi)^2}. \quad (1)$$

Для определенности считаем, что контуры L_i ($i = 1 \dots 3$) симметричны относительно оси x , контур пластины имеет особенности только при $y = 0$, и геометрические размеры пластины по оси x не меньше, чем по оси y . Также считаем, что нагрузка P распределена симметрично относительно оси x и ее главный момент относительно оси y равен нулю.

Введем криволинейную ортогональную систему координат (v_1, v_2) (см. рис. 1), связанную с координатами (x, y) соотношениями [9, 12]:

$$x = x_1(v_2) - v_1 y_1'(v_2) / B(v_2), \quad y = y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2) / B(v_2), \quad (\square)' = \partial(\square) / \partial v_2. \quad (2)$$

Кривые $v_1 = \text{const}$ находятся на расстоянии v_1 от контура L_1 внутрь пластины и имеют радиус кривизны $\rho_1 = R(v_2) - v_1$. Прямые $v_2 = \text{const}$ являются перпендикулярами к контуру L_1 (радиус кривизны $\rho_2 = \infty$). Система координат (v_1, v_2) является левой (см. рис. 1). Элемент площади в координатах (v_1, v_2) равен $ds = B(1 - v_1/R) dv_1 dv_2$. Уравнение L_1 имеет вид $v_1 = 0$ ($0 \leq v_2 \leq 2\pi$). Для гладкого криволинейного контура L_1 справедливо равенство [9]

$$\int_0^{2\pi} \frac{B(v_2)}{R(v_2)} dv_2 = 2\pi. \quad (3)$$

Все нормали к контуру L_1 , опущенные внутрь пластины на ось x , попадут на линию l (см. рис. 1). Уравнение линии l в координатах (v_1, v_2) имеет вид $v_1 = D_c(v_2)$ ($0 \leq v_2 \leq \pi$), где [12]

$$D_c(v_2) = |y_1(v_2) / x_1'(v_2)| B(v_2). \quad (4)$$

Обозначим через $D_{\min} = \min_{0 \leq v_2 \leq \pi} D_c(v_2) = \min(D_c(0), D_c(\pi))$. В случае гладкого контура L_1 будет выполняться $D_{\min} > 0$. Для кусочно-гладкого контура L_1 линия l походит через особые точки контура (которые в силу сделанного предположения расположены при $y = 0$, то есть при $v_2 = 0$ или $v_2 = \pi$) и $D_{\min} = 0$.

Границы контуров L_2, L_3 заданы; в координатах (v_1, v_2) они имеют вид (см. рис. 1; $0 \leq \beta_1 \leq \zeta_1 \leq \zeta_2 \leq \beta_2 \leq \pi$)

$$L_2: v_1 = D_2(v_2), \quad \beta_1 \leq v_2 \leq \beta_2, \quad 2\pi - \beta_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \beta_1,$$

$$L_3: v_1 = D_3(v_2), \quad \zeta_1 \leq v_2 \leq \zeta_2, \quad 2\pi - \zeta_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \zeta_1,$$

где $D_2(\beta_j) = D_c(\beta_j)$, $D_3(\zeta_j) = D_c(\zeta_j)$ ($j = 1, 2$).

В силу симметрии будем рассматривать только половину пластины при $0 \leq v_2 \leq \pi$. В зависимости от соотношения величин D_{\min} , $D_2(\beta_1)$, $D_2(\beta_2)$, $D_3(\zeta_1)$, $D_3(\zeta_2)$ линия l расположена внутри контура L_2 , пересекает L_2 или L_3 . Для определенности считаем, что если l пересекает L_2 или L_3 , то пересекает только в двух местах. Случаи, когда прямая l

пересекает L_2 или L_3 в одном месте, анализируются аналогично. Обозначим $D_{2m} = \max(D_2(\beta_1), D_2(\beta_2))$, $D_{3m} = \max(D_3(\zeta_1), D_3(\zeta_2))$. Возможны три варианта для определения области Z_p .

А) $D_{\min} > D_{2m}$ (прямая l находится внутри контура L_2 и не пересекает его); $\zeta_1 = \beta_1 = 0$, $\zeta_2 = \beta_2 = \pi$,

$$Z_p: D_3(v_2) \leq v_1 \leq D_2(v_2) \text{ при } 0 \leq v_2 \leq \pi; \quad (5)$$

Б) $D_{3m} \leq D_{\min} \leq D_{2m}$ (прямая l пересекает L_2 и находится внутри L_3); $\zeta_1 = 0$, $\beta_1 > 0$, $\zeta_2 = \pi$, $\beta_2 < \pi$,

$$Z_p: D_3(v_2) \leq v_1 \leq D_c(v_2) \text{ при } 0 \leq v_2 \leq \beta_1, \beta_2 \leq v_2 \leq \pi, \quad (6)$$

$$D_3(v_2) \leq v_1 \leq D_2(v_2) \text{ при } \beta_1 \leq v_2 \leq \beta_2;$$

В) $D_{\min} < D_{3m}$ (прямая l пересекает контуры L_2 и L_3); $\zeta_1 \leq \beta_1 < 0$, $\beta_2 \leq \zeta_2 < \pi$,

$$Z_p: D_3(v_2) \leq v_1 \leq D_c(v_2) \text{ при } \zeta_1 \leq v_2 \leq \beta_1, \beta_2 \leq v_2 \leq \zeta_2, \quad (7)$$

$$D_3(v_2) \leq v_1 \leq D_2(v_2) \text{ при } \beta_1 \leq v_2 \leq \beta_2.$$

Считаем, что толщина пластины зависит только от координаты v_1 и изменяется симметрично относительно срединной поверхности пластины. Причем толщина изменяется только в области Z_p , а вне Z_p она постоянна. Тогда толщина пластины в области Z_p равна $h = h_0 f_1(v_1)$, где h_0 – толщина на контуре L_3 и вне области Z_p ; $f_1(v_1)$ – невозрастающая функция, $f_1|_{(v_1, v_2) \in S - Z_p} = 1$ (S – область всей пластины).

Нагрузка, действующая в области Z_p , задана как $P = P_1 f_2(v_1, v_2)$, где P_1 – константа, $f_2(v_1, v_2)$ – функция координат, симметричная относительно оси x .

Под действием нагрузки нагруженная часть пластины около отверстия движется вниз в направлении действия нагрузки. Поскольку пластина находится на несжимаемом основании, то часть пластины у внешнего контура движется вверх. В связи с этим, при построении решения, как и в [9, 10], можно считать, что для пластины с произвольным кусочно-гладким контуром в предельном состоянии возможна схема деформирования с образованием пластического шарнира на линии l и ещё одной шарнирной замкнутой кривой – линии l_1 , движущейся поступательно вверх (рис. 1, 2). Поскольку l_1 движется поступательно, то на ней прогибы пластины равны. Обозначим область пластины между контуром L_1 линией l_1 и область, ограниченную линией l_1 , через Z_1 и Z_2 соответственно. Области Z_1 , Z_2 являются линейчатыми поверхностями. Обозначим угол поворота вверх плоскости пластины на контуре L_1 через α_1 и угол вращения вниз области Z_2 вокруг кривой l_1 через α_2 . Считаем, что α_1 и α_2 не зависят от параметра v_2 . Так же как в [9, 10, 12], из равенства прогибов на линии l_1 следует, что линия l_1 расположена на оди-

наковом расстоянии от контура L_1 , которое обозначим через D . По смыслу задачи нагруженная область Z_p движется в направлении действия нагрузки и находится внутри контура l_1 , тогда $D < D_{3m}$. Уравнение линии l_1 в координатах (v_1, v_2) имеет вид $v_1 = D$. Возможны два случая, когда $0 < D \leq D_{\min}$ (рис. 1, схема 1) и $D > D_{\min}$ (рис. 2, схема 2). При $D \leq D_{\min}$ линия l полностью находится внутри области Z_2 , и так как $D > 0$, то схема 1 допустима только при $D_{\min} > 0$, т.е. для гладкого контура L_1 .

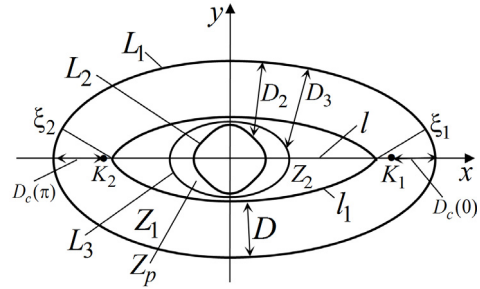


Рис. 2. Криволинейная пластина. Схема деформирования 2
Fig. 2. Curvilinear plate. Deformation scheme 2

Для материалов, имеющих разные значения предела текучести на растяжение σ_t и сжатие σ_c , в том числе для льда, предельный изгибающий момент для пластины толщиной h равен $\sigma_0 h^2 / 4$, где $\sigma_0 = 2\sigma_t \sigma_c / (\sigma_t + \sigma_c)$ ([3, 19]). С учетом переменной толщины рассматриваемой пластины предельный изгибающий момент в области Z_p равен $M_0 f_1^2(v_1)$, а вне $Z_p - M_0$, где $M_0 = \sigma_0 h_0^2 / 4$.

2. Определение предельной нагрузки при схеме 1

Рассмотрим подробно схему 1 (см. рис. 1) ($D \leq D_{\min}$). Принцип виртуальной работы для рассматриваемой пластины имеет вид [20]

$$A = N, \tag{8}$$

$$A = \iint_S (P - Q) u^* ds, \tag{9}$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\theta^*]_{l_m} dl_m + \frac{\sigma_0}{4} \iint_S h^2 (|\kappa_1^*| + |\kappa_2^*|) ds. \tag{10}$$

Здесь A , N – работа внешних и внутренних сил соответственно; Q – сила сопротивления основания; u – прогиб; ρ – поверхностная плотность материала пластины; m – количество линий разрыва поля перемещений; l_m – линии разрыва поля перемещений, включая контур пластины; $[\theta]_{l_m}$ – разрыв угла поворота плоскости пластины на l_m ; M_m – изгибающий момент на l_m ; dl_m – элемент линии l_m ; κ_1 и κ_2 – главные кривизны поверхности прогибов пластины. Верхним индексом «*» обозначены кинематически допустимые величины.

Кинематически допустимые прогибы в разных областях пластины

$$\begin{cases} (v_2, v_1) \in Z_1 : u^* = -\alpha_1^* v_1, \\ (v_2, v_1) \in Z_2 : u^* = -\alpha_1^* D + \alpha_2^* (v_1 - D). \end{cases} \tag{11}$$

Область Z_1 в рассматриваемом случае определена как

$$Z_1: 0 \leq v_1 \leq D \text{ при } 0 \leq v_2 \leq \pi.$$

Область Z_2 для вариантов (5)–(7) определяется как

А) $Z_2: D \leq v_1 \leq D_2(v_2)$ при $0 \leq v_2 \leq \pi$;

Б, В) $Z_2: D \leq v_1 \leq D_c(v_2)$ при $0 \leq v_2 \leq \beta_1, \beta_2 \leq v_2 \leq \pi$; (12)

$$D \leq v_1 \leq D_2(v_2) \text{ при } \beta_1 \leq v_2 \leq \beta_2.$$

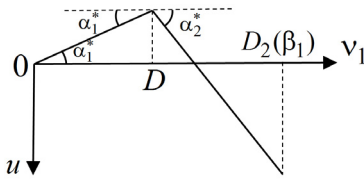


Рис. 3. Прогибы пластины в сечении $v_2 = \beta_1$ для схемы 1

Fig. 3. Plate deflections in the section $v_2 = \beta_1$ for scheme 1

Прогибы в сечении $v_2 = \beta_1$ для схемы 1 изображены на рис. 3.

Условие несжимаемости основания имеет вид

$$\iint_S u^* ds = 0. \quad (13)$$

Если считать, что сопротивление Q не зависит от координат пластины, выражение (9) с учетом (13) примет вид

$$\begin{aligned} A &= \iint_S Pu^* ds - Q \iint_S u^* ds = P_1 \iint_{Z_p} f_2(v_1, v_2) u^* ds = \\ &= P_1 \iint_{Z_p} f_2(v_1, v_2) [-\alpha_1^* D + \alpha_2^* (v_1 - D)] B(1 - \frac{v_1}{R}) dv_1 dv_2 = \\ &= P_1 [-\alpha_1^* DC_1 + \alpha_2^* (C_2 - DC_1)]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$C_1 = \iint_{Z_p} f_2(v_1, v_2) B(1 - v_1/R) dv_1 dv_2, \quad C_2 = \iint_{Z_p} f_2(v_1, v_2) v_1 B(1 - v_1/R) dv_1 dv_2;$$

Здесь C_1, C_2 – положительные константы, различные для вариантов (5) – (7) задания области Z_p . Величина $C_1 P_1$ является полной приложенной нагрузкой.

Работу внутренних сил (10) можно представить в виде суммы работ:

$$N = \sum_{i=1}^5 N_i,$$

где N_1 – работа внутренних сил на контуре L_1 ; N_2 – внутри области Z_1 ; N_3 – на контуре l_1 ; N_4 – внутри области Z_2 ; N_5 – на прямой l . На контуре L_1 нормальный изгибающий момент равен $(1 - \eta)M_0$ ($\eta = 0$ при защемлении контура L_1 , и $\eta = 1$ при его свободном опирании), разрыв угла поворота на L_1 равен α_1 , и в области Z_1 кривизны $\kappa_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial v_1^2} = 0$,

$\kappa_2 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} = \frac{\alpha_1}{R - v_1}$. Разрыв угла поворота на l_1 равен $\alpha_1 + \alpha_2$. Нормальный изгибающий

момент на l равен $\sigma_0 h^2 (D_c) / 4$, и на l_1 он равен M_0 . В области Z_2 кривизны

$$\kappa_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial v_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u}{\partial v_1} = \frac{\alpha_2}{R - v_1}. \quad \text{Тогда с учетом (3) получим}$$

$$N_1 = \alpha_1^* M_0 (1 - \eta) \int_0^\pi B dv_2; \quad N_2 = \alpha_1^* M_0 \int_0^{\pi D} \int_0^\pi \frac{1}{(R - v_1)} \left(\frac{B}{R} \right) (R - v_1) dv_1 dv_2 = \alpha_1^* M_0 \pi D$$

$$N_3 = (\alpha_1^* + \alpha_2^*) M_0 \int_0^\pi \frac{B}{R} (R - D) dv_2 = (\alpha_1^* + \alpha_2^*) M_0 \left(\int_0^\pi B dv_2 - \pi D \right)$$

Выражение для N_4 , N_5 можно получить, как в [12, 13], учитывая, что в области Z_p переменная толщина пластины:

$$N_4 = \alpha_2^* M_0 \iint_{Z_2} f_1^2(v_1) \frac{1}{(R - v_1)} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 = \alpha_2^* M_0 \iint_{Z_2} f_1^2(v_1) \frac{B}{R} dv_1 dv_2;$$

$$N_5 = \alpha_2^* M_0 \left[\int_0^{\beta_1} f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2 + \int_{\beta_2}^\pi f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2 \right],$$

Для случая А (5) справедливо, что $\beta_1 = \beta_2 = 0$, и $N_5 = 0$.

Полная работа внутренних сил будет определяться как

$$N = M_0 \left\{ \alpha_1^* (2 - \eta) \int_0^\pi B dv_2 + \alpha_2^* \left[F_1(D) + \int_0^\pi B dv_2 - \pi D \right] \right\}, \quad (15)$$

$$F_1(D) = \iint_{Z_2} f_1^2(v_1) \frac{B}{R} dv_1 dv_2 + \int_0^{\beta_1} f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2 + \int_{\beta_2}^\pi f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2,$$

где $F_1(D)$ для различных вариантов (5)–(7) после вычисления интегралов является известной функцией только величины D .

Подставляя выражения (14), (15) в (8), получим равенство

$$P_1 \left[-\alpha_1^* DC_1 + \alpha_2^* (C_2 - DC_1) \right] =$$

$$= M_0 \left\{ \alpha_1^* (2 - \eta) \int_0^\pi B dv_2 + \alpha_2^* \left[F_1(D) + \int_0^\pi B dv_2 - \pi D \right] \right\} \quad (16)$$

Условие несжимаемости основания (13) при учете (11)–(12) имеет выражение:

$$\int_0^{\pi D} \int_0^\pi (-\alpha_1^*) v_1 B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 + \iint_{Z_2} [-\alpha_1^* D + \alpha_2^* (v_1 - D)] B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\alpha_2^* = \alpha_1^* F_2(D), \quad (17)$$

$$F_2(D) = \frac{D \left[3D \int_0^\pi B dv_2 - 2\pi D^2 + 6 \iint_{Z_2} B(1 - v_1/R) dv_1 dv_2 \right]}{6 \iint_{Z_2} (v_1 - D) B(1 - v_1/R) dv_1 dv_2},$$

где $F_2(D)$ для вариантов (5)–(7) после вычисления интегралов является известной функцией только величины D .

Подставляя (17) в (16) и учитывая, что α_1^* – произвольный параметр в кинематически допустимом поле прогибов (11), для нагрузки P_1 получим выражение

$$P_1 = M_0 \frac{(2 - \eta) \int_0^\pi B dv_2 + F_2(D) \left[F_1(D) + \int_0^\pi B dv_2 - \pi D \right]}{-DC_1 + F_2(D)(C_2 - DC_1)}. \quad (18)$$

Видно, что нагрузка P_1 в выражении (18) является функцией только величины D . Предельную нагрузку P_{01} для схемы 1 определим из (18) как

$$P_{01} = \min_{0 < D \leq D_{\min}} P_1. \quad (19)$$

3. Определение предельной нагрузки при схеме 2

Рассмотрим подробно схему 2 (см. рис. 2) $D > D_{\min}$. Так же рассматриваем только половину пластины при $0 \leq v_2 \leq 2\pi$. При $D > D_{\min}$ кривая l_1 пересекает линию l , для определенности считаем, что точек пересечения две – K_1 и K_2 с координатами (D, ξ_1) и (D, ξ_2) соответственно (в координатах (v_1, v_2)). В силу равенства (4) значения ξ_i ($i = 1, 2$) определяются через величину D и являются решениями уравнения

$$|y_1(\xi_i) / x_1'(\xi_i)| B(\xi_i) = D \quad (0 \leq \xi_i \leq \pi, i = 1, 2). \quad (20)$$

Для схемы 2 кинематически допустимые прогибы в разных областях пластины определяются соотношениями (11), в которых области Z_1 и Z_2 определены следующим образом:

$$Z_1 : \begin{cases} 0 \leq v_1 \leq D_c(v_2) & \text{при } 0 \leq v_2 \leq \xi_1; \xi_2 \leq v_2 \leq \pi; \\ 0 \leq v_1 \leq D & \text{при } \xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2; \end{cases} \quad (21)$$

$$Z_2 : \begin{cases} D \leq v_1 \leq D_c(v_2) & \text{при } \xi_1 \leq v_2 \leq \beta_1; \beta_2 \leq v_2 \leq \xi_2; \\ D \leq v_1 \leq D_2(v_2) & \text{при } \beta_1 \leq v_2 \leq \beta_2. \end{cases}$$

Работа внешних сил A (9) для схемы 2 имеет выражение (14), в котором константы C_1, C_2 вычисляются при варианте (7). Работа внутренних сил (10) при схеме 2 вычисляется аналогично смехе 1. Тогда имеем

$$N_1 = \alpha_1^* M_0 (1 - \eta) \int_0^\pi B dv_2;$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \alpha_1^* M_0 \left[\int_0^{\xi_1} \int_0^{D_c} \frac{1}{(R-v_1)} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^D \frac{1}{(R-v_1)} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \right. \\
 &\left. + \int_{\xi_2}^{\pi} \int_0^{D_c} \frac{1}{(R-v_1)} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 \right] = \alpha_1^* M_0 \left[\int_0^{\xi_1} \frac{B}{R} D_c dv_2 + D \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{B}{R} dv_2 + \int_{\xi_2}^{\pi} \frac{B}{R} D_c dv_2 \right]; \\
 N_3 &= (\alpha_1^* + \alpha_2^*) M_0 \int_{\xi_1}^{\xi_2} B \left(1 - \frac{D}{R} \right) dv_2; \\
 N_4 &= \alpha_2^* M_0 \iint_{Z_2} f_1^2(v_1) \frac{1}{(R-v_1)} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 = \\
 &= \alpha_2^* M_0 \left\{ \int_{\xi_1}^{\beta_1} \frac{B}{R} \left[\int_D^{D_c} f_1^2(v_1) dv_1 \right] dv_2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{B}{R} \left[\int_D^{D_c} f_1^2 dv_1 \right] dv_2 + \int_{\beta_2}^{\xi_2} \frac{B}{R} \left[\int_D^{D_c} f_1^2 dv_1 \right] dv_2 \right\}; \\
 N_5 &= \alpha_2^* M_0 \left[\int_0^{\beta_1} f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2 + \int_{\beta_2}^{\pi} f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2 \right].
 \end{aligned}$$

Для полной работы внутренних сил получим выражение

$$N = M_0 \left\{ \alpha_1^* \left[(1-\eta) \int_0^{\pi} B dv_2 + F_3(D) \right] + \alpha_2^* F_4(D) \right\}, \quad (22)$$

$$F_3(D) = \int_0^{\xi_1} \frac{B}{R} D_c dv_2 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} B dv_2 + \int_{\xi_2}^{\pi} \frac{B}{R} D_c dv_2,$$

$$\begin{aligned}
 F_4(D) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} B \left(1 - \frac{D}{R} \right) dv_2 + \int_{\xi_1}^{\beta_1} \frac{B}{R} \left[\int_D^{D_c} f_1^2(v_1) dv_1 \right] dv_2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{B}{R} \left[\int_D^{D_c} f_1^2 dv_1 \right] dv_2 + \\
 &+ \int_{\beta_2}^{\xi_2} \frac{B}{R} \left[\int_D^{D_c} f_1^2 dv_1 \right] dv_2 + \int_0^{\beta_1} f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2 + \int_{\beta_2}^{\pi} f_1^2(D_c(v_2)) B \left(1 - \frac{D_c}{R} \right) dv_2.
 \end{aligned}$$

Условие несжимаемости основания (13) для схемы 2 при учете (11), (21) имеет выражение

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\xi_1} \int_0^{D_c} (-\alpha_1^*) v_1 B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^D (-\alpha_1^*) v_1 B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 + \\
 &+ \int_{\xi_2}^{\pi} \int_0^{D_c} (-\alpha_1^*) v_1 B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 + \int_{\xi_1}^{\beta_1} \int_D^{D_c} [-\alpha_1^* D + \alpha_2^* (v_1 - D)] B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 + \\
 &\quad + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_D^{D_c} [-\alpha_1^* D + \alpha_2^* (v_1 - D)] B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 + \\
 &\quad + \int_{\beta_2}^{\xi_2} \int_D^{D_c} [-\alpha_1^* D + \alpha_2^* (v_1 - D)] B (1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 = 0,
 \end{aligned}$$

которое можно записать в виде

$$\alpha_2^* = \alpha_1^* F_5(D), \tag{23}$$

$$F_5 = \left\{ \int_0^{\xi_1} \int_0^{D_c} v_1 B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^D v_1 B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \int_{\xi_2}^{\pi} \int_0^{D_c} v_1 B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \right. \\ \left. + D \left[\int_{\xi_1}^{\beta_1} \int_D^{D_c} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_D^{D_2} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \int_{\beta_2}^{\xi_2} \int_D^{D_c} B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 \right] \right\} / \\ / \left[\int_{\xi_1}^{\beta_1} \int_D^{D_c} (v_1 - D) B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_D^{D_2} (v_1 - D) B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 + \right. \\ \left. + \int_{\beta_2}^{\xi_2} \int_D^{D_c} (v_1 - D) B \left(1 - \frac{v_1}{R} \right) dv_1 dv_2 \right].$$

Функции $F_3(D)$, $F_4(D)$, $F_5(D)$, обозначенные в (22), (23), после вычисления в них интегралов являются известными функциями только величины D .

Подставляя выражения (22) и (14) при варианте (7) в уравнение (8), получим равенство, из которого при учете (23) и того, что α_1^* – произвольный параметр в кинематически допустимом поле прогибов (11), (21), для нагрузки P_1 при схеме 2 получим выражение

$$P_1 = M_0 \frac{(1 - \eta) \int_0^{\pi} B dv_2 + F_3(D) + F_4(D)F_5(D)}{-DC_1 + F_5(D)(C_2 - DC_1)}. \tag{24}$$

Предельную нагрузку P_{02} для схемы 2 вычислим из (24):

$$P_{02} = \min_{D > D_{\min}} P_1. \tag{25}$$

Если пластина имеет кусочно-гладкий контур L_1 , то $D_{\min} = 0$ и она деформируется по схеме 2, а ее предельная нагрузка $P_0 = P_{02}$. Пластина с гладким контуром L_1 в общем случае может деформироваться как по схеме 1, так и по схеме 2, поэтому ее предельная нагрузка

$$P_0 = \min(P_{01}, P_{02}), \tag{26}$$

где P_{01} , P_{02} определены в (19), (25).

Из выражений (14), (18), (24) видно, что функция $f_2(v_1, v_2)$, характеризующая распределение нагрузки по поверхности пластины, входит только в две интегральные константы C_1 , C_2 . Поэтому если две различно распределенные нагрузки, действующие на геометрически равные пластины, имеют одинаковые интегральные характеристики C_1 , C_2 , то предельные значения этих нагрузок будут совпадать.

Предлагаемое решение будет также справедливо для пластин переменной толщины без отверстия, на несжимаемом основании, если принять $D_2(v_2) = D_c(v_2)$.

4. Численные примеры

В качестве примера рассмотрим эллиптическую пластину с полуосями a и γa , где $0 < \gamma \leq 1$ (рис. 4). Уравнение контура L_1 имеет вид $x_1 = a \cos \varphi$, $y_1 = \gamma a \sin \varphi$, поэтому

$$B(\varphi) = a\sqrt{\sin^2 \varphi + \gamma^2 \cos^2 \varphi}, \quad R(\varphi) = B^3(\varphi)/(\gamma a^2),$$

$D_c(\varphi) = \gamma B(\varphi)$, $D_{\min} = \gamma^2 a$. Считаем, что величины D_2 , D_3 являются постоянными и

$D_2 \leq D_{\min} = \gamma^2 a$. При этом прямая линия l находится внутри контура L_2 и реализуется случай А (5) со схемой деформирования 1. Пусть в области Z_p толщина пластины задана в виде

линейной функции $h = h_0(\gamma a - v_1)/(\gamma a - D_3)$,

то есть $f_1(v_1) = (\gamma a - v_1)/(\gamma a - D_3)$.

Тогда для схемы 1 функции $F_1(D)$, $F_2(D)$ в (15), (17) имеют вид

$$F_1(D) = -\pi D + \pi \left[2D_3 + \gamma a - (\gamma a - D_2)^3 / (\gamma a - D_3)^2 \right] / 3;$$

$$F_2 = D \left[3(2D_2 - D) \int_0^\pi B dv_2 - \pi(3D_2^2 - D^2) \right] / \left\{ (D_2 - D)^2 \left[3 \int_0^\pi B dv_2 - \pi(D + 2D_2) \right] \right\}.$$

С учетом последних выражений равенство (18) примет вид

$$P_1(D) = M_0 \pi \frac{a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + a_3 D^3 + a_4 D^4}{D(b_0 + b_1 D + b_2 D^2)}; \tag{27}$$

$$a_0 = (2 - \eta) D_2^2 (3\Omega_1 - 2D_2) \Omega_1, \quad a_1 = 3\Omega_2 [\Omega_3 - (2 - \eta) \Omega_1],$$

$$a_2 = 3[(2 - \eta) \Omega_1^2 - \Omega_1 \Omega_3 - 2\Omega_2], \quad a_3 = (4 + \eta) \Omega_1 + \Omega_3, \quad a_4 = -2,$$

$$b_0 = D_2 [3(2C_2 - C_1 D_2) \Omega_1 + D_2 (2C_1 D_2 - 3C_2)], \quad b_1 = -3C_2 \Omega_1, \quad b_2 = C_2,$$

$$\Omega_1 = \int_0^\pi B dv_2 / \pi \approx a [3(1 + \gamma) - 2\sqrt{\gamma}] / 4, \quad \Omega_2 = D_2 (2\Omega_1 - D_2),$$

$$\Omega_3 = \Omega_1 + \left[2D_3 + \gamma a - (\gamma a - D_2)^3 / (\gamma a - D_3)^2 \right] / 3.$$

В выражении Ω_1 для половины длины контура эллипса $\int_0^\pi B dv_2$ учтено его приближенное значение [21].

Рассмотрим знаменатель выражения (27). Обозначим через D_x минимальный положительный корень уравнения $b_0 + b_1 D_x + b_2 D_x^2 = 0$. Поскольку $b_1 < 0$, то $D_x =$

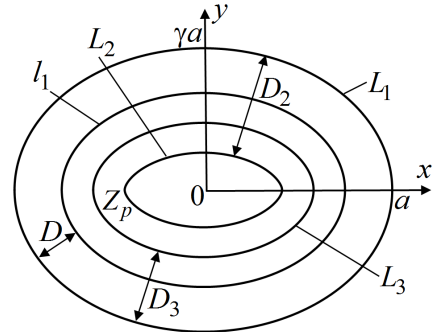


Рис. 4. Пластина в форме эллипса
Fig. 4. Plate in the shape of an ellipse

$= (-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}) / (2b_2)$. Из анализа выражения (27) следует, что функция $P_1(D)$ имеет единственный минимум на интервале $0 < D < D_x$ при $D = D_0$. Предельная нагрузка

$$P_0 = P_1(D_0). \quad (28)$$

Значение D_0 определяется из условия $\partial P / \partial D|_{D=D_0} = 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & D_0 (4a_4D_0^3 + 3a_3D_0^2 + 2a_2D_0 + a_1)(b_0 + b_1D_0 + b_2D_0^2) = \\ & = (a_0 + a_1D_0 + a_2D_0^2 + a_3D_0^3 + a_4D_0^4)(b_0 + 2b_1D_0 + 3b_2D_0^2) \end{aligned} \quad (29)$$

Рассмотрим несколько действующих поверхностных нагрузок, имеющих одинаковую полную нагрузку P_f , равную $P_1 \iint_{Z_p} B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2$. Тогда

$$P_f = P_1 \iint_{Z_p} f_2(v_1, v_2) B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 = P_1 \iint_{Z_p} B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 = C_1 P_1,$$

и у всех этих нагрузок будут одинаковые $C_1 = \iint_{Z_p} B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2$. Имеем

1) равномерно распределенную нагрузку $f_2(v_1, v_2) \equiv 1$. Для нее

$$C_2 = \iint_{Z_p} B(1 - v_1 / R) v_1 dv_1 dv_2;$$

2) синусоидальную нагрузку $f_2(v_1, v_2) = F_a \sin(v_1 / D_3 - 1)$,

$$F_a = \iint_{Z_p} B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 / \iint_{Z_p} \sin(v_1 / D_3 - 1) B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2;$$

$$C_2 = F_b \iint_{Z_p} (1 - v_1 / D_2) B(1 - v_1 / R) v_1 dv_1 dv_2.$$

3) линейную нагрузку $f_2(v_1, v_2) = F_b (1 - v_1 / D_2)$,

$$F_b = \iint_{Z_p} B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2 / \iint_{Z_p} (1 - v_1 / D_2) B(1 - v_1 / R) dv_1 dv_2;$$

$$C_2 = F_b \iint_{Z_p} (1 - v_1 / D_2) B(1 - v_1 / R) v_1 dv_1 dv_2.$$

Для рассматриваемой эллиптической пластины на рис. 5 приведена зависимость безразмерной полной предельной нагрузки $f = C_1 P_0 / (6M_0 S_e)$ от величины $\varepsilon = 1 - d_3$ ($d_j = D_j / a$, $j = 2, 3$, $S_e = \pi \gamma a^2$ – площадь всей эллиптической пластины). Считалось $\gamma = 0,9$, $d_2 = 0,8$, $d_3 \leq d_2 \leq d_m$, $d_m = D_{\min} / a = \gamma^2 = 0,81$. Кривые 1–3 (см. рис. 5) относятся к случаю свободного опирания контура ($\eta = 1$) при действии нагрузок 1)–3) соответственно. Кривые 4–6 (см. рис. 5) изображают решение в случае защемления внешнего контура пластины ($\eta = 0$) и нагрузок 1)–3). Во всех рассмотренных примерах реализуется

схема 1, а P_0 определяется из (27)–(29). Для разных значений параметра d_3 величина C_1 , равная площади нагружаемой области, различна. Из рис. 5 видно, что распределение нагрузки по нагружаемой области, даже при одинаковой полной нагрузке, существенно влияет на величину полной предельной нагрузки. Из рассмотренных трех примеров распределения нагрузки наименьшая полная предельная нагрузка будет в случае нагрузки вида 2), когда больше всего нагружена область вблизи отверстия (см. рис. 5, кривые 2, 5).

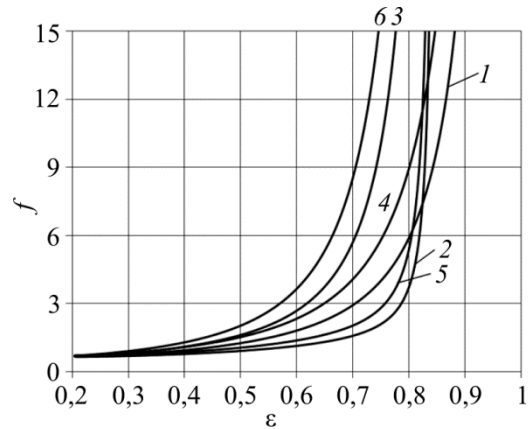


Рис. 5. Безразмерная полная предельная нагрузка f в зависимости от параметра области нагружения ε

Fig. 5. Dimensionless full limit load f depending on the loading area parameter ε

Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала определена предельная нагрузка для нагружаемых ослабленных ледяных пластин криволинейной формы переменной толщины, расположенных на несжимаемом основании. Произвольный кусочно-гладкий внешний контур пластины свободно оперт или защемлен. В центральной части пластины находится свободное отверстие (полынья). Толщина пластины плавно уменьшается при приближении к границе отверстия. Пластина находится под действием нагрузки, распределенной по локальной области около отверстия. Нагрузка является функцией координат. Учитывается свойство разной сопротивляемости льда при растяжении и сжатии. Решение построено на основе принципа виртуальной работы. Введена криволинейная ортогональная система координат, связанная с внешним контуром пластины и в которой удобно проводить вычисления двойных интегралов, описывающих решение задачи. В зависимости от геометрических параметров пластины рассмотрены две схемы кинематически допустимого деформирования. Получены аналитические выражения для определения предельных нагрузок. Показано, что если две различно распределенные нагрузки, действующие на геометрически равные пластины, имеют одинаковые интегральные характеристики C_1 , C_2 , то предельные значения этих нагрузок будут совпадать. В качестве примера рассмотрена эллиптическая пластина с линейно изменяющейся толщиной, находящаяся под действием нескольких типов локальных поверхностных нагрузок. Предлагаемая методика позволяет рассчитать несущую способность ослабленных криволинейных ледяных площадок и оценить степень ее возможного увеличения при увеличении нагружаемой области и при перераспределении нагрузки по области нагружения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00102-а).

Библиографический список

1. Политько В.А., Кантаржи И.Г. Исследуемые характеристики льда, необходимые для определения ледовых нагрузок // Вестн. Моск. гос. строит. ун-та. – 2015. – № 12. – С. 106–117.
2. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Механика разрушения и проблемы освоения Арктики // Арктика: экология и экономика. – 2015. – № 4 (20). – С. 14–27.
3. Бычковский Н.Н., Гурьянов Ю.А. Ледовые строительные площадки, дороги и переправы. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. техн. ун-та, 2005. – 260 с.
4. Sodhi D.S. Breakthrough loads of floating ice sheets // J. Cold Reg. Eng. – 1995. – Vol. 9. – No. 1 (4). – P. 4–22.
5. Kerr A.D. The bearing capacity of floating ice plates subjected to static or quasi-static loads. A critical survey // U.S. Army Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, N.H., Research Report 333. – 1975. – 43 p.
6. Langhorne P.J., Stone K.J.L., Smith C.C. The bearing capacity of saline ice sheets: centrifugal modelling // Can. Geotech. J. – 1999. – Vol. 36. – No. 3. – P. 467–481.
7. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate sealing an incompressible fluid // Int. J. Mech. Sci. – 1967. – Vol. 9. – No. 7. – P. 405–414.
8. Керр А.Д. Изгиб круговых пластинок, ограниченных несжимаемой жидкостью // Прикладная механика. Серия Е. Сб. переводов. – 1965. – Vol. 32. – No. 3 – С. 264–266.
9. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Несущая способность ледяных пластин произвольного контура, нагружаемых по произвольной области // Тр. 5-го Евраз. симп. по проблемам прочности материалов и машин для регионов холодного климата. г. Якутск, 1-5 июня 2010 / ИФТПС СО РАН. – Якутск, 2010. – С. 81–91.
10. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Несущая способность ледяных пластин криволинейной формы, усиленных жесткой вставкой // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 141–149.
11. Коренева Е.Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 240 с.
12. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates // J. Mechanics of Materials and Structures. – 2008. – Vol. 3. – No. 2. – P. 313–334.
13. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическое деформирование жесткопластических криволинейных пластин переменной толщины // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 108–120.
14. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика жесткопластической криволинейной пластины переменной толщины с произвольным внутренним отверстием // Прикладная механика. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 70–82.
15. Kennedy J.B., Iyengar K.J. Rigid-plastic analysis of floating ice sheets under impact loads // Can. J. Civ. Eng. – 1981. – Vol. 8. – P. 409–415.
16. Якименко О.В., Матвеев С.А., Сиротюк В.В. Исследование напряженного состояния и расчет несущей способности армированной ледяной плиты // Вестн. СибАДИ. 2014. – Вып. 3 (37). – С. 63–67.
17. Якименко О.В., Сиротюк В.В. Армирование ледовых переправ // Криосфера Земли. – 2014. – Т. 18, № 1. – С. 88–91.
18. Ли Лян, Шхинек К.Н. Предельная несущая способность ледяных балок // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 1. – С. 65–74.
19. Yan-bin Wang, Mao-hong Yu, Yun Xiao, Lin-sheng Li. Dynamic plastic response of circular plate based on unified strength theory // Int. J. Impact Engineering. – 2005. – Vol. 31. – No. 1. – p. 25–40.
20. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
21. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука, 1986. – С. 202.

References

1. Polit'ko V.A., Kantarzi I.G. Issleduemye kharakteristiki l'da, neobkhodimye dlia opredeleniia ledovykh nagruzok [Studied characteristics of ice needed to determine ice loads]. *Vestnik Moskovskogo gos. stroitel'nogo un-ta*, 2015, no. 12, pp. 106-117.
2. Gol'dshtein R. V., Osipenko N. M. Mekhanika razrusheniia i problemy osvoeniia Arktiki [Fracture mechanics and the problems of Arctic exploration]. *Arktika: ekologiia i ekonomika*, 2015, no. 4 (20), pp. 14-27.
3. Bychkovskii N. N., Gur'yanov Yu. A. Ledovye stroitel'nye ploshchadki, dorogi i perepravy [Ice construction sites, roads, and crossroads. Saratov], *Saratov, Sarat. gos. tekhn. un-t*, 2005, 260 p.
4. Sodhi D.S. Breakthrough loads of floating ice sheets. *J. Cold Reg. Eng.*, 1995, vol. 9, no. 1, (4), pp. 4-22.
5. Kerr A.D. The bearing capacity of floating ice plates subjected to static or quasi-static loads. A critical survey. *U.S. Army Cold Regions Research and Engineering Laboratory*, Hanover, N.H., Research Report 333, 1975, 43 p.
6. Langhorne P.J., Stone K.J.L., Smith C.C. The bearing capacity of saline ice sheets: centrifugal modelling. *Can. Geotech. J.*, 1999, vol. 36, no. 3, pp. 467-481.
7. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate sealing an incompressible fluid. *Int. J. Mech. Sci.*, 1967, vol. 9, no. 7, pp. 405-414.
8. Kerr A.D. Bending of circular plates sealing an incompressible liquid. *J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, no. 3, pp. 704-706.
9. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Nesushchaia sposobnost' ledianykh plastin proizvol'nogo kontura, nagruzhaemykh po proizvol'noi oblasti [Load-bearing capacity of ice plates with an arbitrary contour loaded over an arbitrary domain]. // *Tr. 5-go Evraz. simp. po problemam prochnosti materialov i mashin dlia regionov kholodnogo klimata. Iakutsk, 1-5 iyunia 2010, Iakutsk, IFTPS SO RAN*, 2010, pp. 81-91.
10. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Load-bearing capacity of curvilinear ice plates reinforced by a rigid insert. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2013, vol. 54, no. 4, pp. 636-643.
11. Koreneva E.B. Analiticheskie metody rascheta plastin peremnoi tolshchiny i ikh prakticheskie prilozheniia [Analytical methods of calculation of plates of variable thickness and their practical application]. Moscow, Iz-vo Assotsiatsii stroitel'nykh vuzov, 2009, 240 p.
12. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates. *J. Mechanics of Materials and Structures*, 2008, vol. 3, no. 2, pp. 313-334.
13. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dynamic deformation of rigid-plastic curvilinear plates of variable thickness. *Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 712-722.
14. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Dynamics of rigid-plastic curvilinear plate of varying thickness with an arbitrary hole. *Int. Appl. Mech.*, 2010, vol. 46, no. 3, pp. 304-314.
15. Kennedy J.B., Iyengar K.J. Rigid-plastic analysis of floating ice sheets under impact loads. *Can. J. Civ. Eng.*, 1981, vol. 8, pp. 409-415.
16. Iakimenko O.V., Matveev S.A., Sirotiuk V.V. Issledovanie napriazhennogo sostoianiia i raschet nesushchei sposobnosti armirovannoi ledianoi plity [Investigation of the stress state and calculation of bearing capacity of reinforced ice plates]. *Vestnik SibADI*, 2014, 3 (37), pp. 63-67.
17. Iakimenko O.V., Sirotiuk V.V. Armirovanie ledovykh pereprav [Reinforcement of ice crossroads]. *Kriosfera Zemli*, 2014, vol. 18, no. 1, pp. 88-91.
18. Li Lian, Shkhinek K.N. Predel'naia nesushchaia sposobnost' ledianykh balok [Limit bearing capacity of ice beams]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2013, no 1, pp. 65-74.
19. Yan-bin Wang, Mao-hong Yu, Yun Xiao, Lin-sheng Li. Dynamic plastic response of circular plate based on unified strength theory. *Int. J. Impact Engineering*, 2005, vol. 31, no. 1, pp. 25-40.
20. Erkhov M.I. Teoriia ideal'no plasticheskikh tel i konstruksii [Theory of ideally plastic bodies and structures]. Moscow: Nauka, 1978, 352 p.
21. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike dlia inzhenerov i uchashchikhsia vtuzov [Reference Book in Mathematics]. Moscow: Nauka, 1986, 202 p.