



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2016

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI 10.15593/perm.mech/2016.3.08

УДК 539.3

## РЕШЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ С ПОМОЩЬЮ МГЭ

**И.П. Марков**

Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 3 июня 2016 г.  
Принята: 10 сентября 2016 г.  
Опубликована: 30 сентября 2016 г.

*Ключевые слова:*

статика, динамика, интегральное уравнение, метод граничных элементов, электромагнитоупругость, преобразование Лапласа, метод Дурбина, метод коллокаций, связанные задачи, фундаментальные решения

АННОТАЦИЯ

Взаимосвязанность электрического, механического и магнитного полей вызывает повышенный интерес к электромагнитоупругим материалам. Благодаря своей способности преобразовывать один вид энергии в другой, электромагнитоупругие материалы находят широкое применение в различных областях науки и техники. В данной работе представлен прямой подход метода граничных элементов в пространстве Лапласа для решения статических и нестационарных динамических трехмерных задач линейной теории электромагнитоупругости. Использована стандартная система сокращенных обозначений для записи связанной задачи. Подход основан на интегральном уравнении для перемещений. Обобщенные фундаментальные решения в изображениях по Лапласу записаны в виде суммы сингулярной и регулярной частей. Динамическая часть выражена как интеграл по единичной полусфере, сингулярная статическая часть – как интеграл по единичной окружности. Для пространственной дискретизации применен классический узловый метод коллокаций вместе со смешанными граничными элементами. На каждом граничном элементе обобщенные перемещения и поверхностные усилия аппроксимируются линейными и постоянными функциями формы. Для уменьшения времени вычислений динамические части фундаментальных решений и их производные интерполируются по граничным элементам. Для получения решения во временной области используется схема численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Представлены два численных примера: задача о статическом поведении прямоугольного параллелепипеда под действием заданной нагрузки и задача о нестационарном отклике единичного куба под действием равномерно распределенной нагрузки в виде функции Хевисайда по времени. Представлено исследование на наличие сеточной сходимости в случае динамической задачи, и получено очень хорошее соответствие гранично-элементных решений с аналитическими результатами для статической задачи.

© ПНИПУ

© **Марков Иван Петрович** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, e-mail: teanku@gmail.com

**Ivan P. Markov** – PhD, Research Associate, e-mail: teanku@gmail.com

## STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS FOR 3D PROBLEMS OF LINEAR MAGNETO-ELECTRO-ELASTICITY USING BEM

I.P. Markov

Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 3 June 2016  
Accepted: 10 September 2016  
Published: 30 September 2016

#### Keywords:

static, dynamic, boundary integral equation, boundary element method, magneto-electro-elasticity, Laplace transform, Durbin's method, collocation method, coupled problems, fundamental solutions

### ABSTRACT

Magneto-electro-elastic materials have drawn increasing attention due to their magnetic-electric-mechanical coupling effect. They have the ability to convert the energy from one type to another and have a wide range of technical applications. This paper presents a Laplace domain direct boundary element formulation for static and transient dynamic problems of three-dimensional linear magneto-electro-elasticity. The standard contracted notation is used to express the coupled problem in the elastic-like fashion. The formulation is based on the displacement boundary integral equation. The Laplace transformed generalized fundamental solution is represented as a sum of singular and regular parts. Dynamic part is expressed as the surface integral over a half of a unit sphere and singular static part as an integral over a unit circumference. Classical collocation scheme is employed along with the mixed boundary elements for spatial discretization. The boundary is discretized with quadratic quadrilateral elements. Generalized displacements and tractions are approximated by linear and constant shape functions in each boundary element. In order to accelerate the integration process, regular dynamic parts of the fundamental solutions and their spatial derivatives are interpolated over a boundary element. Time domain solutions are retrieved via a numerical inversion technique. Two numerical examples are presented: static behaviour of the rectangular prism under prescribed tension and transient response of the unit cube under uniform uniaxial impact loading. A convergence study is presented for the dynamic problem and excellent agreement with the analytical solution is achieved for the static problem.

© PNRPU

---

## Введение

Благодаря способности электромагнитоупругих (МЭУ) материалов преобразовывать один вид энергии в другой (между механической, энергией электрического и магнитного полей) они находят широкое применение в различных областях науки и техники. Они используются во множестве элементов интеллектуальных устройств, таких как преобразователи, сенсоры, актуаторы. Кроме того, они применяются при разработке акустических устройств, гидрофонов, лазеров и т.д. Повышенное внимание к электромагнитоупругим материалам объясняется тем, что из-за взаимосвязанности электрического, механического и магнитного полей они обладают улучшенными свойствами по сравнению с традиционными интеллектуальными материалами. Однако ярко выраженная связанность между полями различной физической природы значительно усложняет решение статических и динамических задач линейной электромагнитоупругости.

Численное моделирование играет очень важную роль при разработке, производстве и исследовании ответственных элементов инженерных конструкций, деталей машин и оборудования, особенно при использовании композитных материалов со связанными полями. Подобные материалы, как правило, являются хрупкими и существенно анизотропными, что ведет к увеличению трудоемкости математического моделирования их поведения. Таким образом, разработка высокоточных численных подходов для решения статических и нестационарных динамических трехмерных задач линейной теории электромагнитоупругости является актуальной научной задачей. За последние два десятилетия были предложены некоторые аналитические и полуаналитические подходы и разнообразные численные методы решения статических и динамических двумерных и трехмерных задач линейной электромаг-

нитоупругости [1–10]. Тем не менее относительно малое количество работ посвящено использованию метода граничных элементов (МГЭ) для численного моделирования динамики электромагнитоупругих тел. Ключевыми особенностями МГЭ являются: уменьшение размерности задачи (требуется дискретизация только границы рассматриваемой области); более высокая точность и простое применение к задачам с бесконечными и полубесконечными границами. МГЭ обладает некоторыми преимуществами перед широко используемыми методами конечных элементов и конечных разностей, однако при применении для решения задач анизотропной теории упругости со связанными полями возникают известные трудности при выводе и реализации фундаментальных решений.

Насколько известно автору, в научной литературе отсутствуют примеры использования традиционной гранично-элементной схемы для решения нестационарных динамических задач электромагнитоупругости. В этой работе, в развитие предыдущих работ [11, 12], прямой подход трехмерного метода граничных элементов в пространстве Лапласа распространён с анизотропной упругости, вязкоупругости и электроупругости на анизотропную линейную электромагнитоупругость. Трёхмерные статические фундаментальные решения (функции Грина) выражены в неявном виде как интеграл по единичной окружности [13, 14], а динамические функции Грина – как поверхностный интеграл по единичной полусфере [15]. Для пространственной дискретизации интегрального уравнения используется классический узловый метод коллокаций совместно со смешанными граничными элементами [16]. Для уменьшения времени вычислений динамические части фундаментальных решений интерполируются по граничным элементам [17]. Для получения решения во временной области используется модифицированный метод Дурбина [18, 19] численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Для демонстрации надежности и точности предложенной гранично-элементной формулировки приведены примеры решения статической и нестационарной динамической задач.

## 1. Постановка краевой задачи

Рассматривается однородное, полностью анизотропное трехмерное электромагнитоупругое твердое тело, занимающее объем  $\Omega \subset R^3$ , ограниченный поверхностью  $\Gamma = \partial\Omega$ . При использовании квазистатического приближения для электрического и магнитного полей, подразумевая нулевые начальные условия и отсутствие массовых сил, свободных зарядов и тока проводимости, уравнения движения сплошной электромагнитоупругой среды в изображениях по Лапласу имеют следующий вид:

$$C_{ijkl} \bar{U}_{k,il}(\mathbf{x}, s) = \rho s^2 \delta_{jk}^* \bar{U}_k(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad i, l = \overline{1, 3}, \quad j, k = \overline{1, 5}, \quad (1)$$

$$\delta_{jk}^* = \begin{cases} \delta_{jk}, & j, k = \overline{1, 3}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $s$  – это параметр интегрального преобразования Лапласа;  $\rho$  – плотность материала. Здесь использована стандартная система сокращенных обозначений для обобщенных перемещений  $\bar{U}_k$  и обобщенного тензора модулей упругости  $C_{ijkl}$ :

$$\bar{U}_k = \begin{cases} \bar{u}_k, & k = \overline{1, 3}, \\ \bar{\varphi}, & k = 4, \\ \bar{\psi}, & k = 5, \end{cases} \quad (2)$$

$$C_{ijkl} = \begin{cases} C_{ijkl}^E, & i, j, k, l = \overline{1, 3}, \\ e_{lij}, & i, l, j = \overline{1, 3}, k = 4, \\ e_{ikl}, & i, l, k = \overline{1, 3}, j = 4, \\ q_{lij}, & i, l, j = \overline{1, 3}, k = 5, \\ q_{ikl}, & i, l, k = \overline{1, 3}, j = 5, \\ -\lambda_{il} & i, l = \overline{1, 3}, j = 4, k = 5 \text{ или } k = 4, j = 5, \\ -\varepsilon_{il} & i, l = \overline{1, 3}, j, k = 4, \\ -\mu_{il} & i, l = \overline{1, 3}, j, k = 5, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\bar{u}_k$ ,  $\bar{\varphi}$  и  $\bar{\psi}$  – упругие перемещения, электрический и магнитный потенциалы, соответственно;  $C_{ijkl}^E$ ,  $e_{lij}$  и  $q_{lij}$  обозначают тензоры упругих модулей, пьезоэлектрических и пьезомагнитных свойств соответственно;  $\lambda_{il}$ ,  $\varepsilon_{il}$  и  $\mu_{il}$  – магнитоэлектрические коэффициенты, тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей соответственно. Справедливы следующие соотношения:

$$C_{ijkl} = C_{lkji}, \quad e_{lij} = e_{lji}, \quad q_{lij} = q_{lji}, \quad \lambda_{il} = \lambda_{li}, \quad \varepsilon_{il} = \varepsilon_{li}, \quad \mu_{il} = \mu_{li}. \quad (4)$$

Обобщенные граничные условия на границе  $\Gamma$  выражаются следующим образом:

$$\bar{U}_k(\mathbf{x}, s) = \bar{U}_k^*(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_U, \quad (5)$$

$$\bar{T}_k(\mathbf{x}, s) = \bar{T}_k^*(\mathbf{x}, s), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_T, \quad (6)$$

где

$$\bar{T}_j = \begin{cases} \bar{t}_j = \bar{\sigma}_{jk} n_k, & j = \overline{1, 3}, \\ \bar{D}_n = \bar{D}_k n_k, & j = 4, \\ \bar{B}_n = \bar{B}_k n_k & j = 5, \end{cases} \quad (7)$$

Здесь через  $\bar{\sigma}_{ij}$ ,  $\bar{D}_i$  и  $\bar{B}_i$  обозначены тензор напряжений Коши, вектор электрической индукции и вектор магнитной индукции соответственно;  $n_k$  – компоненты единичного вектора внешней нормали к границе.

## 2. Гранично-элементная схема

Гранично-интегральное представление обобщенных перемещений в точке коллокации  $\mathbf{x}$  следует из расширенной формулы Сомильяны [9, 21, 22] и имеет вид:

$$c_{jk} \bar{U}_k(\mathbf{x}, s) = \int_{\Gamma} \bar{g}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{T}_k(\mathbf{y}, s) d\Gamma(\mathbf{y}) - \int_{\Gamma} \bar{h}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \bar{U}_k(\mathbf{y}, s) d\Gamma(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (8)$$

где  $c_{jk}$  – матрица коэффициентов, равная  $\delta_{jk}/2$  (где  $\delta_{jk}$  – дельта Кронекера) на гладких участках границы  $\Gamma$ , а в угловых точках определяемая геометрией поверхности в окрестности точки коллокации  $\mathbf{x}$  [16]; через  $\bar{g}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  и  $\bar{h}_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  обозначены обобщенные

динамические фундаментальные и сингулярные решения в изображениях по Лапласу в точке наблюдения  $\mathbf{y}$ , вызванные действием сосредоточенного единичного источника, приложенного в точке коллокации  $\mathbf{x}$ .

Обобщенные сингулярные решения определяются следующим соотношением:

$$\bar{h}_{jp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = C_{ijkl} \bar{g}_{kp,l} n_i(\mathbf{y}), \quad j, p = \overline{1, 5}, \quad (9)$$

где  $n_i(\mathbf{y})$  – компоненты вектора внешней единичной нормали к границе в точке наблюдения  $\mathbf{y}$ .

Обобщенные фундаментальные решения в пространстве Лапласа могут быть записаны как сумма сингулярной и регулярной частей следующим образом:

$$\bar{g}_{jp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = \bar{g}_{jp}(\mathbf{r}, s) = g_{jp}^S(\mathbf{r}) + \bar{g}_{jp}^R(\mathbf{r}, s), \quad (10)$$

где сингулярная часть  $g_{jp}^S(\mathbf{r})$  является фундаментальным решением статической линейной электромагнитоупругой задачи. В соответствии с [13–15] сингулярная и регулярная части определяются как

$$g_{jp}^S(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{|\mathbf{d}|=1} \Gamma_{jp}^{-1}(\mathbf{d}) d\Omega(\mathbf{d}), \quad j, p = \overline{1, 5}, \quad (11)$$

$$\bar{g}_{jp}^R(\mathbf{r}, s) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\substack{|\mathbf{n}|=1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0}} \sum_{m=1}^Q \frac{k_m \bar{P}_{jp}^m}{\rho c_m^2} e^{-k_m |\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}|} dS(\mathbf{n}), \quad (12)$$

где

$$\bar{P}_{jp}^m = \begin{cases} E_{jp}^m / E_{kk}^m, & j, p = \overline{1, 3}, \\ \alpha_l^j E_{lp}^m / E_{kk}^m, & j = \overline{4, 5}, p = \overline{1, 3}, i, k, l = \overline{1, 3}, \\ \alpha_l^j \alpha_k^p E_{lk}^m / E_{kk}^m, & j = p = \overline{4, 5}, \end{cases} \quad (13)$$

$$E_{il}^m = \text{adj}(Z_{il}(\mathbf{n}) - \rho c_m^2 \delta_{il}), \quad Z_{ik} = \Gamma_{ik} + \alpha_k^4 \Gamma_{i4} + \alpha_k^5 \Gamma_{i5}, \quad \Gamma_{jk}(\mathbf{n}) = C_{ijkl} n_i n_l, \quad (14)$$

$$\alpha_k^4 = \frac{\Gamma_{4k} \Gamma_{55} - \Gamma_{45} \Gamma_{5k}}{\Gamma_{45} \Gamma_{54} - \Gamma_{44} \Gamma_{55}}, \quad \alpha_k^5 = \frac{\Gamma_{44} \Gamma_{5k} - \Gamma_{4k} \Gamma_{54}}{\Gamma_{45} \Gamma_{54} - \Gamma_{44} \Gamma_{55}}. \quad (15)$$

Здесь  $\lambda_m$  – собственные значения матрицы  $Z_{il}(\mathbf{n})$ ;  $Q$  – число различных собственных значений,  $c_m = \sqrt{\lambda_m / \rho}$  – фазовые скорости упругих волн;  $k_m = s / c_m$  – волновые числа;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор направления распространения волн.

Для пространственной дискретизации интегрального уравнения (8) используются смешанные граничные элементы [16]. Граница  $\Gamma$  аппроксимируется совокупностью квадратных четырехугольных элементов. Для того чтобы одновременно корректно моделировать непрерывность обобщенных перемещений и разрывный характер обобщенных поверхностных усилий, на каждом граничном элементе используются линейные и постоянные функции формы соответственно. Используется специальная схема интерполяции динамических частей фундаментальных решений по граничным элементам [17] на основе пятиузловых элементов. Это позволяет сократить время вычислений почти в два раза. Учет граничных условий и применение классической коллокационной

схемы на узлах аппроксимации неизвестных граничных функций позволяет сформировать разрешающую систему линейных алгебраических уравнений, параметризованную комплексным параметром интегрального преобразования Лапласа  $s$ . Для получения решения во временной области используется схема численного обращения преобразования Лапласа.

Если изображение  $\bar{f}(s)$  определено на некотором наборе частот  $s_k = \alpha + i\omega_k$ ,  $0 = \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n < \omega_{n+1} = R$ , то оригинал изображения может быть аппроксимирован следующим образом [18, 19]:

$$f(0) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[ F_k + \frac{\Delta_k}{24} (Z_{k+1} - Z_k) \right] \Delta_k, \quad (16)$$

$$f(t) \approx \frac{e^{\alpha t}}{\pi} \left\{ \frac{1}{t} g_1(t) + \frac{1}{t^2} g_2(t) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t^3 \Delta_k} [(Z_{k+1} - Z_k)(\sin \omega_{k+1}t - \sin \omega_k t) + (Y_{k+1} - Y_k)(\cos \omega_{k+1}t - \cos \omega_k t)] \right\}, \quad t > 0, \quad (17)$$

$$g_1(t) = \left[ F_n + \frac{1}{8} (Z_n + 3Z_{n+1}) \Delta_n \right] \sin \omega_{n+1}t + \frac{1}{8} (Y_2 + 3Y_1) \Delta_1 - G_1 + \left[ G_n + \frac{1}{8} (Y_n + 3Y_{n+1}) \Delta_n \right] \cos \omega_{n+1}t, \quad (18)$$

$$g_2(t) = -Z_1 + Z_{n+1} \cos \omega_{n+1}t - Y_{n+1} \sin \omega_{n+1}t. \quad (19)$$

$Z_k$ ,  $k = \overline{1, n+1}$  определяются из следующей трехдиагональной системы:

$$\begin{aligned} 3\Delta_1 Z_1 + \Delta_1 Z_2 &= 8(F_1 - F_0), \\ \Delta_{k-1} Z_{k-1} + 3(\Delta_k + \Delta_{k-1}) Z_k + \Delta_k Z_{k+1} &= 8(F_k - F_{k-1}), \\ 3\Delta_n Z_{n+1} + \Delta_n Z_n &= 8(F_{n+1} - F_n), \end{aligned} \quad (20)$$

$Y_k$ ,  $k = \overline{1, n+1}$  определяются из системы

$$\begin{aligned} 3\Delta_1 Y_1 + \Delta_1 Y_2 &= 8(G_1 - G_0), \\ \Delta_{k-1} Y_{k-1} + 3(\Delta_k + \Delta_{k-1}) Y_k + \Delta_k Y_{k+1} &= 8(G_k - G_{k-1}), \\ 3\Delta_n Y_{n+1} + \Delta_n Y_n &= 8(G_{n+1} - G_n), \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\Delta_k = \omega_{k+1} - \omega_k$ ,  $F_k = \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)]$ ,  $G_k = \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega_k)]$ ,  $F_0 = \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega_1)]$ ,  $F_{n+1} = \operatorname{Re}[\bar{f}(\alpha + i\omega_{n+1})]$ ,  $G_0 = \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega_1)]$ ,  $G_{n+1} = \operatorname{Im}[\bar{f}(\alpha + i\omega_{n+1})]$  и  $\alpha > 0$  – некоторое вещественное число, большее чем действительные части всех особенностей  $\bar{f}(s)$ .

### 3. Численные примеры

#### Пример 1.

Рассматривается электромагнитоупругий прямоугольный параллелепипед с размерами  $a \times 3a \times a$ . Центр параллелепипеда совпадает с началом координат. Используется материал со следующими параметрами [9]:

$$\mathbf{C}^E = \begin{bmatrix} 166 & 77 & 78 & 0 & 0 & 0 \\ 77 & 166 & 78 & 0 & 0 & 0 \\ 78 & 78 & 162 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 43 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 44,5 \end{bmatrix} \text{ГПа}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 11,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11,6 & 0 & 0 \\ -4,4 & -4,4 & 18,6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Кл/м}^2,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 11,2 & 0 & 0 \\ 0 & 11,2 & 0 \\ 0 & 0 & 12,6 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{Кл/Вм}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 550 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 550 & 0 & 0 \\ 580,3 & 580,3 & 699,7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{Н/Ам},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \text{Нс/ВКл}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{Нс}^2/\text{Кл}^2.$$

Заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
 x_1 = a/2, \quad x_2 = 3a/2: \quad t_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad t_3 = 0, \quad D_n = 0, \quad B_n = 0, \\
 x_1 = -a/2, \quad x_2 = -3a/2: \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad t_3 = 0, \quad D_n = 0, \quad B_n = 0, \\
 x_3 = a/2: \quad t_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad t_3 = 100, \quad D_n = 0, \quad B_n = 0, \\
 x_3 = -a/2: \quad t_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0.
 \end{aligned}$$

В таблице приведено сравнение полученных на различных сетках результатов с аналитическими решениями [9]. Следует отметить, что продемонстрировано очень хорошее соответствие аналитических и гранично-элементных решений, наибольшая относительная погрешность не превышает 0,45 %.

Упругие перемещения  $u_1, u_3$ , электрический потенциал  $\varphi$  и магнитный потенциал  $\psi$  в точке  $(a/2, 3a/2, a/2)$   
 Elastic displacements  $u_1, u_3$ , electric potential  $\varphi$  and magnetic potential  $\psi$  in the point  $(a/2, 3a/2, a/2)$

Сетка	$u_1 \cdot 10^{-10}$ , м	$u_3 \cdot 10^{-9}$ , м	$\varphi$ , V	$\psi \cdot 10^{-2}$ , А
4×12×4	-6,351148	1,137324	1,896969	4,294634
6×18×6	-6,344309	1,136904	1,896607	4,295536
8×24×8	-6,341515	1,136717	1,896484	4,295896
10×30×10	-6,340156	1,136617	1,896430	4,296073
12×36×12	-6,339358	1,136556	1,896404	4,296168
Аналитические решения [9]	-6,333160	1,136676	1,899100	4,278120

**Пример 2.**

Рассматривается электромагнитоупругий куб с длиной ребра 1 м. На нижней грани  $x_3 = 0$  заданы следующие граничные условия:  $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, \varphi = 0, \psi = 0$ ; на верхней грани  $x_3 = 1$  м приложена равномерно распределенная одноосная нагрузка  $t_3 = t_3^* H(t), t_3^* = -100$  Па, где  $H(t)$  – функция Хевисайда. Остальные грани куба свободны

от обобщенных поверхностных усилий. В качестве материала взят композит состава феррит кобальта–титанат бария  $\text{BaTiO}_3\text{-CoFe}_2\text{O}_4$  (с объемной долей титаната бария  $\text{BaTiO}_3$  50 %) плотностью  $\rho = 5550 \text{ кг/м}^3$  и со следующими параметрами [20]:

$$\mathbf{C}^E = \begin{bmatrix} 213 & 113 & 113 & 0 & 0 & 0 \\ 113 & 213 & 113 & 0 & 0 & 0 \\ 113 & 113 & 207 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 49,9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \text{ ГПа}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 \\ -2,71 & -2,71 & 8,86 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0,24 & 0 & 0 \\ 0 & 0,24 & 0 \\ 0 & 0 & 6,37 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9} \text{ Кл/Вм}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 185 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 185 & 0 & 0 \\ 222 & 222 & 292 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Н/Ам},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} -5,23 & 0 & 0 \\ 0 & -5,23 & 0 \\ 0 & 0 & 2750 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12} \text{ Нс/ВКл}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2,01 & 0 & 0 \\ 0 & 2,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0,839 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4} \text{ Нс}^2/\text{Кл}^2.$$

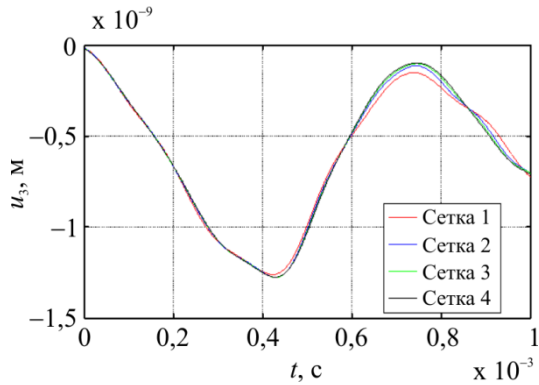


Рис. 1. Упругие перемещения  $u_3$   
Fig. 1. Elastic displacements  $u_3$

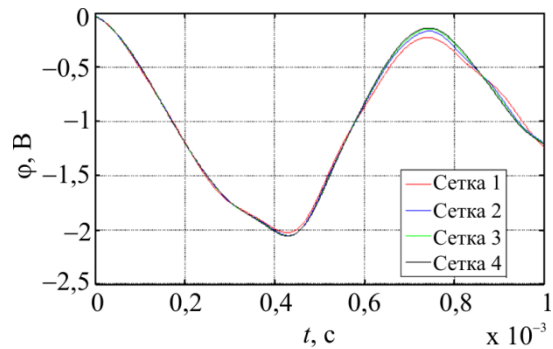


Рис. 2. Электрический потенциал  $\phi$   
Fig. 2. Electric potential  $\phi$

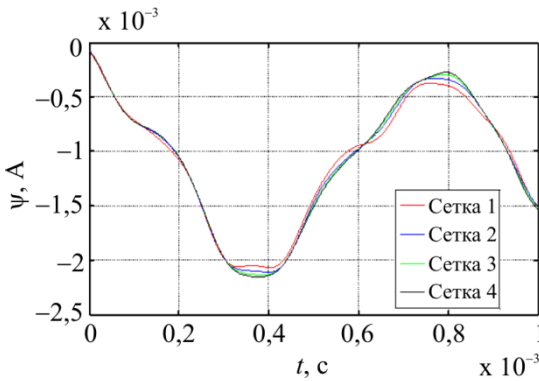


Рис. 3. Магнитный потенциал  $\psi$   
Fig. 3. Magnetic potential  $\psi$

На рис. 1–3 представлены гранично-элементные решения в серединной точке нагруженной грани для четырех сеток с 96 (сетка 1), 216 (сетка 2), 384 (сетка 3) и 600 (сетка 4) элементами. Полученные результаты отчетливо демонстрируют наличие быстрой сеточной сходимости, даже для магнитного потенциала.



## Заключение

В данной работе представлена формулировка прямого подхода метода граничных элементов в пространстве Лапласа для решения статических и нестационарных динамических задач трехмерной линейной теории электромагнитоупругости. Обобщенные фундаментальные решения в изображениях по Лапласу представлены в виде суммы сингулярной и регулярной частей. Динамическая часть выражена как интеграл по единичной полусфере, сингулярная статическая часть – как интеграл по единичной окружности. Граничные элементы выбраны таким образом, чтобы можно было одновременно моделировать непрерывные обобщенные перемещения и разрывные обобщенные поверхностные усилия. Пространственная дискретизация основана на классической коллокационной схеме. Для получения решений во временной области используется метод численного обращения интегрального преобразования Лапласа.

Представлены два численных примера: статическая задача о прямоугольном параллелепипеде под действием заданной нагрузки и задача о нестационарном отклике единичного куба, под действием равномерно распределенной одноосной нагрузки в виде функции Хевисайда по времени. Полученные результаты очень хорошо соответствуют точным решениям. Для каждой задачи продемонстрировано наличие сеточной сходимости.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 16-38-60097 мол\_а\_дк, № 16-38-50142 и гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-5395.2016.1.

## Библиографический список

1. Pan E., Heyliger P.R. Exact solutions for magneto-electro-elastic laminates in cylindrical bending // *Int. J. Solids. Struct.* – 2003. – Vol. 40. – No. 24. – P. 6859–6876. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2003.08.003
2. Heyliger P.R., Pan E. Static Fields in Magneto-electro-elastic Laminates // *AIAA J.* – 2004. – Vol. 42. – No. 7. – P. 1435–1443.
3. Ding H., Jiang A. A boundary integral formulation and solution for 2D problems in magneto-electro-elastic media // *Comput. Struct.* – 2004. – Vol. 82. – No. 20–21. – P. 1599–1607. DOI: 10.1016/j.compstruc.2004.05.006
4. Green's functions for two-phase transversely isotropic magneto-electro-elastic media / H.J. Ding, A.M. Jiang, P.F. Hou, W.Q. Chen // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2005. – Vol. 29. – No. 6. – P. 551–561. DOI: 10.1016/j.enganabound.2004.12.010
5. Li X.-C., Yao W.-A. Virtual boundary element-integral collocation method for the plane magneto-electro-elastic solids // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2006. – Vol. 30. – No. 8. – P. 709–717. DOI: 10.1016/j.enganabound.2006.03.004
6. Daga A., Ganesan N., Shankar K. Harmonic response of three-phase magneto-electro-elastic beam under mechanical, electrical and magnetic environment // *J. Intel. Mat. Syst. Str.* – 2009. – Vol. 20. – No. 10. – P. 1203–1220. DOI: 10.1177/1045389X09103307
7. Daga A., Ganesan N., Shankar K. Transient Dynamic Response of Cantilever Magneto-Electro-Elastic Beam Using Finite Elements // *Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech.* – 2009. – Vol. 10. – No. 3. – P. 173–185. DOI: 10.1080/15502280902797207
8. Milazzo A., Orlando C., Alaimo A. An analytical solution for the magneto-electro-elastic bimorph beam forced vibrations problem // *Smart. Mater. Struct.* – 2009. – Vol. 18. – No. 8. – P. 085012. DOI: 10.1088/0964-1726/18/8/085012
9. Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media / X. Zhu, Z. Huang, A. Jiang, W.Q. Chen, N. Nishimura // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2010. – Vol. 34. – No. 11. – P. 927–933. DOI: 10.1016/j.enganabound.2010.06.006

10. Milazzo A., Orlando C. A beam finite element for magneto-electro-elastic multilayered composite structures // *Compos. Struct.* – 2012. – Vol. 94. – No. 12. – P. 3710–3721. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.06.011
11. Three-dimensional BEM for transient dynamic analysis of piezoelectric and anisotropic elastic solids / L. Igumnov, I. Markov, I. Vorobtsov, S. Litvinchuk, A. Bragov // *EPJ Web Conf.* – 2015. – Vol. 94. – P. 04025. DOI: 10.1051/epjconf/20159404025
12. Igumnov L.A., Markov I.P. Boundary-element modeling of three-dimensional anisotropic viscoelastic solids // *Springer Proc. Phys.* – 2016. – Vol. 175. – P. 517–526. DOI: 10.1007/978-3-319-26324-3\_36
13. Pan E. Three-dimensional Green's function in anisotropic magneto-electro-elastic biomaterials // *Z Angew Math. Phys.* – 2002. – Vol. 53. – P. 815–838.
14. Buroni F.C., Saez A. Three-dimensional Green's function and its derivative for materials with general anisotropic magneto-electro-elastic coupling // *Proc. R. Soc. A* – 2010. – Vol. 466. – No. 2114. – P. 515–537. DOI: 10.1098/rspa.2009.0389
15. Time-harmonic Green's functions for anisotropic magnetoelasticity / R. Rojas-Diaz, A. Saez, F. Garcia-Sanchez, Ch. Zhang // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – Vol. 45. – No. 1. – P. 144–158. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.07.024
16. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. – М.: Физматлит, 2008. – 352 с.
17. Matsumoto T., Tanaka M., Ogawa Y. A simple technique for efficient evaluations of boundary integrals of time-harmonic elastodynamic BEM analyses for anisotropic solids // *Proceedings Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics.* 2003. – P. 2071–2073. DOI: 10.1016/B978-008044046-0.50508-X
18. Durbin F. Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method // *Comput. J.* – 1974. – Vol. 17. – No. 4. – P. 371–376. DOI: 10.1093/comjnl/17.4.371
19. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – Vol. 41. – No. 13. – P. 3653–3674. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.01.006
20. Xue C.-X., Pan E. On the longitudinal wave along a functionally graded magneto-electro-elastic rod // *Int. J. Eng. Sci.* – 2013. – Vol. 62. – P. 48–55. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.08.004
21. Qin Q.-H. *Green's Function and Boundary Elements of Multifield Materials.* – Elsevier Science, 2007. – 266 с.
22. Wang C.-Y., Zhang Ch. 3-D and 2-D Dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2005. – Vol. 29. – No. 5. – P. 454–465. DOI: 10.1016/j.enganabound.2005.01.006

## References

1. Pan E., Heyliger P.R. Exact solutions for magneto-electro-elastic laminates in cylindrical bending. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, Vol. 40, No. 24, pp. 6859–6876. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2003.08.003
2. Heyliger P.R., Pan E. Static Fields in Magnetoelastic Laminates. *AIAA J.*, 2004, vol. 42, no. 7, pp. 1435–1443.
3. Ding H., Jiang A. A boundary integral formulation and solution for 2D problems in magneto-electro-elastic media. *Comput. Struct.*, 2004, vol. 82, no. 20–21, pp. 1599–1607. DOI: 10.1016/j.compstruct.2004.05.006
4. Ding H.J., Jiang A.M., Hou P.F., Chen W.Q. Green's functions for two-phase transversely isotropic magneto-electro-elastic media. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005, vol. 29, no. 6, pp. 551–561. DOI: 10.1016/j.enganabound.2004.12.010

5. Li X.-C., Yao W.-A. Virtual boundary element-integral collocation method for the plane magneto-electroelastic solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2006, vol. 30, no. 8, pp. 709-717. DOI: 10.1016/j.enganabound.2006.03.004
6. Daga A., Ganesan N., Shankar K. Harmonic response of three-phase magneto-electro-elastic beam under mechanical, electrical and magnetic environment. *J. Intel. Mat. Syst. Str.*, 2009, vol. 20, no. 10, pp. 1203-1220. doi: 10.1177/1045389X09103307
7. Daga A., Ganesan N., Shankar K. Transient Dynamic Response of Cantilever Magneto-Electro-Elastic Beam Using Finite Elements. *Int. J. Comput. Meth. Eng. Sci. Mech.*, 2009, vol. 10, no. 3, pp. 173-185. DOI: 10.1080/15502280902797207
8. Milazzo A., Orlando C., Alaimo A. An analytical solution for the magneto-electro-elastic bimorph beam forced vibrations problem. *Smart. Mater. Struct.*, 2009, vol. 18, no. 8, pp. 085012. DOI: 10.1088/0964-1726/18/8/085012
9. Zhu X., Huang Z., Jiang A., Chen W.Q., Nishimura N. Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2010, vol. 34, no. 11, pp. 927-933. DOI: 10.1016/j.enganabound.2010.06.006
10. Milazzo A., Orlando C. A beam finite element for magneto-electro-elastic multilayered composite structures. *Compos. Struct.*, 2012, Vol. 94, No. 12, pp. 3710-3721. doi: 10.1016/j.compstruct.2012.06.011
11. Igumnov L., Markov I., Vorobtsov I., Litvinchuk S., Bragov A. Three-dimensional BEM for transient dynamic analysis of piezoelectric and anisotropic elastic solids. *EPJ Web Conf.*, 2015, vol. 94, pp. 04025. DOI: 10.1051/epjconf/20159404025
12. Igumnov L.A., Markov I.P. Boundary-element modeling of three-dimensional anisotropic viscoelastic solids. *Springer Proc. Phys.*, 2016, vol. 175, pp. 517-526. DOI: 10.1007/978-3-319-26324-3\_36
13. Pan E. Three-dimensional Green's function in anisotropic magneto-electro-elastic biomaterials. *Z Angew Math. Phys.*, 2002, vol. 53, pp. 815-38.
14. Bironi F.C., Saez A. Three-dimensional Green's function and its derivative for materials with general anisotropic magneto-electro-elastic coupling. *Proc. R. Soc. A*, 2010, vol. 466, no. 2114, pp. 515-537. DOI: 10.1098/rspa.2009.0389
15. Rojas-Diaz R., Saez A., Garcia-Sanchez F., Zhang Ch. Time-harmonic Green's functions for anisotropic magneto-electroelasticity. *Int. J. Solids Struct.*, 2008, vol. 45, no. 1, pp. 144-158. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2007.07.024
16. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. Metody granichnykh integral'nykh uravnenii i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoi dinamicheskoi teorii uprugosti s sopriazhennymi poliarnymi [Methods of boundary integral equations and boundary elements for dynamic problems of three-dimensional theory of elasticity with coupled fields]. Moscow, Physmatlit, 2008, 352 p.
17. Matsumoto T., Tanaka M., Ogawa Y. A simple technique for efficient evaluations of boundary integrals of time-harmonic elastodynamic BEM analyses for anisotropic solids. *Proceedings Second MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, 2003, pp. 2071-2073. DOI: 10.1016/B978-008044046-0.50508-X
18. Durbin F. Numerical Inversion of Laplace Transforms: An Efficient Improvement to Dubner and Abate's Method. *Comput. J.*, 1974, vol. 17, no. 4, pp. 371-376. DOI: 10.1093/comjnl/17.4.371
19. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate. *Int. J. Solids Struct.*, 2004, vol. 41, no. 13, pp. 3653-3674. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.01.006
20. Xue C.-X., Pan E. On the longitudinal wave along a functionally graded magneto-electro-elastic rod. *Int. J. Eng. Sci.*, 2013, vol. 62, pp. 48-55. DOI: 10.1016/j.ijengsci.2012.08.004
21. Qin Q.-H. Green's Function and Boundary Elements of Multifield Materials. Elsevier Science, 2007, 266 p.
22. Wang C.-Y., Zhang Ch. 3-D and 2-D Dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005, Vol. 29, No. 5, pp. 454-465. DOI: 10.1016/j.enganabound.2005.01.006