

УДК 519.7

А.О. Алексеев, И.Е. Алексеева

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ,
СОСТОЯНИЕ КОТОРЫХ ОПИСЫВАЕТСЯ МЕТОДОМ
НЕЧЕТКОГО КОМПЛЕКСНОГО ОЦЕНИВАНИЯ**

Сформулирована математическая постановка задачи управления многопараметрическим объектом (группой объектов) или системой, состояние которых описывается методом нечеткого комплексного оценивания. Приводится аналитическая запись кривых безразличия, определенных на непрерывной области матрицы свертки, полученной путем интерполяции четырех соседних элементов матрицы, благодаря использованию аддитивно-мультипликативного подхода к нечеткой процедуре комплексного оценивания. Приводятся возможные подходы к решению задачи управления многопараметрическим объектом. Одно из решений исследуемой задачи основывается на алгоритме построения сети напряженных состояний на непрерывной области определения сворачиваемых параметров.

Ключевые слова: многопараметрический объект управления, задача управления, задача оптимизации, затратные функции, сеть напряженных состояний, метод нечеткого комплексного оценивания, аддитивно-мультипликативный подход.

A.O. Alekseev, I.E. Alekseeva

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**FORMULATION OF THE PROBLEM OF MULTIPARAMETER
OBJECTS MANAGEMENT WHOSE STATE IS DESCRIBED
BY FUZZY COMPREHENSIVE EVALUATION**

A mathematical formulation of the problem multivariable control object (group of objects) or a system whose state is described by fuzzy comprehensive evaluation is formulated. The analytical record of indifference curves defined on a continuous area of convolution matrix obtained by interpolation of the four adjacent elements of the matrix, through the use of additive-multiplicative approach in fuzzy comprehensive evaluation procedure is given. The possible approaches to solving the problem of multivariable control object are given. One solution of the problem is based on an algorithm of building a network stressful conditions on a continuous domain of the roll-up parameters.

Keywords: multivariable control object, task management, optimization problem, costly function, intense network conditions, the method of fuzzy comprehensive evaluation, additive-multiplicative approach.

Объект управления (группу объектов) или систему, описываемые вектором свойств $\{p_i\}$, $i = \overline{1, n}$, определенных на множествах $P_i (p_i \in P_i)$, принадлежащих фазовому пространству $\Phi^n : \Phi^n = \bigcap_{i=1}^n P_i$, будем называть многопараметрическими, если $n > 1$.

В некоторых случаях в набор свойств $\{p_i\}$ многопараметрического объекта $O = \{p_i\} \in \Phi^n$ может входить параметр $g_i(\bar{p}_l)$, зависящий от l свойств $\bar{p}_l \in P_l = \bigcap_{j=1}^l P_j$, $P_l \subset \Phi^n$, в отношении которого может быть сформулирована целевая функция $g_i \rightarrow \max (\min)$ и в результате изменения которого может быть сформулирован критерий эффективности управления, например $g_i \geq g_{ж}$.

Если рассматривать коммерческую организацию как многопараметрическую систему или объект, то одним из свойств этого объекта будет прибыль, удовлетворяющая возможности описания в отношении нее целевой функции и задания критериев эффективности.

В случае, если ни одно из свойств многопараметрического объекта $O \in \Phi^n$ не может выступать в качестве параметра, по которому будет определяться эффективность управления, или существует несколько свойств, по которым необходимо определять эффективность управления, то необходимо ввести дополнительный параметр $x \in X \subset R^1$, где X – множество значений параметра эффективности, и сформулировать соответствующую целевую функцию в виде некоторого функционала $g: \Phi^n \rightarrow X$. Тогда может быть поставлена задача оптимизации при ограниченных ресурсах C (1):

$$\begin{aligned} g(p_1, \dots, p_n) &\rightarrow \max, \\ \sum_n^{i=1} c_i(p_i) &\leq C, \end{aligned} \quad (1)$$

где количество ресурсов c_i , требуемых для достижения определенного значения свойства p_i , описывается затратной функцией CF :

$$c_i(p_i) = CF_i(p_i). \quad (2)$$

Под затратной функцией понимается функциональная зависимость затрат ресурсов на достижение определенного значения свойства.

Задачу управления многопараметрическими объектами можно сформулировать в виде задачи поиска состояния исследуемого объекта $\{p_i^*\}$, описываемого желаемым значением критерия эффективности $x_{ж} \in X$, за минимальное количество ресурсов $\{c_i^{opt}\}$, требуемых для достижения данного состояния $\{p_i^*\}$, что соответствует обратной задаче оптимизации (3):

$$\sum_n^{i=1} c_i(p_i) \rightarrow \min, \quad (3)$$
$$g(p_1, \dots, p_n) = x_{ж}.$$

Сложность решения задач (1) и (3) объясняется не только тем, что свойства объекта могут быть гетерогенными по отношению друг другу, но и тем, что некоторые свойства могут быть свойствами нечисловой природы, т.е. не количественно измеримыми, а качественно описываемыми, что определяет необходимость использования экспертных методов оценивания многопараметрических объектов (см., например, [1]).

Согласно методологии управления [2] процедура оценивания объекта или системы заключается в поиске соответствия $\varphi: \Phi^n \rightarrow X^n$ между фазовым и критериальным пространствами, где каждому свойству p_i , $i = \overline{1, n}$, соответствует параметр x_i , $i = \overline{1, n}$, определенный на множестве X , которые в совокупности по всем параметрам образуют критериальное пространство X^n . При этом для описания свойств объекта в критериальном пространстве целесообразно использовать то же множество значений показателей эффективности управления X .

В этом случае в критериальном пространстве гетерогенные свойства объекта представлены единым множеством, и их можно не просто сравнивать или описывать их различные сочетания, но и выполнять на качественном уровне количественные измерения. Это позволяет построить различные механизмы комплексного оценивания $M: X^n \rightarrow X$, например: линейные (см., например, [3]), нелинейные, основанные на средневзвешенных уравнениях (см., например, [4]), матричные (см., например, [5]), математическую основу которых составляет метод векторной стратификации [6], в том числе матричные механизмы с нечеткой процедурой комплексного оценивания (см., например, [7–10]). Послед-

ние механизмы следует выделить из этого списка, поскольку их можно использовать для оценки свойств как числовой, так и нечисловой природы с помощью теории нечетких множеств [11], в том числе лингвистических переменных [12].

Для решения задачи управления многокритериальным объектом, состояние которых описывается обычным матричным механизмом комплексного оценивания, используется алгоритм построения сети напряженных состояний [см., например, 13].

Состояние многопараметрического объекта или системы будем называть напряженным, если увеличение частного показателя хотя бы по одному параметру приводит к увеличению комплексного показателя, данное определение сформулировано по аналогии с [13].

Доказательство того, что оптимальное состояние объекта является напряженным, приведено также в работе [13]. При этом подчеркивается, что напряженное состояние, по существу, является Парето-оптимальным.

Возможность построения сети напряженных состояний в случае, если для оценки многопараметрического объекта применяется процедура нечеткого комплексного оценивания, отмечается в работе [7]. Однако данный подход не был обобщен на случай непрерывных механизмов комплексного оценивания, что определило цель данной работы.

Непрерывности механизмов комплексного оценивания удалось добиться благодаря предъявлению требований равенства единице суммы значений функций принадлежности $\{\mu_x\}$ в экспертных оценках и процедуре фазсификации значений x , принадлежащих непрерывной шкале X (рисунок), согласно которой любое число

$$x = N(x), c, \tag{4}$$

где $N(x)$ – целая часть, c – дробная часть числа $x \in X$, принадлежащего интервалу, образованному двумя ближайшими натуральными значениями $\{N(x), N(x)+1\}$ множества X , может быть представлено в виде нечеткого множества:

$$x = N(x), c \equiv \left\{ \frac{N(x)}{1-c}; N(x) + \frac{1}{c}; \right\}. \tag{5}$$

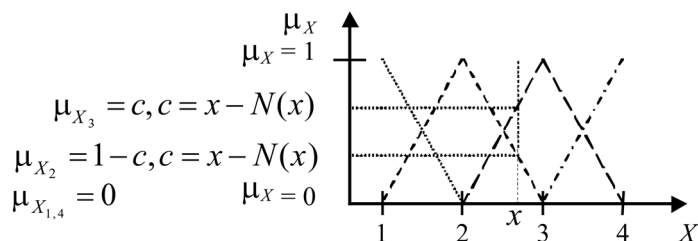


Рис. Фаззификация значения непрерывной шкалы $x \in X$ на примере четырехбалльной шкалы комплексного оценивания, где $N(x)$ – целая часть значения x

Метод нечеткого комплексного оценивания, основанный на аддитивно-мультипликативном подходе (см., например, [9, 10]), позволяет интерполировать дискретно заполненный матричный механизм комплексного оценивания так, что функция свертки двух параметров является монотонной и кусочно-гладкой, также могут быть определены и аналитически описаны кривые безразличия, соответствующие определенным значениям комплексного показателя.

Приведем их графическое (ст. 4, таблица) и аналитическое (ст. 5, таблица) представления для класса так называемых [14] стандартных функций (ст. 1, таблица), имеющих логическую интерпретацию, описываемую естественным языком (ст. 2, таблица), образованных соседними дискретными значениями матрицы свертки (ст. 3, таблица), являющихся носителем нечеткого представления функции свертки.

Благодаря аналитической записи кривых безразличия возможна постановка задачи управления в аналитическом виде.

Приведем последовательно математическую постановку задачи управления многопараметрическими объектами, состояние которых описывается методом нечеткого комплексного оценивания.


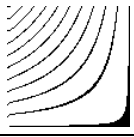
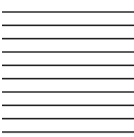
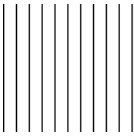
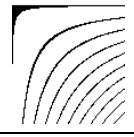
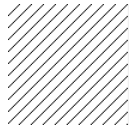
Кривая безразличия на подобласти определения матрицы свертки задается стандартной функцией (см. ст. 5, таблица):

$$c_c = f_i(c_1, c_2), i = \overline{0,5}. \quad (6)$$

Из выражения (6) можно представить зависимость одной переменной от другой при фиксированном значении комплексного показателя:

$$c_2 = k_i(c_1, c_c), i = \overline{0,5}. \quad (7)$$

Свойства стандартных функций свертки, образованных четырьмя соседними элементами матрицы свертки

Стандартная функция	Интерпретация стандартной функции	Заполнение соседних элементов матрицы свертки		Графическое представление кривых безразличия	Аналитическая запись кривых безразличия
		m	m		
f_0	Развитие частных критериев не дает роста свертки	m	m		$c_c = m = \text{const}$
f_1	Развитие обоих частных критериев дает рост свертки	$m + 1$	m		$c_c = m + c_1 c_2$
		m	m		
f_2	Развитие только первого критерия дает рост свертки	$m + 1$	$m + 1$		$c_c = m + c_1$
		m	m		
f_3	Развитие только второго критерия дает рост свертки	$m + 1$	m		$c_c = m + c_2$
		$m + 1$	m		
f_4	Развитие любого частного критерия дает рост свертки	$m + 1$	$m + 1$		$c_c = m + c_1 + c_2 - c_1 c_2$
		$m + 1$	m		
f_5	Развитие любого частного критерия дает рост свертки, совместное развитие дает синергический эффект	$m + 2$	$m + 1$		$c_c = m + c_1 + c_2$
		$m + 1$	m		

Зная затратные функции для развития обоих параметров, можно выразить общие затраты на развитие объекта:

$$C = CF_1(x_1) + CF_2(x_2), \tag{8}$$

а с учетом (4) и (7) общие затраты примут вид

$$C = CF_1(N(x_1) + c_1) + CF_2(N(x_2) + k_i(c_1, c_c)). \tag{9}$$

Дифференцируем выражение (9) и приравниваем к нулю для поиска напряженного состояния:

$$\frac{\partial C}{\partial c_1} \Big|_{c_c = x_c - m} = 0. \quad (10)$$

Решая уравнение (10), найдем значение $c_1^*(x_c)$, являющееся локально оптимальным (на подобласти определения стандартной функции f_i) с точки зрения затрат на обеспечение требуемой комплексной оценки $x_c = m + c_c$. Подставив $c_1^*(x_c)$ в (7), можно найти $c_2^*(x_c)$, а подставив эти значения в (4), можно найти $x_1^*(x_c)$ и $x_2^*(x_c)$ соответственно.

Найдя напряженные состояния (локально оптимальные решения) для всех стандартных функций f_i , через которые проходит кривая безразличия, соответствующая заданному значению комплексного показателя $x_c = x_{ж}$, отметим, что среди них будут значения параметров $\{x_i\}$, соответствующие по φ^{-1} свойствам $\{p_i\}$, которые, в свою очередь, будут являться решением задачи (3).

Поскольку $x_1^*(x_c)$ и $x_2^*(x_c)$ находятся для конкретного значения x_c , то при решении выражения (10) для всех x_c будет найдена затратная функция комплексного показателя $CF(x_c) = CF(x(g(x_1, x_2)))$, полученного методом нечеткого комплексного оценивания, определяющая оптимальные затраты на достижение каждого значения комплексного показателя.

Целесообразна проверка следующего утверждения: на классе монотонных, строго возрастающих затратных функций, определяющих затраты, соответствующие состояниям частных параметров двухпараметрического объекта, описываемого нечетким механизмом комплексного оценивания, основанном на аддитивно-мультипликативном подходе к операциям объединения и пересечения нечетких множеств, сеть напряженных состояний двухпараметрического объекта будет иметь конечное число вершин.

Следствием доказательства этого утверждения будет являться то, что для решения задачи управления многопараметрического объекта, состояние которого описывается методом нечеткого комплексного оценивания, может быть построен эффективный алгоритм поиска значений частных критериев (оптимальных с точки зрения затрат на их достижение), при которых достигается требуемое значение комплексной оценки. Под эффективностью алгоритма понимается следующее:

для поиска оптимального управления будет требоваться лишь сравнение конечного числа вариантов, не превышающего числа подобластей, образованных дискретными значениями шкал комплексного оценивания, через которые проходит кривая безразличия, описываемая требуемым значением комплексного показателя.

Если будет доказано, что конечное число напряженных состояний характерно для двухпараметрического объекта, то в случае описания многопараметрического объекта таким механизмом комплексного оценивания, который можно представить как последовательность бинарных механизмов (на которых сохранялось бы свойство строгой монотонности затратной функции комплексного показателя), данный подход мог бы применяться для оценки объектов, обладающих любым количеством свойств. Это определяет актуальность проверки следующего утверждения: на классе монотонных, строго возрастающих затратных функций двухпараметрического объекта затратная функция комплексного показателя, полученного методом нечеткого комплексного оценивания, определяющая оптимальные затраты на достижение каждого значения комплексного показателя, также обладает свойством строго возрастающей монотонности.

Доказательство этого утверждения не приводится из-за ограниченного объема статьи. Отметим лишь, что доказательство построено на том, что кривые безразличия, определенные на всей области установления параметров свертки, полученные путем интерполяции с применением аддитивно-мультипликативного подхода к нечеткой процедуре комплексного оценивания, не пересекаются, и для сколь угодно малого увеличения значения комплексной оценки оптимальное значение затрат на его достижение будет больше, чем количество затрат, требуемое на его текущее состояние.

Следствием доказательства справедливости этого утверждения будет то, что алгоритм поиска значений частных критериев (оптимальных с точки зрения затрат на их достижение), при которых достигается требуемое значение комплексной оценки, может применяться для объектов с любым количеством параметров, при условии, что в методе нечеткого комплексного оценивания структура дерева критериев бинарная.

Отдельный интерес представляет проверка этих утверждений в отношении выпуклости затратных функций и при небинарной структуре дерева критериев.

В заключение опишем еще один возможный подход к решению задачи управления многопараметрическим объектом – построение гиперку-

ба размерностью $n + 1$, где его элементами будут значения n частных параметров и значения комплексного показателя. Тангенсы угла наклона касательных к затратным функциям в значении частного критерия определит нормаль плоскости, на которой будет отражаться множество напряженных состояний. Если на плоскости подмножество значений требуемой комплексной оценки состоит из единственного элемента, то координаты этого элемента будут давать оптимальные значения частных критериев. Подробному описанию данного алгоритма и его иллюстрации, а также доказательству утверждений, приведенных в данной статье, будут посвящены следующие работы авторов.

Работа подготовлена при финансовой поддержке ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

Список литературы

1. Орлов А.И. Организационно-экономическое моделирование: учебник: в 3 ч. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. Ч. 2: Экспертные оценки. – 2011. – 486 с.
2. Новиков Д.А. Методология управления. – М.: Либроком, 2011. – 128 с.
3. Азгальдов Г.Г. Теория и практика оценки качества товаров (основы квалиметрии). – М.: Экономика, 1982. – 256 с.
4. Варжапетян А.Г. Квалиметрия: учеб. пособие / СПбГУАП. – СПб., 2005. – 176 с.
5. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. – М.: Синтег, 1997. – 190 с.
6. Глотов В.А., Павельев В.В. Векторная стратификация. – М.: Наука, 1984. – 132 с.
7. Андроникова Н.Г., Леонтьев С.В., Новиков Д.А. Процедуры нечеткого комплексного оценивания // Современные сложные системы управления: тр. междунар. науч.-практ. конф. – Липецк, 2002. – С. 7–8.
8. Харитонов В. А., Винокур И. Р., Белых А. А. Функциональные возможности механизмов комплексного оценивания с топологической интерпретацией матриц свертки // Управление большими системами. – Вып. 18. – М., 2007. – С. 129–140.
9. Алгоритмические основы нечеткой процедуры комплексного оценивания объектов различной природы [Электронный ресурс] /

А.О. Алексеев [и др.] // *Фундаментальные исследования*. – 2014. – № 3 (ч. 3). – С. 469–474. – URL: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10002965 (дата обращения: 07.05.2014).

10. Алексеев А.О., Алексеева И.Е. Процедуры нечеткого комплексного оценивания [Электронный ресурс] // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ – 2014, Москва 16–19 июня 2014 г. – М.: ИПУ РАН, 2014. – С. 7884–7893. – URL: <http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/prcdngs/7884.pdf> (дата обращения: 07.10.2014).

11. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений: пер. Н.И. Ринго / под ред. Н.Н. Моисеева, С.А. Орловского. – М.: МИР, 1976. – 167 с.

12. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений / А.Н. Борисов [и др.]. – М.: Радио и связь, 1989. – 304 с.

13. Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами / под ред. акад. С.Н. Васильева. – М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2008. – 244 с.

14. Харитонов В.А., Белых А.А. Технологии современного менеджмента / под науч. ред. В.А. Харитонова. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. – 190 с.

References

1. Orlov A.I. Organizatsionno-ekonomicheskoe modelirovanie: Chast' 2. Ekspertnye otsenki [Organizational and economic modeling. Vol. 2. Expert valuations]. Moscow: Moskovskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet imeni N.E. Baumaha. Ekspertnye otsenki, 2011, vol. 2, 486 p.

2. Novikov D.A. Metodologiya upravleniia [Methodology of control sciences]. Moscow: Librokom, 2011. 128 p.

3. Azgal'dov G.G. Teoriia i praktika otsenki kachestva tovarov (osnovy kvalimetrii) [Theory and practices of products quality valuation (basics of qualimetrics)]. Moscow: Ekonomika, 1982. 256 p.

4. Varzhapetian A.G. Kvalimetriia [qualimetrics]. Saint-Petersburg: Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi universitet aerokosmicheskogo priborostroeniia, 2005. 176 p.

5. Burkov V.N., Novikov D.A. Kak upravliat' proektami [How to manage the project?]. Moscow: Sinteg, 1997. 190 p.

6. Glotov V.A., Pavel'ev V.V. Vektornaia stratifikatsiia [Vector stratification]. Moscow: Nauka, 1984. 132 p.

7. Andronikova N.G., Leont'ev S.V., Novikov D.A. Protседury nechetkogo kompleksnogo otsenivaniia [Procedures of fuzzy integrated assessment]. *Trudy mezhdunarodnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii "Sovremennye slozhnye sistemy upravleniia"*. Lipetsk, 2002, pp. 7-8.

8. Kharitonov V.A., Vinokur I.R., Belykh A.A. Funktsional'nye vozmozhnosti mekhanizmov kompleksnogo otsenivaniia s topologicheskoi interpretatsiei matrits svertki [Functional abilities of integrated assessment mechanisms with topological interpretation of convolution matrices]. *Upravlenie bol'shimi sistemami*, 2007, no. 18, pp. 129-140.

9. Alekseev A.O., Kalent'eva A.S., Vychezhnanin A.V., Klimets D.V. Algoritmicheskie osnovy nechetkoi protsedury kompleksnogo otsenivaniia ob"ektov razlichnoi prirody [Algorithmic basics of fuzzy procedure of integrated assessment of different nature objects]. *Fundamental'nye issledovaniia*, 2014, no. 3 (part 3), pp. 469-474, available at: www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=10002965 (accessed 07 October 2014).

10. Alekseev A.O., Alekseeva I.E. Protседury nechetkogo kompleksnogo otsenivaniia [Procedures of fuzzy integrated assessment]. *XII Vserossiiskoe soveshchanie po problemam upravleniia VSPU – 2014*. Moscow, 2014, pp. 7884-7893, available at: <http://vspu2014.ipu.ru/proceedings/prcdngs/7884.pdf> (accessed 07 October 2014).

11. Zade L. Poniatie lingvisticheskoi peremennoi i ego primenenie k priniatiiu priblizhennykh reshenii [The concept of linguistic variable and its application to approximate Reasoning]. Ed. by N.N. Moiseev and S.A. Orlovskii. Moscow: MIR, 1976. 167 p.

12. Borisov A.N. [et al.]. Obrabotka nechetkoi informatsii v sistemakh priniatii reshenii [Processing fuzzy information in decision-making systems]. Moscow: Radio i sviaz', 1989. 304 p.

13. Burkov V.N., Novikov D.A., Shchepkin A.V. Mekhanizmy upravleniia ekologo-ekonomicheskimi sistemami [Ecology economics systems control mechanisms]. Ed. by S.N. Vasilyev. Moscow: Fiziko-matematicheskoi literatury, 2008. 244 p.

14. Kharitonov V.A., Belykh A.A. Tekhnologii sovremennogo menedzhmenta [Modern management technologies]. Ed. by V.A. Kharitonov. Perm: Permskii gosudarstvennyj tekhnicheskii universitet, 2007. 190 p.

Получено 10.11.2015

Об авторах

Алексеев Александр Олегович (Пермь, Россия) – кандидат экономических наук, докторант кафедры «Строительный инжиниринг и материаловедение» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: alekseev@cems.pstu.ru).

Алексеева Ирина Евгеньевна (Пермь, Россия) – аспирант кафедры «Строительный инжиниринг и материаловедение» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: alekseeva@cems.pstu.ru).

About the authors

Alexander O. Alekseev (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Economics, Doctoral Student, Department of Construction Engineering and Material Sciences, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: alekseev@cems.pstu.ru).

Irina E. Alekseeva (Perm, Russian Federation) – Postgraduate Student, Department of Construction Engineering and Material Sciences, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: alekseeva@cems.pstu.ru).