

УДК 531.133.1

**В.М. Тверье, А.С. Миленин**

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСКА ВИСОЧНО-НИЖНЕЧЕЛЮСТНОГО СУСТАВА НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ М.А. БИО**

Заболеваниям височно-нижнечелюстного сустава подвержено около 40 % людей в мире в возрасте 20–40 лет. В настоящее время этимология заболеваний височно-нижнечелюстного сустава изучена слабо, существует лишь их примерная медицинская классификация. Анализ литературы показывает, что, как правило, практически ни одно заболевание компонентов сустава не обходится без их механического повреждения. Диск височно-нижнечелюстного сустава играет ключевую роль в работоспособности самого сустава и зубочелюстного комплекса в целом. Основным фактор, влияющий на работоспособность диска, – величина механических напряжений, вызванных различными нагрузками.

Как правило, лечение заболеваний такого рода носит неинвазивный характер, но в сложных случаях заболевания также используются хирургические методы. Во избежание операционного вмешательства и для профилактики заболеваний на начальной стадии необходимо провести биомеханическое математическое моделирование диска височно-нижнечелюстного сустава.

Изучение гистологии и физиологии диска показывает, что оптимальная модель для описания механического поведения диска под нагрузкой – изотропная пороупругая модель, предложенная М.А. Био. Она позволяет оценить напряженное состояние диска и объяснить с точки зрения механики роль синовиальной жидкости внутри него. В работе на основе постановки задачи линейной изотропной теории пороупругости построена модель поведения диска височно-нижнечелюстного сустава под нагрузкой. Решение сводится к начально-краевой задаче для нестационарного параболического уравнения. Из анализа результатов видно, что распределение давления жидкости в диске при приложении постоянной силы позволяет снизить величину механических напряжений в упругом хрящевом скелете, защищая его от разрушения. Исследована зависимость величины давления синовиальной жидкости от коэффициента гидравлической проницаемости, для чего был проведен анализ результатов решения для модели с различными величинами этого коэффициента.

**Ключевые слова:** диск, височно-нижнечелюстной сустав, пороупругость, коэффициент гидравлической проницаемости, закон Дарси.

**V.M. Tver'e, A.S. Milenin**

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

**MATHEMATICAL MODELING OF THE DISC  
OF THE TEMPOROMANDIBULAR JOINT ON THE BASIS  
OF THE THEORY OF M.A. BIO**

Diseases of the temporomandibular joint is subject to 40 % of people in the world aged 20-40. Currently, the etymology of diseases of the temporomandibular joint is poorly studied, there is only an approximate their medical classification. A study of the literature shows that, as a rule, virtually none of the components of the joint disease is not without its mechanical damage. The disc of the temporomandibular joint plays a key role in the performance of the joint and the dentoalveolar complex. The main factor influencing the use of the disc - the magnitude of the mechanical stresses caused by different loads.

Typically, treatment of diseases of this kind are non-invasive, but in complex cases surgical methods are used. To avoid surgical intervention and prevention of diseases at an early stage, it is necessary to conduct mathematical modeling of biomechanical disc of the temporomandibular joint.

The study of the histology and physiology of the disc shows that the optimal model for the mechanical behavior of the disc under load - isotropic poroelastic model proposed by M.A. Bio. It allows to estimate the stress state of the disk and explain the role of the synovial fluid inside it in terms of the mechanics. In the formulation of the problem based on the theory of linear isotropic poroelasticity a model of behavior of the disc of the temporomandibular joint under load is constructed. The solution is reduced to an initial boundary value problem for the non-stationary parabolic equation. Analysis of results shows that the distribution of the fluid pressure in the disc by applying a constant force allows to reduce the amount of stress in elastic cartilage skeleton, protecting it from damage. The dependence of the pressure of the synovial fluid from the hydraulic permeability coefficient is investigated, which analyzed the results of the decision model with different values of this coefficient.

**Keywords:** disc, temporomandibular joint, poroelastic, coefficient of hydraulic permeability, Darcy's law.

### **Введение**

Диск представляет собой сложную структуру – твердый хрящевой матрикс, насыщенный синовиальной (суставной) жидкостью – и играет ключевую роль в работоспособности самого сустава и зубочелюстного комплекса в целом. Основной фактор, влияющий на работоспособность диска, – величина механических напряжений, вызванных различными нагрузками [1].

Центральная зона диска подвержена наибольшему сжимающим нагрузкам в процессе жизнедеятельности. Более того, ввиду отсутствия в этой зоне кровеносных сосудов ее самостоятельная регенерация при механическом повреждении практически невозможна.

Во избежание операционного вмешательства и для профилактики заболеваний диска на начальной стадии необходимо провести биомеханический анализ центральной зоны диска височно-нижнечелюстного сустава на предмет определения величины и распределения напряжений.

## 1. Материалы и методы

На основании данных об анатомии, гистологии, физиологии, а также работ других авторов по биомеханическому моделированию диска височно-нижнечелюстного сустава наиболее адекватной математической моделью для описания поведения диска под нагрузкой принята изотропная пороупругая модель [2]. Такая модель позволяет учесть пористую упругую хрящевую структуру диска, а также свойства и количественное содержание синовиальной жидкости внутри него.

Для моделирования поведения центральной зоны диска височно-нижнечелюстного сустава под нагрузкой и определения величины механических напряжений в диске, а также их распределения с течением времени необходимо сформулировать постановку задачи и найти зависимость напряжений от величины гидравлического давления синовиальной жидкости внутри него.

Для решения такой задачи использована постановка классической задачи Манделя, которая ранее ставилась для насыщенных влагой грунтов [3, 4]. Постановка этой задачи впервые использовалась для биомеханического моделирования в данной работе. Решение задачи проводилось методом преобразования Лапласа, в отличие от первоисточника, в котором задача решалась методом Фурье, причем результаты решения совпали. Решение методом Фурье, примененным в оригинальной постановке задачи Манделя, имеет ряд особенностей, которые реализуются не во всех случаях. Универсальным способом аналитического решения таких задач является метод преобразования Лапласа.

Представим центральную зону диска височно-нижнечелюстного сустава в виде плоского прямоугольного тела длиной  $2a$ . Мышцелок нижней челюсти и чешуйчатую часть височной кости будем рассматривать как две жесткие непроницаемые пластины, окружающие диск сверху и снизу (рис. 1).

Объектам анализа будет являться плоско-деформированное состояние тела. Синовиальная жидкость свободно вытекает из центра диска к лимфоузлам на периферии, закрепления на краях отсутствуют.

В начальный момент диск не нагружен, далее к центру нижней и верхней пластины прикладывается постоянная сжимающая сила в направлении оси  $y$ , моделирующая жевательную нагрузку и равная  $F$ . Касательные напряжения в хрящевом скелете равны нулю на участке контакта пороупругого тела и пластин из-за того, что коэффициент

трения синовиальной жидкости близок к нулю. Наличие же переработанной синовиальной жидкости (мукоида) в центральной зоне диска позволяет рассматривать его структуру как однородную.

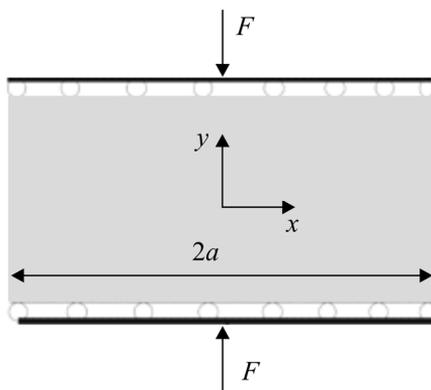


Рис. 1. Пороупругая модель диска височно-нижнечелюстного сустава

Решение модели сводится к начально-краевой задаче для нестационарного параболического уравнения и производится методом преобразования Лапласа.

## 2. Результаты

На рис. 2 представлены графические распределения гидравлического давления в пороупругом теле и напряжений в твердом упругом скелете диска височно-нижнечелюстного сустава с течением времени. Для упрощения расчетов задача решена в относительных величинах: гидравлическое давление  $\bar{p}$  и напряжения  $\bar{\sigma}_{yy}$  в скелете нормированы по их начальным значениям, координата  $\bar{x}$  нормирована по длине модели диска, время  $\bar{t}$  – по квадрату длины и значению коэффициенту консолидации.

В начальный момент времени давление в центре тела близко к начальному, но превышает его на некоторую величину. Данный эффект играет положительную роль в функционировании диска – давление в порах и напряжения в упругом скелете связаны: чем выше гидравлическое давление, тем ниже напряжения хрящевого скелета, следовательно, такое возрастание давления не дает диску разрушиться под действием мгновенно приложенной нагрузки. Далее с течением времени наблюдается падение давления по всему телу по экспоненте в связи со свободным вытеканием жидкости по краям.

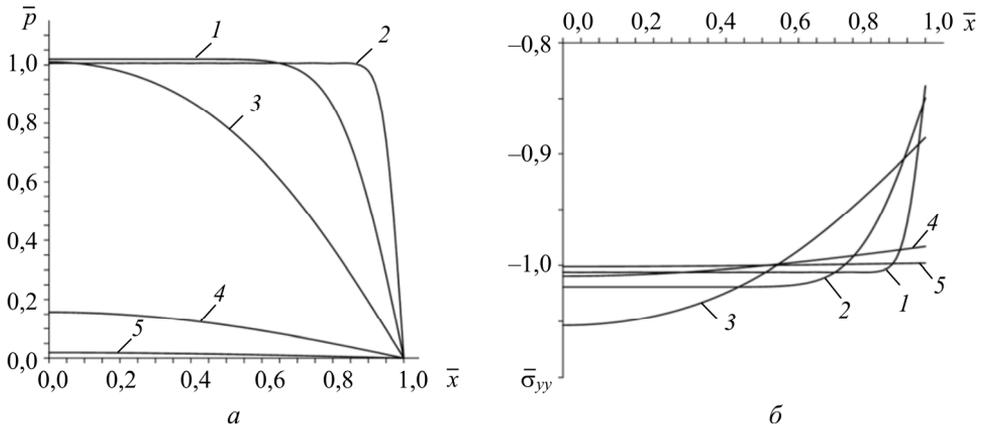


Рис. 2. Перераспределение: *a* – безразмерного давления синовиальной жидкости; *б* – безразмерных напряжений в центральной зоне диска височно-нижнечелюстного сустава с течением времени. Кривая 1 – при  $\bar{t} = 0,001$ , кривая 2 – при  $\bar{t} = 0,01$ , кривая 3 – при  $\bar{t} = 0,1$ , кривая 4 – при  $\bar{t} = 1$ , кривая 5 – при  $\bar{t} = 2$

Поскольку давление в жидкости падает, напряжения в диске возрастают. Такое поведение напряжений и давления в диске способствует равномерному распределению нагрузки, предотвращает его от механических повреждений, а также обеспечивает питание зон, свободных от кровеносных сосудов.

Различные механические упругие константы для диска височно-нижнечелюстного сустава получены многими авторами по итогам различных экспериментов. Но применение пороупругой модели диска требует рассмотрения не только упругих параметров, но и коэффициента гидравлической проницаемости диска, входящего в закон Дарси.

От величины коэффициента проницаемости непосредственно зависит возможность диска сопротивляться нагрузкам, его жесткость. Другими словами, величина коэффициента проницаемости влияет на способность диска сопротивляться сжатию и, следовательно, его разрушению. Низкая величина коэффициента говорит о том, что на перераспределение давления и напряжения в теле требуется значительно большее количество жидкости. В случае с высоким значением коэффициента проницаемости быстрый обмен жидкости в хряще приводит к существенному уменьшению жесткости и, соответственно, уменьшению напряжения в структуре. Значение коэффициента проницаемости для хрящей разных видов зависит от их функциональности и назначения.

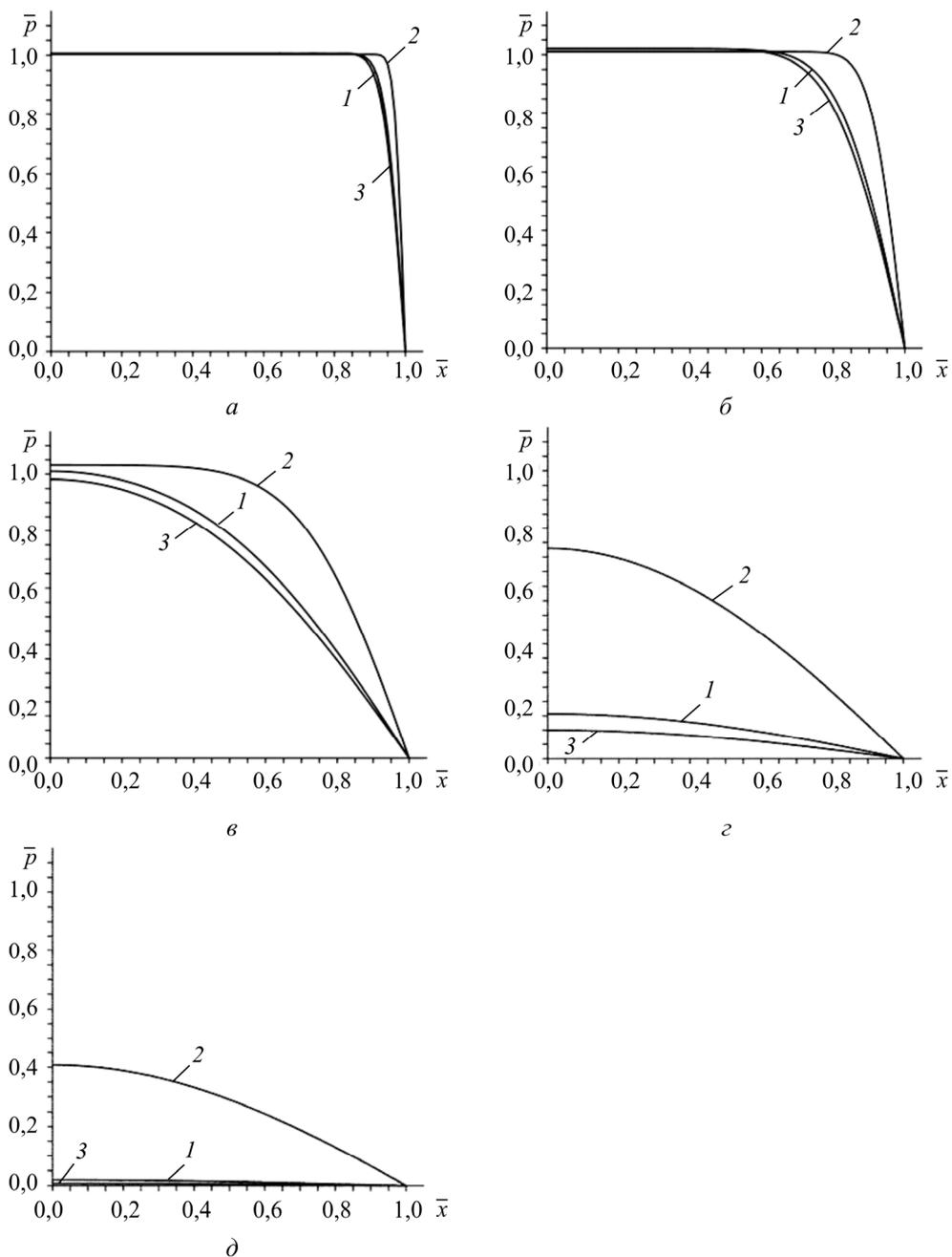


Рис. 3. Распределение безразмерного давления синовиальной жидкости  $\bar{p}$  в диске височно-нижнечелюстного сустава при разных значениях коэффициента гидравлической проницаемости. Кривая 1 – для диска височно-нижнечелюстного сустава; кривая 2 – для гиалинового хряща; кривая 3 – для мениска коленного сустава: а – при  $\bar{t} = 0,001$ , б – при  $\bar{t} = 0,01$ , в – при  $\bar{t} = 0,1$ , г – при  $\bar{t} = 1$ , д – при  $\bar{t} = 2$

Для подтверждения этой гипотезы был проведен эксперимент по определению коэффициента гидравлической проницаемости диска височно-нижнечелюстного сустава на суставных дисках свиньи. По итогам эксперимента получено среднее значение коэффициента гидравлической проницаемости диска височно-нижнечелюстного [5].

Для сравнения: значения коэффициента проницаемости для суставного хряща больше в 0,3 раз, для мениска коленного сустава – примерно в 1,2 раза (рис. 3).

На начальном этапе, когда течение жидкости еще развито недостаточно, разница в значениях давления незначительна. Далее с течением времени эта разница существенно возрастает. В последний рассматриваемый момент времени величина давления в гиалиновом хряще примерно в 20 раз больше, чем в диске височно-нижнечелюстного сустава и мениске коленного сустава.

Из графических решений на рис. 3 видно, что величина коэффициента гидравлической проницаемости сильно влияет на значение гидравлического давления и, как следствие, величину механических напряжений в твердом хрящевом скелете. Это, в свою очередь, подтверждает, что сопротивляемость сжатию напрямую зависит от значения коэффициента проницаемости. Данные результаты служат подтверждением нашего предположения о том, что коэффициент проницаемости для различных видов хрящей, в том числе для диска височно-нижнечелюстного сустава, необходимо уточнять экспериментально.

### **Список литературы**

1. Тверье В.М., Симановская Е.Ю., Няшин Ю.И. Механический фактор развития и функционирования зубочелюстной системы человека // Российский журнал биомеханики. – 2005. – Т. 9, № 2. – С. 34–42.
2. Экспериментальное изучение фильтрационных свойств и структурных особенностей дисков височно-нижнечелюстных суставов свиней / М.Ю. Няшин [и др.] // Российский журнал биомеханики. – 2002. – Т. 6, № 3. – С. 33–38.
3. Coussy O. Poromechanics. – J.Wiley, 2004. – 298 p.
4. Mandel J. Consolidation des sols // Geotechnique. – 1953. – Vol. 3, № 7. – P. 287–299.

5. Тверье В.М., Няшин Ю.И. Коэффициент гидравлической проницаемости диска височно-нижнечелюстного сустава: экспериментальное определение // Российский журнал биомеханики. – 2010. – Т. 14, № 2. – С. 28–36.

### References

1. Tver'e V.M., Simanovskaia E.Iu., Niashin Iu.I. Mekhanicheskii faktor razvitiia i funktsionirovaniia zubocheiustnoi sistemy cheloveka [Mechanical factor in the development and functioning of the human dental system]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2005, vol. 9, no. 2, pp. 34-42.

2. Niashin M.Iu. Eksperimental'noe izuchenie fil'tracionnykh svoistv i strukturnykh osobennostei diskov visochno-nizhnecheiustnykh sustavov svinei [Experimental study of the filtration properties and structural characteristics of mandibular joints temporomandibular disc pigs]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2002, vol. 6, no. 3, pp. 33-38.

3. Coussy O. Poromechanics. J.Wiley, 2004. 298 p.

4. Mandel J. Consolidation des sols. *Geotechnique*, 1953, vol. 3, no. 7, pp. 287-299.

5. Tver'e V.M., Niashin Iu.I. Koeffitsient gidravlicheskoj pronitsaemosti diska visochno-nizhnecheiustnogo sustava: eksperimental'noe opredelenie [Hydraulic permeability coefficient of the disc of the temporomandibular joint: experimental determination]. *Rossiiskii zhurnal biomekhaniki*, 2010, vol. 14, no. 2, pp. 28-36.

Получено 10.11.2015

### Об авторах

**Тверье Виктор Моисеевич** (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, доцент кафедры «Теоретическая механика и биомеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: artmil06@yandex.ru).

**Миленин Артем Сергеевич** (Пермь, Россия) – аспирант кафедры «Теоретическая механика и биомеханика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: artmil06@yandex.ru).

### **About the authors**

**Viktor M. Tver'e** (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Associate Professor, Department of Engineering Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: artmil06@yandex.ru).

**Artem S. Milenin** (Perm, Russian Federation) – Postgraduate Student, Department of Engineering Mechanics and Biomechanics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: artmil06@yandex.ru).