

DOI: 10.15593/2224-9826/2015.4.01

УДК 624.131

**Д.М. Шапиро**

Воронежский государственный  
архитектурно-строительный университет,  
Воронеж, Россия

## **АНАЛИТИЧЕСКИЙ И ЧИСЛЕННЫЙ ЛИНЕЙНЫЕ РАСЧЕТЫ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ**

Изложены результаты исследований, относящиеся к теории расчета оснований фундаментов мелкого заложения. Показан второй, ранее неизвестный (тождественный решениям задач Фламана и Митчелла) способ получения решений теории упругости о распределении напряжений в полупространстве от линейной и полосовой нагрузки. Показана неполная теоретическая строгость решений математической теории упругости, связанная с отсутствием в этих решениях коэффициента Пуассона. Приводится сравнение результатов расчетов, полученных аналитическим способом и средствами МКЭ. Содержатся положения, предназначенные для правильной постановки задач МКЭ и интерпретации результатов расчетов.

**Ключевые слова:** расчет оснований, фундаменты мелкого заложения, теория упругости, метод конечных элементов.

**D.M. Shapiro**

Voronezh State Architectural  
and Civil Engineering University, Voronezh, Russian Federation

## **ANALYTICAL AND NUMERICAL LINEAR CALCULATIONS OF SHALLOW FOUNDATIONS BASES**

The article contains results of investigations concerning to the theory of calculation shallow foundation bases. The second before unknown (identical to decisions of Flaman and Michell problems) way of obtain of theory of elasticity decisions about distribution of stresses in half-space of linear and strip load is shown. It is shown that the mathematical theory of elasticity decisions are not sufficiently strict in connection with absence in this decisions Poisson ratio. The calculations results obtained by analytical and Finite element method (FEM). It is contained ideas for correct description of FEM problems and interpretation calculation results.

**Keywords:** calculation, bases, shallow foundation, theory of elasticity, finite element method.

## 1. Классические решения

Современный расчет оснований фундаментов мелкого заложения [1, 2 и др.] основан на классических решениях задач Фламана и Митчелла математической теории упругости о распределении напряжений в полупространстве, ограниченном горизонтальной плоскостью.

Решение первой задачи о линейной нагрузке  $P$ , действующей на верхней границе полупространства, получено при следующих допущениях. Предполагается, что напряжения  $\sigma_r$  на площадках, перпендикулярных лучам  $OA$ , проведенным через ось действия линейной нагрузки  $P$  на рис. 1, *a*, распределены пропорционально косинусам углов  $\beta$  между этими лучами и осью  $Z$  и обратно пропорциональны длинам (радиусам)  $r$  лучей  $OA$ . Касательные напряжения на этих площадках равны нулю.

В соответствии с этими положениями и требованием равновесия получено граничное условие решаемой задачи: полуцилиндрическая поверхность (см. рис. 1, *a*) с распределением напряжений

$$\sigma_r = -(2P/\pi r) \cdot \cos\beta. \quad (1)$$

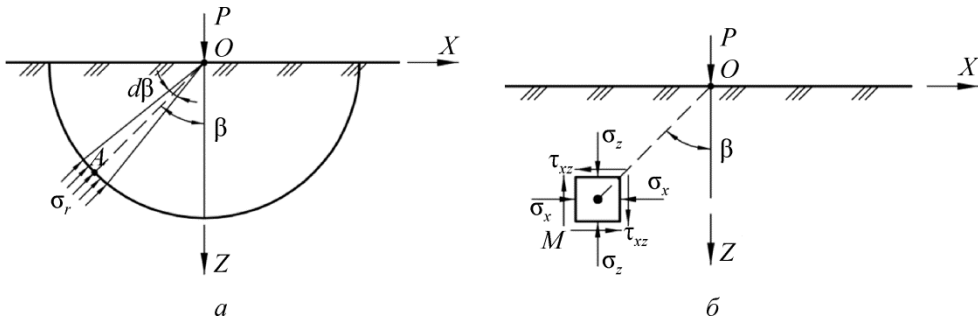


Рис. 1. Схема (*a*) и система координат (*б*) к решению задачи о действии линейной нагрузки  $P$  на поверхности полупространства, ограниченного горизонтальной плоскостью

Выражения для осевых компонентов напряжений в точке  $M(x, z)$  в условиях плоской задачи (рис. 1, *б*) получены на основании уравнения (1) в следующем виде:

$$\sigma_z = -\frac{2P}{\pi r} \cos^3 \beta, \quad \sigma_x = -\frac{2P}{\pi r} \sin^2 \beta \cos \beta, \quad \tau_{xz} = \frac{2P}{\pi r} \sin \beta \cos^2 \beta, \quad (2)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ ; сила  $P$  (размерностью Н/м) представляет собой долю линейной нагрузки, действующей на участке единичной длины.

Продолжением рассмотренного выше решения является задача Митчелла о плоской деформации полупространства при действии полосовой нагрузки  $p$ , заменяющей ленточный фундамент (рис. 2, а).

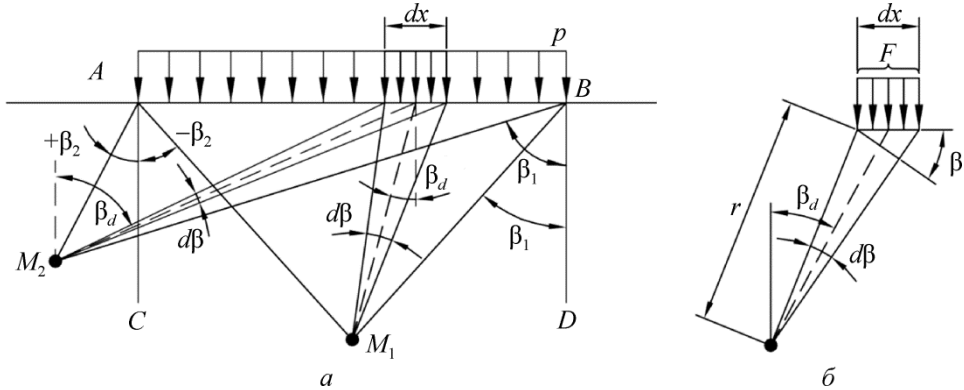


Рис. 2. Схемы: а – к решению задачи о полосовой нагрузке на основание, ограниченное плоскостью, б – к соотношениям (а)

Решение задачи получено путем интегрирования выражений (2) с подстановкой  $P = p dx$ . Из схемы на рис. 2, б выводится соотношение

$$dx = r d\beta / \cos \beta_d, P = p dx = p r d\beta / \cos \beta_d. \quad (a)$$

После этого подынтегральные выражения принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -(2p/\pi r) \cos^3 \beta_d \cdot r d\beta / \cos \beta_d = -(2p/\pi) \cos^2 \beta_d d\beta, \\ \sigma_x &= -(2p/\pi r) \cos \beta_d \sin^2 \beta_d \cdot r d\beta / \cos \beta_d = -(2p/\pi) \sin^2 \beta_d d\beta, \\ \tau_{xz} &= (2p/\pi r) \sin \beta_d \cos^2 \beta_d \cdot r d\beta / \cos \beta_d = (2p/\pi) \sin \beta_d \cos \beta_d d\beta. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

В результате интегрирования выражений (б) по  $\beta_d$  в пределах от  $\beta_d = \beta_2$  до  $\beta_d = \beta_1$  получаем известные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{p}{\pi} \left[ \beta_1 + \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 - (\pm\beta_2) - \frac{1}{2} \sin (\pm 2\beta_2) \right], \\ \sigma_x &= -\frac{p}{\pi} \left[ \beta_1 - \frac{1}{2} \sin 2\beta_1 - (\pm\beta_2) + \frac{1}{2} \sin (\pm 2\beta_2) \right], \\ \tau_{xz} &= \frac{p}{2\pi} [\cos 2\beta_2 - \cos 2\beta_1]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Величина углов  $\beta_2$  (см. рис. 2) со знаком «плюс» («минус») принимается для точек  $M$ , лежащих вне (внутри) области  $ABCD$ .

Выражения для главных напряжений  $\sigma_{1,2}$  в зависимости от угла видимости  $2\beta = \beta_1 - \beta_2$  (рис. 3) имеют следующую запись:

$$\sigma_{1,2} = -\frac{P}{\pi} [2\beta \mp \sin 2\beta]. \quad (4)$$

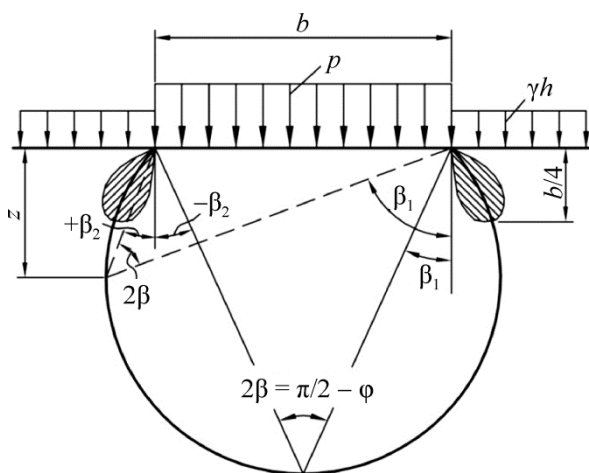


Рис. 3. Схема к определению  $R$  по формуле (5)

В расчете оснований принято допущение о замене фундамента мелкого заложения полосовой нагрузкой  $p$ . Для расчета осадок используется первое из трех уравнений (3). Определение начальной критической нагрузки или расчетного сопротивления  $R$  по СП 22.13330.2011 (а также всех предыдущих редакций СНиПов, относящихся к проектированию оснований) основано на использовании выражения (4).

В решении теории упругости возникает «область разрушения» (с физически невозможным напряженным состоянием), где не выполняется условие прочности Мора – Кулона. Из уравнений (4) следует, что на каждой окружности, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , с вписанным углом  $2\beta$  главные напряжения  $\sigma_{1,2}$  имеют одни и те же значения. В соответствии с решением задачи Н.П. Пузыревского получено, что дуга с вписанным углом  $2\beta = \pi/2 - \varphi$  является расчетной (самой невыгодной) по условию проникновения «области разрушения» в основание на наибольшую глубину  $z_{\max}$ . Расчетное сопротивление  $R$  определяется в предположении, что размер этой области  $z_{\max} = b/4$  соответствует границе

правомерного использования (корректности) решения теории упругости для расчета осадки. Принимается допущение о том, что природное давление в основании распределено гидростатически ( $\sigma_{xg} = \sigma_{zg} = \sigma_{1,2g} = -\gamma z$ ), что формально следует из уравнений (3) и (4). На основе этих положений получено выражение для расчетного сопротивления

$$R = \frac{\pi \left( \gamma h + \frac{\gamma b}{4} + \frac{c}{\operatorname{tg} \varphi} \right)}{\operatorname{ctg} \varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + \gamma h. \quad (5)$$

В нормах СП 22.13330.2011 выражение для расчетного сопротивления  $R$  представлено в записи [формула (5.7), таблица 5.5], которая (если ее освободить от поправочных коэффициентов и коэффициентов условий работы) для зданий без подвалов тождественна уравнению (5).

Уравнение Мора – Кулона для условий рассматриваемой задачи имеет следующий вид:

$$F_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) + [\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \gamma h - \gamma z] \sin \varphi - c \cos \varphi = 0, \quad (6)$$

где  $F_1$  – функция с размерностью [кПа];  $\sigma_1, \sigma_2$  – главные напряжения в основании от полосовой нагрузки с интенсивностью  $R - \gamma h$ , определяемые по формуле (4). Здесь и в дальнейшем сжатие считается отрицательным направлением нормальных напряжений;  $\sigma_1, \sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ,  $|\sigma_1| < |\sigma_2|$ ) учитываются со знаком «минус».

Уравнение  $F_1 = 0$  справедливо для внешних границ «областей разрушения» каплеобразной формы на рис. 3. Внутри «областей разрушения» выражение  $F_1 > 0$ , на остальной части расчетной области  $F_1 < 0$ . Дуга с вписанным углом  $2\beta = \pi/2 - \varphi$  является геометрическим местом наибольших значений  $F_1$  на каждом уровне  $z$ .

На внешней границе «области разрушения» в точке пересечения с дугой с вписанным углом  $2\beta = \pi/2 - \varphi$ ,  $z = z_{\max} = b/4$   $F_1 = 0$ . В точках  $A$  и  $B$  (см. рис. 2, 3)  $z = 0$ , остальные значения, входящие в выражение (6), те же. Следовательно, при  $z = 0$  в точках  $A$  и  $B$  находятся наибольшие значения  $F_1 = \gamma z_{\max} \sin \varphi = \gamma(b/4) \sin \varphi$ .

Предельное значение  $F_1 = \frac{1}{4}\gamma b \sin \varphi$  в точках  $A$  и  $B$  в качестве условного параметра, ограничивающего нагрузку на основание, является равнозначным условию  $F_1 = 0$  при  $z_{\max} = b/4$ .

## 2. Второй способ решения задач о полосовой и линейной нагрузке на полупространстве

В дополнение к изложенному выше покажем еще один способ решения указанных задач.

Существует классическое решение плоской задачи теории упругости [3, 4 и др.], описывающее распределение напряжений в клине (области на рис. 4, *a*, ограниченной двумя пересекающимися лучами с центральным углом  $\pi - \alpha$ ) при действии полосовой нагрузки на одной из граней. Частным случаем этой задачи является распределение напряжений в полуплоскости (полупространстве) [ $\alpha = 0$  (рис. 4, *б*)] в соответствии со следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -(p/\pi) \cdot (\pi - \theta + \sin\theta \cos\theta), \\ \sigma_x &= -(p/\pi) \cdot (\pi - \theta - \sin\theta \cos\theta), \\ \tau_{xz} &= (p/\pi) \cdot \sin^2\theta,\end{aligned}\tag{7}$$

где  $\theta$  – угловая координата точки  $M$ .

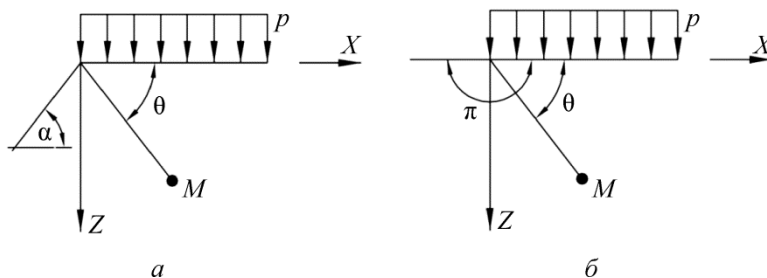


Рис. 4. Расчетные схемы клина (*a*) и полуплоскости (*б*) при действии полубесконечной полосовой нагрузки

Напряжения  $\sigma_z$ ,  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xz}$  от полосовой нагрузки  $p$ , действующей на площадке шириной  $b$ , определяются как алгебраическая сумма напряжений от двух полубесконечных нагрузок  $p_2 = p$  и  $p_1 = -p$  (рис. 5):

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -(p/\pi) \cdot [(\pi - \theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_2) - (\pi - \theta_1 + \sin\theta_1 \cos\theta_1)] = \\ &= -(p/\pi) \cdot (\theta_1 - \theta_2 + \frac{1}{2}\sin 2\theta_2 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_1); \\ \sigma_x &= -(p/\pi) \cdot [(\pi - \theta_2 - \sin\theta_2 \cos\theta_2) - (\pi - \theta_1 - \sin\theta_1 \cos\theta_1)] = \\ &= -(p/\pi) \cdot (\theta_1 - \theta_2 - \frac{1}{2}\sin 2\theta_2 + \frac{1}{2}\sin 2\theta_1); \\ \tau_{xz} &= (p/\pi) \cdot (\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1) = (p/2\pi) \cdot (\cos 2\theta_1 - \cos 2\theta_2).\end{aligned}\tag{8}$$

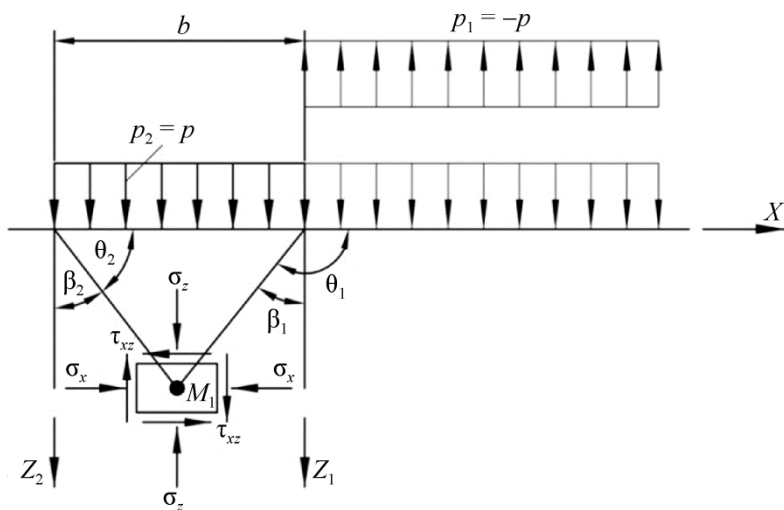


Рис. 5. Расчетная схема к уравнениям (7)

Уравнения (8) тождественны формулам (3) решения задачи Митчелла. В этом можно убедиться, учитывая следующие соотношения:

$$\theta_1 = \beta_1 + \pi/2, \theta_2 = (\pm\beta_2) + \pi/2, \theta_1 - \theta_2 = \beta_1 - (\pm\beta_2);$$

$$\sin 2\theta_{1,2} = -\sin 2\beta_{1,2}, \cos 2\theta_{1,2} = -\cos 2\beta_{1,2}.$$

В этих соотношениях угол  $\beta_2$  принимается со знаком, показанным на рис. 3.

Из уравнений (8) также можно получить выражения (2) (решение задачи Фламана), не используя при этом принятое в виде допущения соотношение  $\sigma_r = -2P\cos\beta/\pi r$ . Для этого ширину  $b$  полосовой нагрузки следует уменьшить до размера  $dx$  (рис. 6). Формулы (8) следует преобразовать, используя следующие подстановки.

Из ранее полученного соотношения  $P = p dx = p r d\beta / \cos\beta$  находим

$$p = P \cos\beta / r d\beta. \quad (a)$$

Разность углов

$$\theta_1 - \theta_2 = \beta_1 - \beta_2 = d\beta. \quad (б)$$

Выражения

$$\sin\theta_2 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_1 = \sin\beta_1 \cos\beta_1 - \sin\beta_2 \cos\beta_2 = d(\sin\beta \cos\beta). \quad (в)$$

$$\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_1 = \cos^2\beta_2 - \cos^2\beta_1 = -d(\cos^2\beta). \quad (г)$$

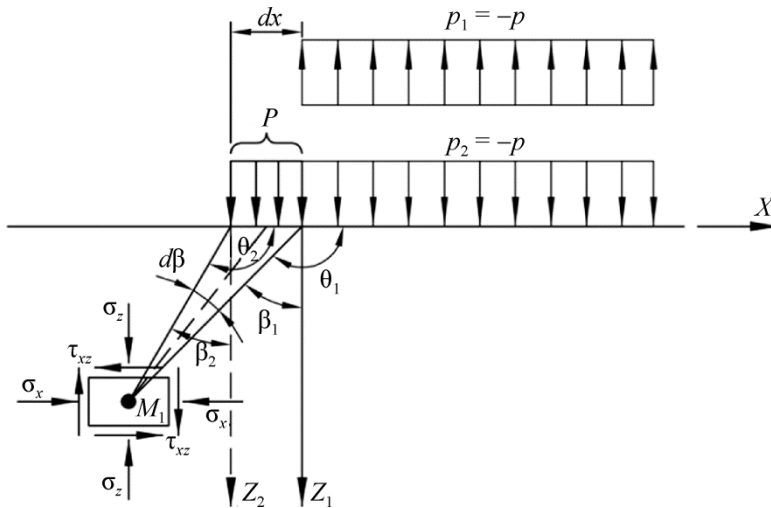


Рис. 6. Схема к уравнениям (а), (б), (в), (г) и (9)

После замен в уравнениях (8) в соответствии (а), (б), (в), (г) и дифференцирования полученных соотношений получаем те же записи, что и (2):

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_z &= - (P \cos \beta / \pi r d \beta) [d\beta + d(\sin \beta \cos \beta)] = - (P \cos \beta / \pi r) \times \\
 &\times [1 + d(\sin \beta \cos \beta) / d\beta] = - (P \cos \beta / \pi r) (1 + \cos 2\beta) = - (2P / \pi r) \cos^3 \beta; \\
 \sigma_x &= - (P \cos \beta / \pi r d \beta) [d\beta - d(\sin \beta \cos \beta)] = - (P \cos \beta / \pi r) \times \\
 &\times [1 - d(\sin \beta \cos \beta) / d\beta] = - (P \cos \beta / \pi R) (1 - \cos 2\beta) = \\
 &= - (2P / \pi R) \sin^2 \beta \cos \beta; \\
 \tau_{xz} &= (P \cos \beta / \pi r d \beta) [-d(\cos^2 \beta)] = (2P / \pi r) \sin \beta \cos^2 \beta.
 \end{aligned} \right\} (9)$$

Таким образом, тождественные (2) и (3) уравнения (9) и (8) получены без помощи граничного условия (1), и само это условие становится следствием решения (9).

### 3. Теоретическая оценка решений задач Фламана и Митчелла

Рассмотренные выше группы уравнений лежат в основе широко применяемого на практике раздела теории фундаментостроения. Поэтому анализ решений рассматриваемых задач представляет научный и практический интерес. Такой анализ востребован в связи с широким использованием при проектировании оснований программ, реализующих решения метода конечных элементов (МКЭ). Результаты расчетов



одних и тех же объектов средствами МКЭ и при помощи таблиц, основанных на решениях математической теории упругости, не могут совпадать. И это связано не только с численной природой МКЭ.

Решение теории упругости является единственным, если граничные условия заданы на замкнутом контуре (теорема Кирхгофа). В данном случае [решение (2)] граничные условия являются доказанными только на верхней горизонтальной грани расчетной области, а условия на цилиндрической поверхности на рис. 1, *a* следует считать допущением. При получении решений (8) и (9) граничные условия на замыкающей части контура вообще отсутствуют, а результат тождественен уравнениям (2) и (3).

Решения (2)–(9) и (3)–(8) удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия и непрерывности деформаций (соотношения Коши), что является необходимым требованием математической теории упругости. Но эти уравнения не содержат коэффициент поперечной деформации  $\nu$ . Практика и инженерный анализ показывают, что коэффициенты поперечной деформации  $\nu$  или бокового давления  $\xi = \nu/(1 - \nu)$  оказывают влияние на распределения напряжений в расчетных областях. Для того чтобы тот или другой из этих коэффициентов вошел в решение теории упругости, его следует иметь в граничных условиях или других инженерных требованиях. Этот вывод прямо относится к расчетам оснований, где величины коэффициентов поперечной деформации и бокового давления находятся в пределах  $\nu = 0,30 \dots 0,42$ ,  $\xi = 0,43 \dots 0,72$ .

В граничных условиях рассмотренных выше задач теории упругости коэффициент  $\nu$  отсутствует. По этой причине решения (2)–(9) и (3)–(8) не вполне корректны и являются общими для обеих версий плоской задачи: плоского напряженного состояния (полуплоскость) и плоской деформации (полупространство). Независимость указанных уравнений от коэффициента поперечной деформации придает им общность для любых грунтов.

В МКЭ, чтобы задача решалась, граничные условия задаются на замкнутом контуре. Решения задач МКЭ не могут быть получены без коэффициента  $\nu$ . При одинаковой форме, размерах расчетной области и системе действующих сил решения двух разных версий плоской задачи (плоского напряженного состояния и плоской деформации) не тождественны. Также отличаются решения одной и той же задачи (для любого одного вида напряженного состояния) при разных значениях коэффициента поперечной деформации.

Из изложенного выше следует, что для одних и тех же расчетных областей решения задач математической теории упругости и МКЭ всегда будут различны. Решения задач теории упругости не всегда могут служить эталоном для результатов расчета МКЭ.

#### 4. Расчет оснований МКЭ

При расчетах оснований средствами МКЭ используются как физически нелинейные решения, так и линейные численные способы расчета. Область использования программ, реализующих линейную версию МКЭ, та же, что и аналитических решений с готовыми таблицами – проверка ограниченности размеров «областей разрушения» в основании и расчет перемещений: осадок, кренов, перекосов фундаментов, дополнительных осадок существующей застройки.

Достоинствами линейных расчетов МКЭ являются единственность и ясность математической процедуры, используемой в разных программах.

Глубина проникновения в основание «областей разрушения», в которых не выполняется условие прочности грунта Мора – Кулона, по результатам расчетов МКЭ при одних и тех же нагрузках существенно больше, чем в решении теории упругости [ $z_{\max} = b/4$  при нагрузке  $p = R$  по формуле (5) или (5.7) СП 22.13330.2011]. Это происходит за счет того, что в решении МКЭ учитывается коэффициент поперечной деформации, а в решениях теории упругости (2)–(4) его нет.

Ниже приводятся результаты расчетов «областей разрушения» в двух примерах оснований, сложенных следующими грунтами:

1) мелкий песок  $\nu = 0,30$ ,  $\varphi = 30^\circ$ ,  $c = 0$ ;

2) тугопластичная глина  $\nu = 0,42$ ,  $\varphi = 18^\circ$ ,  $c = 40$  кПа. В обоих примерах приняты удельный вес грунта основания  $\gamma = 18$  кН/м<sup>3</sup>, условный модуль деформации (не влияющий на распределение напряжений)  $E = 1000$  кПа. Природное давление принято распределенным гидростатически [ $\sigma_{xg} = \sigma_{zg} = \gamma(h + z)$ ]. Размеры расчетной области и фундаментов для обеих задач: расчетная область 10×20 м, ширина фундамента 3,0 м, глубина заложения  $h = 2,0$  м (рис. 7, а). Граничные условия описаны в подписи к рис. 7. В зоне приложения внешней нагрузки выделена область с размерами по горизонтали 6 м, по вертикали 4,5 м со сгущением сетки прямоугольных конечных элементы до размеров 0,15×0,15 м.

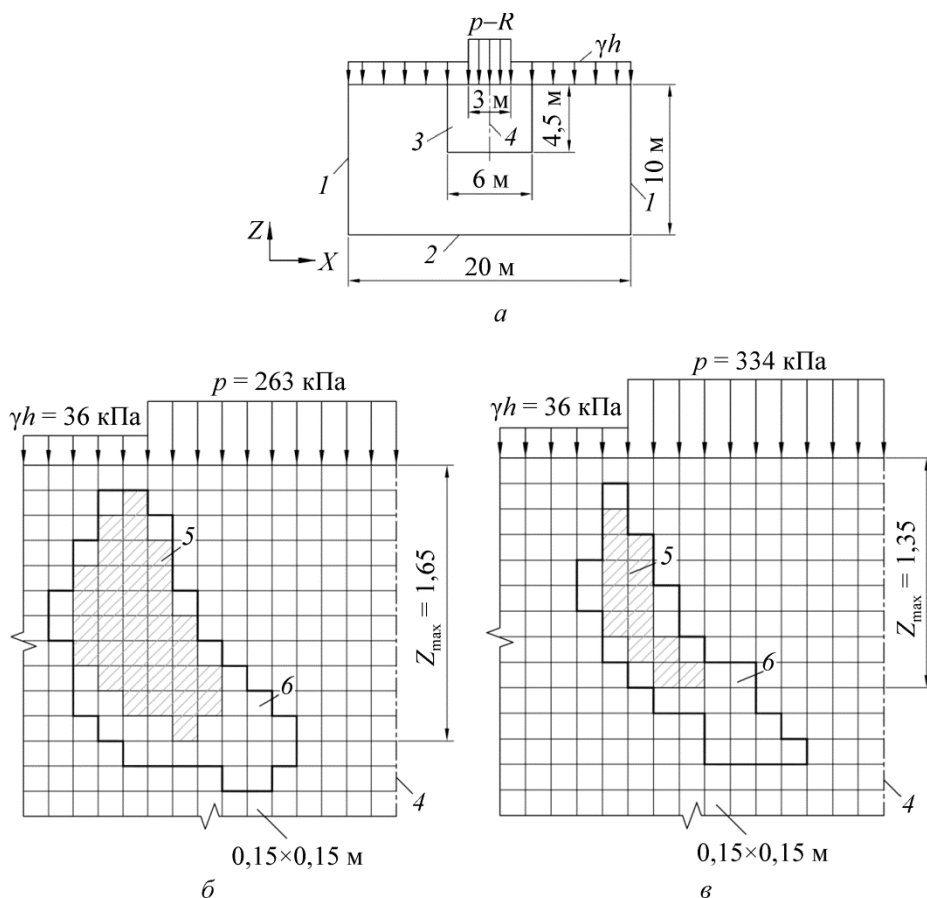


Рис. 7. Примеры «областей разрушения» в основаниях по результатам расчетов МКЭ: *a* – размеры расчетной области и граничные условия; *б, в* – «области разрушения» и области предельного напряженного состояния в основаниях по примерам 1 и 2; *1* – связи по направлению *X*; *2* – связи по направлениям *X* и *Z*; *3* – область конечных элементов с размерами  $0,15 \times 0,15$  м; *4* – плоскость симметрии расчетной области; *5* – конечные элементы «области разрушения» ( $F_2 > 1$  кПа); *6* – конечные элементы области « $1$  кПа  $> F_2 > -1$  кПа»

Интенсивность нагрузки  $p$  назначена равной расчетному сопротивлению  $R$  по формуле (5). В первой задаче (основание, сложенное мелким песком)  $p = R = 263$  кПа, во второй задаче (основание, сложенное тугопластичной глиной)  $p = R = 334$  кПа.

Параметр  $F_2$  (с размерностью [кПа]), определяющий состояние грунта в центрах конечных элементов по условию Мора – Кулона, для условий решаемой задачи:

$$F_2 = [1/4(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2]^{1/2} + [1/2(\sigma_x + \sigma_z) - \gamma h - \gamma z] \sin \varphi - c \cos \varphi, \quad (10)$$

где  $\gamma h = 2,0 \cdot 18 = 36$  кПа – природное давление на уровне подошвы фундамента;  $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$  – компоненты напряжений в центрах конечных элементов от полосовой нагрузки  $p - \gamma h = R - \gamma h$ ;  $z$  – расстояние по вертикали центров конечных элементов от уровня приложения полосовой нагрузки; нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  являются сжимающими и учитываются со знаком «минус».

Значения  $F_2$  со знаком «плюс» означают, что конечный элемент грунта находится в «области разрушения». Отрицательные значения  $F_2$  соответствуют допредельному напряженному состоянию. Значения  $F_2 = 0$  или близкие к нулю соответствуют предельному (физически возможному) напряженному состоянию грунта.

Результаты расчетов представлены на рис. 7, б, в. На поперечных разрезах основания выделены три области: «область разрушения», в которой получены значения  $F_2 > 1$  кПа; область допредельного напряженного состояния со значениями  $F_2 < -1$  кПа; область пограничного (предельного) напряженного состояния, принятая по критерию « $1 \text{ кПа} > F_2 > -1 \text{ кПа}$ ».

В примерах 1 и 2 размеры и глубина (относительная глубина) проникновения в основание «областей разрушения» составили соответственно  $z_{\max} = 1,65$  м ( $z_{\max}/b = 0,55$ ) и  $z_{\max} = 1,35$  м ( $z_{\max}/b = 0,45$ ). Но при этом нагрузка  $p$  является безопасной, «начальной критической», так как равна расчетному сопротивлению  $R$  по формуле (5), соответствующей соотношению  $z_{\max}/b = 0,25$  по решению теории упругости.

Дополнительным аргументом в пользу этого вывода является получение параметров  $F_2$  в конечных элементах «областей разрушения»:

– от 1,05 до 5,96 кПа в первой задаче, что меньше  $F_1 = \frac{1}{4}\gamma b \sin\varphi = \frac{1}{4} \cdot 18 \cdot 3,0 \cdot \sin 30^\circ = 6,75$  кПа;

– от 1,06 до 2,76 кПа во второй задаче, что меньше  $F_1 = \frac{1}{4} \cdot 18 \cdot 3,0 \cdot \sin 18^\circ = 4,17$  кПа.

### **Заключительные замечания**

Содержание настоящей статьи не преследует цель критики или отказа от использования на практике решений задач Фламана и Митчелла. Методы расчета, разработанные на основе этих решений, проверены временем и обоснованно сохраняют свое место в теории, документах технического регулирования и проектной практике.

Также показана неполная теоретическая строгость этих решений, понимание которой является полезным, с учетом их практического и научного значения. В связи с широким распространением МКЭ в проектной и исследовательской практике в статье дается объяснение причин расхождения результатов расчетов, полученных аналитическим и численным способом. Преимущества МКЭ по сравнению с решениями математической теории упругости заключаются в обоснованности граничных условий, задаваемых на замкнутом контуре, и использовании в расчетах коэффициента поперечной деформации.

В статье содержатся положения, уточняющие интерпретацию результатов расчетов. Показан второй, ранее неизвестный способ получения решений теории упругости о распределении напряжений в полупространстве от линейной и полосовой нагрузки, представляющий научный и теоретический интерес.

### **Библиографический список**

1. Цытович Н.А. Механика грунтов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1963. – 636 с
2. Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения / под общ. ред. В.А. Ильичева и Р.А. Мангушева. – М.: Изд-во АСВ, 2014. – 728 с.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости: пер. с англ. / под. ред. Г.С. Шапиро. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 500 с.

### **References**

1. Tsytovich N.A. Mekhanika gruntov [Soil mechanics]. Moscow: Stroiizdat, 1963. 636 p.
2. Spravochnik geotekhnika. Osnovaniia, fundamenti i podzemnye sooruzheniia [Directory geotechnics. Bases, foundations and underground structures]. Ed. V.A. Il'ichev, R.A. Mangushev. Moscow: Assotsiatsiia stroitel'nykh vusov, 2014. 728 p.
3. Bezukhov N.I. Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti [Bases of theory of elasticity, plasticity and creep]. Moscow: Vysshiaia shkola, 1968. 512 p.

4. Timoshenko S.P., Gud'er G. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Ed. G.S. Shapiro. Moscow: Nauka, 1979. 500 p.

Получено 30.07.2015

### **Об авторе**

**Шапиро Давид Моисеевич** (Воронеж, Россия) – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительной механики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета (394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84, e-mail: davshap@mail.ru).

### **About the author**

**David M. Shapiro** (Voronezh, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Structural Mechanics, Voronezh State Architectural and Civil Engineering University (84, 20-years October street, Voronezh, 394006, Russian Federation, e-mail: davshap@mail.ru).