



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 4, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.01

УДК 539.3

ДИНАМИКА ГИБКОГО ВАЛА В ЖЕСТКОЙ ТРУБКЕ

А.К. Беляев, В.В. Елисеев, С.В. Калашников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

О СТАТЬЕ

Получена: 31 июля 2015 г.
Принята: 13 октября 2015 г.
Опубликована: 25 декабря 2015 г.

Ключевые слова:

гибкий вал, стержень Коссера, колебания и перескоки, метод стрельбы, дифференциально-разностный метод

АННОТАЦИЯ

Представлены уравнения и численные методы для расчета вращения гибкого вала в жесткой трубке. Вал рассматривается как стержень Коссера в самой общей постановке с произвольной зависимостью свойств от координаты. Также рассмотрено квазистатическое движение. Получены шесть уравнений равновесия для произвольно изогнутого и искривленного вала в трубке произвольной геометрии. Показано, что для описания вращения в трубке достаточно проекции уравнения моментов на касательную к криволинейной оси стержня. Это дифференциальное уравнение выражено в терминах угла поворота сечения. Решение для квазистатического вращения получено как аналитически, так и с помощью метода стрельбы для краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения. В работе получены зависимости углов поворота вала внутри жесткой трубки от осевой координаты. При некотором сочетании параметров возникают перескоки из одной конфигурации стержня в другую, природу которых невозможно объяснить в рамках квазистатического анализа. Для объяснения данной неустойчивости привлечена динамическая постановка. Нелинейная динамическая задача решена дифференциально-разностным методом, протестированным на модельной постановке, и продемонстрировано совпадение с аналитическим решением. Результатом решения динамической задачи явилось объяснение квазистатических перескоков. Динамическая постановка показала, что вместо квазистатического перескока на первом этапе вращения вала наблюдается плавное проворачивание, резко переходящее в интенсивные колебания. Также определены законы вращения при различных скоростях. Выявлено качественное различие статического и динамического решений. Созданная методика решения нелинейных динамических задач о вращении вала произвольной формы перспективна для моделирования процессов направленного глубокого бурения, актуального в задачах нефтедобычи.

© ПНИПУ

© **Беляев Александр Константинович** – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: vice.ipme@gmail.com
Елисеев Владимир Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, e-mail: yeliseyev@inbox.ru
Калашников Степан Вадимович – магистр, e-mail: kalash27@mail.ru

Alexander K. Belyaev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: vice.ipme@gmail.com
Vladimir V. Eliseev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, e-mail: yeliseyev@inbox.ru
Stepan V. Kalashnikov – Master, e-mail: kalash27@mail.ru

DYNAMICS OF FLEXIBLE SHAFT IN RIGID TUBE

A.K. Belyaev, V.V. Eliseev, S.V. Kalashnikov

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University, Saint-Petersburg, Russian Federation

ARTICLE INFO

Received: 31 July 2015
 Accepted: 13 October 2015
 Published: 25 December 2015

Keywords:

flexible shaft, Cosserat rod,
 vibrations, jumps,
 shooting method,
 differential-difference method

ABSTRACT

The paper is concerned with equations and numerical methods for calculation of flexible shaft rotation in a rigid tube. In the very general statement the shaft is represented as a Cosserat rod with an arbitrary dependence of properties on the coordinate. The quasi-static motion is considered in the first. Six equations of motion are obtained for the arbitrary bent and curved rod in the tube of arbitrary geometry. The projection of the equation of moments on the tangent to the curved axis of the rod is shown to be sufficient for describing the shaft motion. This differential equation is expressed in terms of the rotation angle of the rod cross-section. The solution for the quasi-static rotation is obtained both analytically and using the shooting method for boundary-value problem for an ordinary differential equation. The closed form expression for the angles of rotation of the shaft in the rigid tube as a function of the axial coordinates is obtained. The jumps occur for some combination of the parameters and they cannot be explained in the framework of quasi-static analysis. In order to explain the instability, the dynamics statement is applied. The nonlinear dynamic problem is solved by means of differential-difference method which is tested by a comparison with a closed form solution. Solution to the dynamic problem allows one to explain the quasi-static jumps obtained. The dynamic formulation shows that instead of quasi-static jumps the initial stage of rotation is a smooth rotation which jumps are abruptly replaced by intensive vibrations. The laws of rotation at different rotational velocities are determined too. The qualitative difference in the quasi-static and dynamic solutions is exposed. The suggested approach for solving nonlinear dynamic problems of rotation of the shaft with an arbitrary geometry is promising for modeling of processes of the directional deep drilling which is vital for the problems of oil production industry.

© PNRPU

Введение

Рассматривается задача о передаче вращения посредством гибкого вала [1–6]. Упругий стержень вставлен в жесткую трубку и приводится во вращение на одном конце (рис. 1). Даже при идеально гладкой внутренней поверхности трубки вращение ведомого конца может быть резко неравномерным. При квазистатическом рассмотрении с плавно возрастающим поворотом ведущего конца Θ_0 возможна своеобразная потеря устойчивости: $d\Theta_1/d\Theta_0 \rightarrow \infty$, где Θ_1 – поворот ведомого конца [1–8].

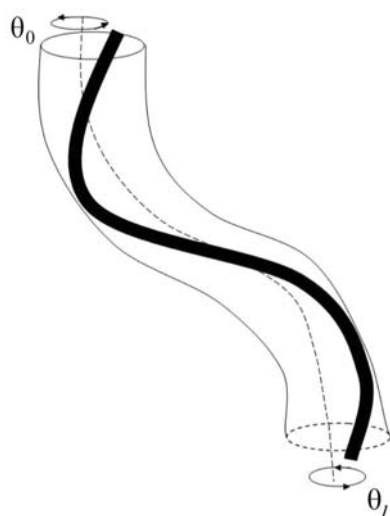


Рис. 1. Вал в трубке

Но особый интерес представляет задача в динамической постановке – в ней главная цель данной работы. Компьютерная математика в сочетании с современной теорией стержней [8, 9] позволяют рассмотреть и квазистатику, и динамику вращения при весьма произвольной форме трубки. Представляемые далее решения отличаются от работ [1–8] как подходом, так и результатами.

Помимо запросов приборостроения данная задача представляет практический интерес также в связи с техникой направленного глубокого и сверхглубокого бурения. В задачах нефтедобычи роль стержня и жест-

кой трубки играют соответственно бурильная колонна и скважина. Некоторое представление о динамике бурильной колонны, возникающих в ней крутильных вибрациях, а также методах борьбы с ними дают работы [10–14].

1. Уравнения теории стержней

В модели Коссера стержни представляются как материальные линии, частицы которых имеют степени свободы трансляции и поворота [8, 9, 15]. Движение определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(s, t)$ и тензором поворота $\mathbf{P}(s, t)$ как функциями материальной координаты и времени. При характерном для данной задачи вращении вокруг неподвижной оси вместо тензора \mathbf{P} можно рассматривать угол поворота $\theta(s, t)$. Внешними нагрузками на стержень являются распределенные сила и момент \mathbf{q}, \mathbf{m} ; внутренние взаимодействия выражаются векторами силы $\mathbf{Q}(s, t)$ и момента $\mathbf{M}(s, t)$. Система уравнений нелинейной механики упругих стержней имеет вид [8, 9]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' + \mathbf{q} &= \rho \ddot{\mathbf{r}}, \mathbf{M}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Q} + \mathbf{m} = (\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega})', \\ \mathbf{k} &= \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Omega}_0 = \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{r}' - \mathbf{P} \cdot \mathbf{r}'_0 = \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{Q}. \end{aligned} \quad (1)$$

Два первых уравнения выражают законы баланса импульса и момента импульса (с погонной массой ρ , тензором инерции \mathbf{I} и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$). Третье и четвертое уравнения – это соотношения упругости, связывающие векторы деформации $\mathbf{k}, \boldsymbol{\gamma}$ с силовыми факторами. Вектор \mathbf{k} определяет искривление и закручивание, а вектор $\boldsymbol{\gamma}$ – растяжение (сжатие) и поперечный сдвиг. Значком $(\dots)_0$ отмечаются величины в начальном состоянии. В соотношения упругости входят тензоры жесткости: \mathbf{a} – на изгиб и кручение, \mathbf{b} – на растяжение и сдвиг. Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ характеризует кривизну и кручение стержня: $\mathbf{a}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \boldsymbol{\Omega}$ (и аналогично с \mathbf{b}, \mathbf{I}). Для задания угловой ориентации в каждой частице стержня вводится тройка ортов \mathbf{e}_i : $\dot{\mathbf{e}}'_i = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{e}_i$, $\dot{\mathbf{e}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_i$. Направления \mathbf{e}_i считаются главными для тензора жесткости \mathbf{a} .

Тензоры жесткости находятся средствами теории упругости – из решения задачи Сен-Венана или же (что сложнее) из асимптотического анализа трехмерной задачи при малой толщине [8].

Ограничимся классической теорией стержней без растяжения и поперечного сдвига: $\boldsymbol{\gamma} \equiv 0, \mathbf{b} \rightarrow \infty$, а соотношение упругости для силы \mathbf{Q} отсутствует. Тогда координату s можно считать дуговой не только в начальном, но и в деформированном состоянии. Альтернативные подходы к записи исходных уравнений изложены в работах [16–18].

Тонкая криволинейная трубка как линия определяется радиусом-вектором $\mathbf{R}(s)$ как функцией дуговой координаты. Ниже приведены известные зависимости дифференциальной геометрии:

$$\mathbf{R}' = \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}' = k\mathbf{v} = \mathbf{D} \times \boldsymbol{\tau}, \mathbf{D} = T\boldsymbol{\tau} + k\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{\tau} \times \mathbf{v}, k = |\mathbf{R}''|, T = k^{-2} \mathbf{R}' \times \mathbf{R}'' \cdot \mathbf{R}'''. \quad (2)$$

Введены орты натурального триэдра: касательной $\boldsymbol{\tau}$, главной нормали \mathbf{v} и бинормали $\boldsymbol{\beta}$. Вектор Дарбу \mathbf{D} имеет компоненты k, T – кривизна и кручение кривой.

Радиусы-векторы трубки и стержня считаются совпадающими: $\mathbf{R}(s) \equiv \mathbf{r}(s, t)$. Примем, что $\mathbf{e}_3 \equiv \boldsymbol{\tau}$, а пара ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ повернута от $\mathbf{v}, \boldsymbol{\beta}$ на угол θ . Тогда по закону сложения угловых скоростей

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{D} + \theta' \boldsymbol{\tau} \Rightarrow \Omega_1 = k \sin \theta, \Omega_2 = k \cos \theta, \Omega_3 = T + \theta'. \quad (3)$$

При вращении стержня в трубке $\mathbf{R}(s), k(s), T(s)$ не зависят от времени, однако меняется угол $\theta(s, t)$. Вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}$, момент импульса $\mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega} = I \dot{\theta} \boldsymbol{\tau}$ (касательная считается главным направлением и для тензора инерции \mathbf{I}). До помещения в трубку вышеуказанные параметры имели следующие значения $\mathbf{R}_0, k_0, T_0, \theta_0$.

Для описания вращения в трубке достаточно проекции уравнения моментов из системы (1) на касательную:

$$M_3' + \Omega_1 M_2 - \Omega_2 M_1 + m_3 = I \ddot{\theta}.$$

Подставив выражения (3) в соотношения упругости $M_i = a_i(\Omega_i - \Omega_{i0})$, получим

$$\begin{aligned} a_3 \theta'' - I \ddot{\theta} = g(s, \theta, t) \equiv & -a_3(T - T_0 - \theta_0)' + \\ & + k^2 \frac{a_1 - a_2}{2} \sin 2\theta - k k_0 [a_1 \cos \theta \sin \theta_0 - a_2 \sin \theta \cos \theta_0] - m_3. \end{aligned} \quad (4)$$

Подчеркнуто волновое уравнение с нелинейным слагаемым без производных. Для гладкой трубки $m_3 = 0$, и правая часть уравнения (4) не содержит функций, явно зависящих от времени $\mathbf{R}_0, k_0, T_0, \theta_0$.

Граничные условия при заданных «входном» повороте и «выходном» моменте

$$\theta(0, t) = \Theta_0(t), M_3(l, t) = M_l(t) \Rightarrow \theta' = \theta_0' + T_0 - T + M_l/a_3. \quad (5)$$

Сложнее с начальными условиями, поскольку рассматривается вал, который уже находится в трубке. Начальная скорость нулевая, но конфигурация должна быть определена из соответствующей статической задачи. Очевидно, в этой задаче концы свободны и не нагружены – используем (5). Обозначив решение исходной статической задачи $\theta^*(s)$, придем к начальным условиям $\theta(s, 0) = \theta^*(s), \dot{\theta}(s, 0) = 0$.

Ввиду осевой симметрии сечения примем естественное допущение о равенстве изгибных жесткостей: $a_1 = a_2 = a$. И тогда можно считать $\theta_0(s) = 0$. Уравнение (4) упрощается:

$$a_3 \theta'' - I \ddot{\theta} = k k_0 a_2 \sin \theta - a_3(T' - T_0') \equiv f(s, \theta). \quad (6)$$

Кривизны и кручения могут быть произвольными функциями координаты.

Заметим, что для плоской кривой кручение равно нулю. В этом случае $\theta^* = 0$, и начальные условия в динамической задаче нулевые.

2. Квазистатическое вращение

Рассматриваем квазистатическое («медленное») вращение, тогда уравнение (4) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение и граничная задача принимает вид

$$a_3\theta'' = kk_0a_2 \sin \theta - a_3(T' - T_0') \equiv f(s, \theta), \theta(0) = \Theta_0, \theta'(l) = T_0 - T + M_1/a_3. \quad (7)$$

В простейшем случае без кручения и моментной нагрузки $f = kk_0a_2 \sin \theta, \theta'(l) = 0$.

При постоянных кривизнах имеем уравнение обращенного маятника, решаемое аналитически. Первый интеграл $a_3\theta'^2/2 + kk_0 \cos \theta = \text{const}$ дает уравнение первого порядка, интегрируемое в эллиптических функциях [1–8].

«Идеально равномерное» вращение, как видно из уравнения (7), будет при $k_0 = 0$, т.е. при прямолинейной начальной форме [1–8]. На рис. 2 представлены результаты расчета зависимости выходного угла Θ_l от входного Θ_0 для стальной трубы длиной 1 км с внешним диаметром 10,16 см и толщиной стенки 1 см (характерные параметры бурильной трубы). Рис. 2, а соответствует значениям кривизны $k = \pi/5000, k_0 = \pi/3000$ (м^{-1}) (дуги окружностей с углами $\pi/5, \pi/3$). В этом случае вращение передается почти равномерно. На рис. 2, б представлен случай увеличенных значений $k = \pi/2500, k_0 = \pi/1500$; при этом вращение резко неравномерное, с перескоками. Данные решения краевой задачи (7) получены в *Mathcad* методом стрельбы (*sbval-rkfixed*) [19].

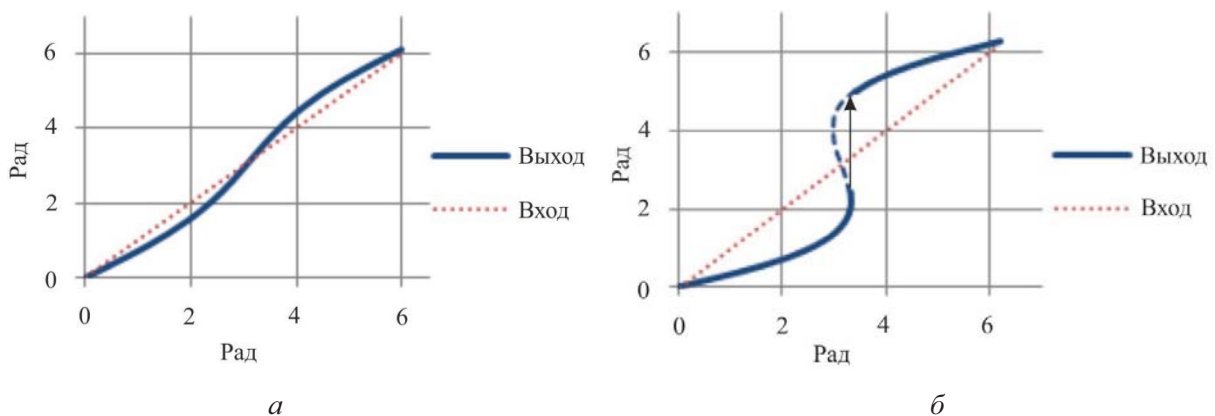


Рис. 2. Зависимость выходного угла от входного: а – без перескоков (малые или докритические кривизны); б – с перескоками (большие или закритические кривизны)

Не ограничиваясь результатами рис. 2, обратимся к зависимости $\theta(s)$ угла поворота от координаты. На рис. 3 представлено несколько последовательных состояний поворота сечений вала в зависимости от координаты, которые соответствуют диаграмме на рис. 2, б. При $\Theta_0 = 3,2$ наблюдаем единовременный перескок всей конфигурации закрученного вала.

Удивительно, что в задаче без перескоков (см. рис. 2, а) имеем нечто подобное. При малых начальных углах Θ_0 функция $\theta(s)$ убывает, а при больших – возрастает.

Разобраться в этих несколько неожиданных явлениях можно, если исследовать динамику вращения. Об этом далее.

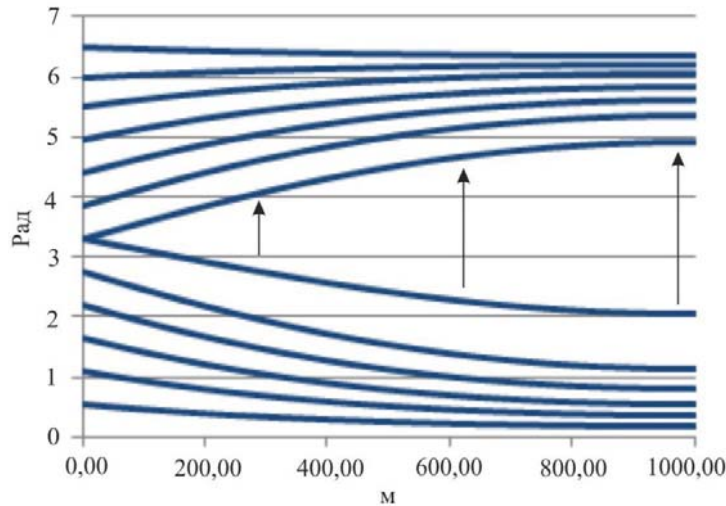


Рис. 3. Зависимости углов поворота вала от координаты $\theta(s)$. Перескок показан стрелками

3. Метод решения динамической задачи

Динамическая задача (6) будет решена дифференциально-разностным методом (ДР-методом), представляемым далее. Как первый шаг мы рассмотрим модельную граничную задачу для линейного уравнения, описывающего крутильные колебания,

$$\theta'' - \ddot{\theta} + f = 0; \theta(0, t) = \Theta_0 = t, \theta'(l, t) = F; \theta(x, 0) = 0, \dot{\theta}(x, 0) = 0. \quad (8)$$

Для получения аналитического решения применим метод разложения в ряд по собственным функциям [20]:

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \varphi_n(x), T_n = \int_0^l \theta \varphi_n dx,$$

где собственные функции являются решениями задачи Штурма-Лиувилля:

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0, \varphi(0) = 0, \varphi'(l) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{\pi}{2} (2n-1), \varphi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_n x; \int_0^l \varphi_k \varphi_n dx = \delta_{kn}.$$

Умножив уравнение (8) на $\varphi_n(x)$ и проинтегрировав, получим

$$(\theta' \varphi_n - \theta \varphi_n') \Big|_0^l + \int_0^l \theta \varphi_n'' dx - \ddot{T}_n + f_n = 0, \ddot{T}_n + \lambda_n^2 T_n = b_n \equiv f_n + F \varphi_n(l) + \Theta_0 \varphi_n'(0).$$

Эти обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) для $T_n(t)$ решаются с помощью интеграла Дюамеля: $T_n(t) = \lambda_n^{-1} \int_0^t b_n(\tau) \sin \lambda_n(t - \tau) d\tau$. При $f = 0, F = 0, \Theta_0 = t$ получим $T_n = \lambda_n^{-2} \varphi_n'(0)(t - \lambda_n^{-1} \sin \lambda_n t)$. Функция $\theta(l, t)$ представлена на рис. 4. Ряд сходится быстро; график построен для 500 членов.

Обратимся теперь к ДР-методу. Промежуток $0 \leq x \leq l$ разделим узлами на элементы одинаковой длины h и аппроксимируем θ'' . Из уравнения (8) получим

$$x_0 = 0, x_1 = h, \dots, x_{N+1} = l, \tag{9}$$

$$h^{-2}(\theta_{k+1} - 2\theta_k + \theta_{k-1}) - \ddot{\theta}_k + f_k = 0 \quad (k = 2, \dots, N-1).$$

Отдельно представим граничные условия:

$$\theta_0 = \Theta_0, h^{-1}(\theta_{N+1} - \theta_N) = F; \tag{10}$$

$$h^{-2}(\theta_2 - 2\theta_1 + \Theta_0) - \ddot{\theta}_1 - f_1 = 0, h^{-2}(hF - \theta_N + \theta_{N-1}) - \ddot{\theta}_N + f_N = 0.$$

Рассматриваем (9) и (10) как систему ОДУ порядка $2N$ и решаем в среде *Mathcad*: $Y = (v \ \theta)^T, \dot{Y} = H(t, Y)$. Функцию H задаем посредством *Add Program Line*. Начальные условия – нулевые. Система оказывается жесткой, поэтому применяем специальный метод *Radau*. Результаты вычислений показаны рис. 4; число узлов $N = 500$, число шагов по времени 1000. Полученное решение совпадает с нашими физическими представлениями о распространении волн с отражениями от концов.

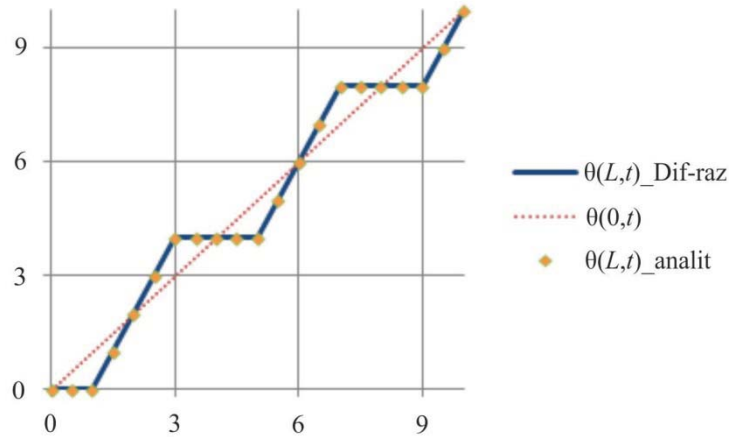


Рис. 4. Решение модельной граничной задачи

График точного решения методом собственных функций с числом членов ряда 500 также приведен на рис. 4. Визуально он полностью совпал с результатом по ДР-методу. Это свидетельствует об эффективности и точности метода.

4. Динамика вращения

Обратимся к нелинейной динамической задаче (6) и применим ДР-метод. Вал и трубка – как в случае рис. 2, б. Число узлов $N = 500$, шагов по времени 1000. Зависимость от времени выходного угла при $\Theta_0(t) = t$ представлена на рис. 5. Она радикально отличается от упрощенной «статической» версии (см. рис. 2, б) отсутствием перескоков.

Кроме того, интересно также привести зависимость распределения углов поворота вала по координате во времени (динамический аналог рис. 3).

Из рис. 6 хорошо видно, как изменяется конфигурация поворота сечений вала во времени – наблюдается колебательный характер, причем угол поворота на выходе иногда превышает угол поворота на входе.

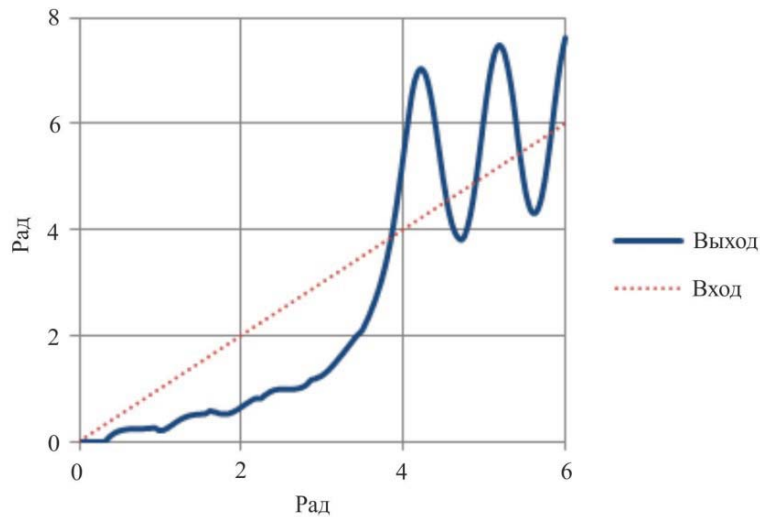


Рис. 5. Нелинейная динамика: углы на входе и выходе

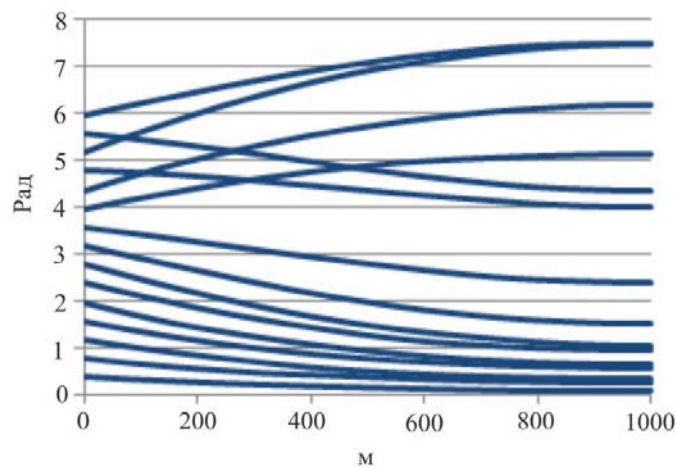


Рис. 6. Зависимости углов поворота вала от координаты $\theta(s)$

На рис. 7 представлены и другие результаты расчета – разности углов $\Theta_l(t) - \Theta_0(t)$ для четырех постоянных угловых скоростей $\dot{\Theta}_0$. Время процесса соответствует числу оборотов $N = 10$. При равномерном вращении на входе имеем колебания на выходе. Характер колебаний напоминает периодический со сложным спектральным составом. Качественных изменений с ростом скорости не видно. Амплитуда колебаний велика – порядка 4 рад.

Может сложиться впечатление об отсутствии какой-либо взаимосвязи не с квазистатическими результатами и перескоками. Но обратим внимание на начало графиков. Процесс за один оборот для случаев квазистатики и динамики показан на рис. 8 ($\dot{\Theta}_0 = 0,5$). Качественное изменение в процессе появляется примерно через пол-оборота – как в квазистатике. Однако вместо перескока видим переход плавного проворачивания, переходящий в интенсивные колебания.

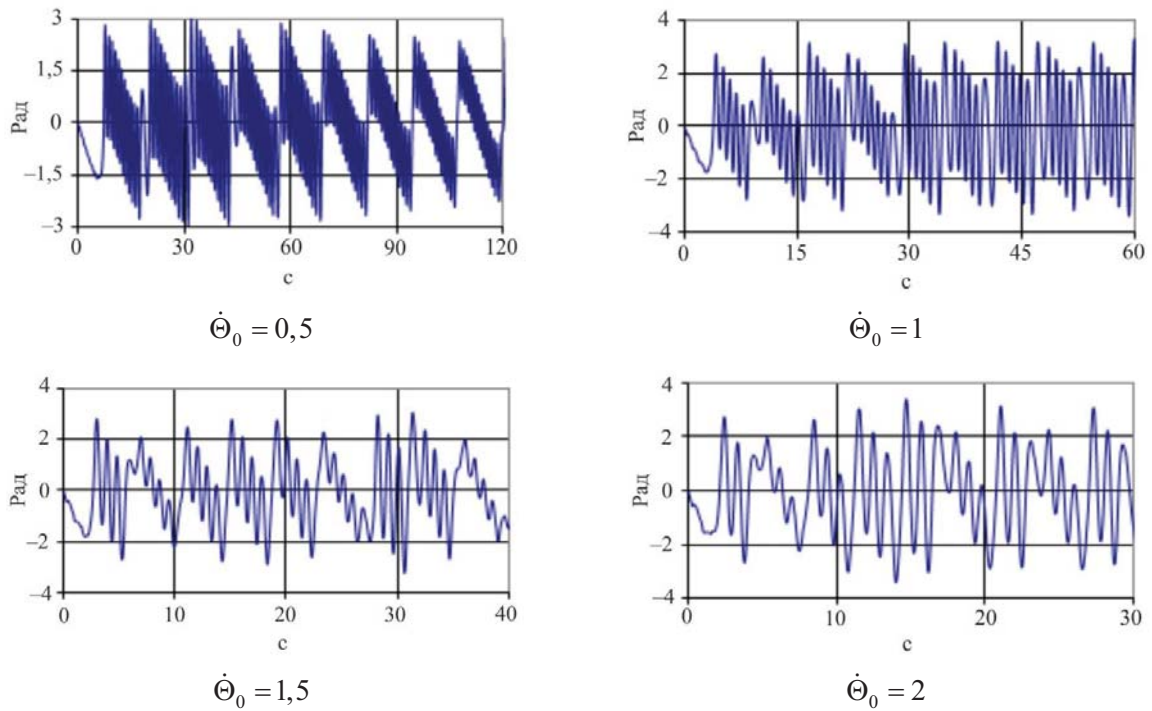


Рис. 7. Зависимость разности углов от времени при четырех значениях скорости

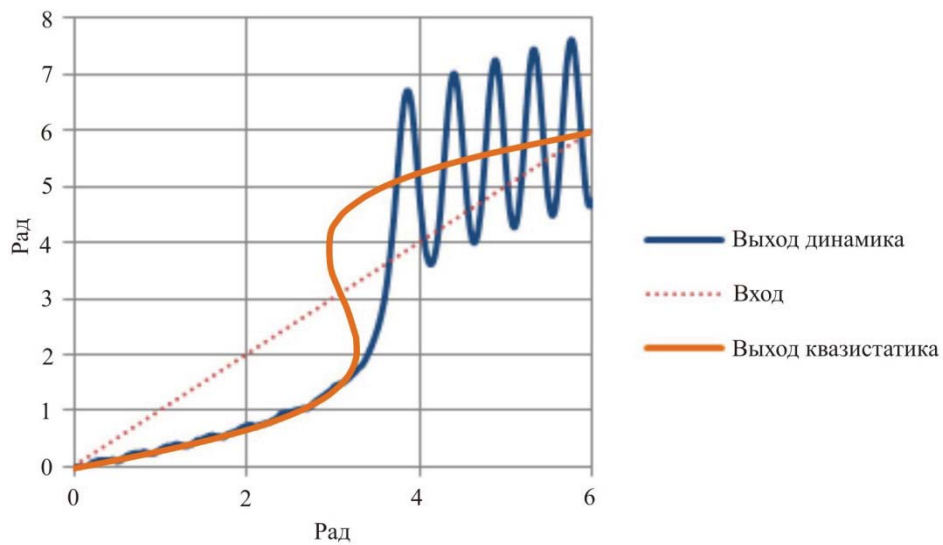


Рис. 8. Динамический аналог перескока

Подобные расчеты (ДР-методом) можно проводить для любых форм стержня и трубки, что может найти применение в математическом моделировании процессов бурения [10]. При этом форму скважины, например, можно задавать как аналитически, так и по точкам с интерполяцией и регрессией [19], вычисляя кривизну и кручение по формулам (2).

Выводы

Представлена нелинейная динамическая теория упругих стержней как линий Коссера и выведены уравнения вращения гибкого вала в жесткой трубке.

Рассмотрено квазистатическое поведение с нелинейными краевыми задачами для ОДУ, решаемыми методом стрельбы.

Разработан и протестирован численный дифференциально-разностный метод (ДР-метод).

Обнаружено качественное различие квазистатического и динамического решений задач о вращении вала в трубке.

Создана методика решения нелинейных динамических задач о вращении вала произвольной формы с перспективой моделирования процессов направленного глубокого бурения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-51-15001 АНФ_а).

Библиографический список

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих стержней. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
2. Елисеев В.В., Зиновьева Т.В. О передаче вращения посредством гибкого вала // Теория машин и механизмов. – 2005. – № 3. – С. 67–72.
3. Belyaev A.K. Dynamics of a buckled drillstring rotating in a curved oil wellbore // IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics. – Springer Netherlands, 1999. – P. 169–171.
4. Беляев А.К. Локальная неустойчивость вращения бурильной колонны // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. – 2008. – № 1. – С. 5–11.
5. Belyaev A.K. Example of instability in drive mechanisms // Advanced Dynamics and Model Based Control of Structures and Machines / eds. H. Irschik, A.K. Belyaev, M. Krommer. – Springer Wien New York, 2012.
6. Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1987. – 320 с.
7. Светлицкий В.А., Бондаренко Д.В. Устойчивость гибкого вала при медленном вращении в жестком канале // Вестник Моск. гос. техн. ун-та им. Н.Э. Баумана. Машиностроение. – 2006. – № 3. – С. 95–105.
8. Елисеев В.В. Механика деформируемого твердого тела. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 231 с.
9. Елисеев В.В. К нелинейной динамике упругих стержней // Прикладная математика и механика. – 1988. – Т. 52, № 4. – С. 635–641.
10. Юнин Е.К., Хегай В.К. Динамика глубокого бурения. – М.: Недра, 2004. – 286 с.
11. Kreuzer E, Steidl M. Controlling torsional vibrations of drill strings via decomposition of traveling waves // Arch. Appl. Mech. – 2012. – Vol. 82(4). – P. 515–531
12. Coupled axial-torsional dynamics in rotary drilling with state-dependent delay: stability and control / Xianbo Liu, Nicholas Vljajic, Xinhua Long, Guang Meng, Balakumar Balachandran // Nonlinear Dynamics. – 2014. – Vol. 78. – P. 1891–1906
13. Analysis of the torsional stability of a simplified drillstring / L.C. Cunha Lima, R.R. Aguiar, T.G. Ritto, S. Hbaieb // Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics. – Brazil, 2015.
14. Leine R.I., Campen D.H. van. Stick-slip whirl interaction in drillstrings dynamics // Journal of Vibration and Acoustic. – 2002. – Vol. 124(2). – P. 209–220.
15. Antman S. Nonlinear Problems of Elasticity. – N.Y.: Springer, 1995. – 750 p.
16. Жаркова Н.В., Никитин Л.В. Прикладные задачи динамики упругих стержней // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2006. – № 6. – С. 80–98.

17. Dynamic characteristics analysis of drill string in the ultra-deep well with spatial curved beam finite element / Yibao Hu, Qinfeng Di, Weiping Zhu, Zhanfeng Chen, Wenchang Wang // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2012. – Vol. 82–83. – P. 166–173.

18. Dasgupta S.S., Samantaray A.K., Bhattacharyya R. Stability of an internally damped non-ideal flexible spinning shaft // *International Journal of Non-linear Mechanics*. – 2010. – № 3 (45). – P. 286–293.

19. Кирьянов Д.В. Mathcad 14. – СПб.: БХВ-Петербург, 2007. – 704 с.

20. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

References

1. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Ustoichivost' i kolebaniia uprugikh sterzhnei* [Stability and oscillations of elastic systems]. Moscow: Nauka, 1979. 384 p.

2. Eliseev V.V., Zinov'eva T.V. O peredache vrashcheniia posredstvom gibkogo vala [On the transfer of rotation by a flexible shaft]. *Teoriia mashin i mekhanizmov*, 2005, no. 3, pp. 67-72.

3. Belyaev A.K. Dynamics of a buckled drillstring rotating in a curved oil wellbore. *IUTAM Symposium on New Applications of Nonlinear and Chaotic Dynamics in Mechanics*. Springer Netherlands, 1999, pp. 169-171.

4. Belyaev A.K. Lokal'naiia neustoichivost' vrashcheniia buril'noi kolonny [Local instability of rotation of the drill string]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*, 2008, no. 1, pp. 5-11.

5. Belyaev A.K. Example of instability in drive mechanisms. *Advanced Dynamics and Model Based Control of Structures and Machines*. Eds. Irschik H., Belyaev A.K., Krommer M. New York: Springer Wien, 2012.

6. Svetlitskii V.A. *Mekhanika sterzhnei. Ch. 1* [Mechanics rods: Part 1]. Moscow: Vysshiaia shkola, 1987. 320 p.

7. Svetlitskii V.A., Bondarenko D.V. Ustoichivost' gibkogo vala pri medlennom vrashchenii v zhestkom kanale [Stability of the flexible shaft is rotated slowly in a rigid channel]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni N.E. Baumana. Mashinostroenie*, 2006, no. 3, pp. 95-105.

8. Eliseev V.V. *Mekhanika deformiruемого твердого тела* [Fracture Mechanics]. Sankt-Peterburgskii politekhnicheskii universitet, 2006. 231 p.

9. Eliseev V.V. K nelineinnoi dinamike uprugikh sterzhnei [Nonlinear dynamics of elastic rods]. *Prikladnaia matematika i mekhanika*, 1988, vol. 52, no. 4, pp. 635-641.

10. Iunin E.K., Khagai V.K. *Dinamika glubokogo bureniia* [Dynamics of deep drilling]. Moscow: Nedra, 2004. 286 p.

11. Kreuzer E., Steidl M. Controlling torsional vibrations of drill strings via decomposition of traveling waves. *Arch. Appl. Mech.*, 2012, vol. 82(4), pp. 515-531.

12. Xianbo Liu, Nicholas Vljajic, Xinhua Long, Guang Meng, Balakumar Balachandran. Coupled axial-torsional dynamics in rotary drilling with state-dependent delay: stability and control. *Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 78, pp. 1891-1906

13. Cunha Lima L.C., Aguiar R.R., Ritto T.G., Hbaieb S. Analysis of the torsional stability of a simplified drillstring. *Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*. Brazil, 2015.

14. Leine R.I., van Campen D.H. Stick-slip whirl interaction in drillstrings dynamics. *Journal of Vibration and Acoustic*, 2002, vol. 124(2), pp. 209-220.

15. Antman S. *Nonlinear Problems of Elasticity*. N.Y.: Springer, 1995. 750 p.

16. Zharkova N.V., Nikitin L.V. Prikladnye zadachi dinamiki uprugikh sterzhnei [Applied problems in the dynamics of elastic rods]. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2006, no. 6, pp. 80-98.
17. Yibao Hu, Qinfeng Di, Weiping Zhu, Zhanfeng Chen, Wenchang Wang. Dynamic characteristics analysis of drill string in the ultra-deep well with spatial curved beam finite element. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2012, vol. 82-83, pp. 166-173.
18. Dasgupta S.S., Samantaray A.K., Bhattacharyya R. Stability of an internally damped non-ideal flexible spinning shaft. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 2010, no. 3 (45), pp. 286-293.
19. Kir'ianov D.V. Mathcad 14. Saint Petersburg: Piter, 2007. 704 p.
20. Koshliakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaia shkola, 1970. 712 p.