УДК 658.155

М.А. СЕВОДИН, Е.С. СМИРНОВА
Пермский государственный технический университет

О РОЛИ СПЕКУЛЯЦИЙ В УСТАНОВЛЕНИИ РАВНОВЕСНОЙ ЦЕНЫ

Рассмотрена «паутинообразная» модель баланса спроса и предложения. Показано, что в некоторых случаях появление спекуляций на рынке неустойчивую ситуацию переводит в устойчивую.

Для выяснения роли спекулятивных преимуществ присутствия спекулянтов на рынке в механизме установления равновесной цены обсудим сначала рынок одного товара и действующих на нем производителя и потребителя. Товар будем считать бесконечно дробимым и однородным, а вкусы потребителя и удельные издержки на производство единицы товара постоянными. Предположим, что зависимость спроса D на товар от цены p за единицу этого товара является убывающей функцией $D(p)$, а поступление товара на рынок характеризуется возрастающей функцией предложения $S(p)$. Для простоты рассуждений условимся считать, что $S(p)=0$, $0\le p \le p_{\min}$ и $D(p)=0$, $p \ge p_{\max}$.

Таким образом, мы предполагаем, что, если цена на товар выше некоторого значения $p_{\max}$, то спрос на товар полностью исчезает. Кроме того, если цены не достигли некоторого уровня $p_{\min}$ (можно считать, что цена $p_{\min}$ совпадает с удельными издержками на производство единицы товара), то товар не продается.

Состояние равновесия характеризуется равенством спроса и предложения

$$D(p) = S(p), \qquad (1)$$

причем в силу сделанных предположений уравнение (1) имеет единственное решение p^{o} , $p_{\min} \le p^{o} \le p_{\max}$. При этом p^{o} обычно называется равновесной ценой.

«Паутинообразная» модель [1], [2] заключается в реализации процесса «нащупывания» равновесной цены. Использование этой модели требует введения дискретного времени t (t = 0,1,…) и дополнительных предположений относительно рынка:

а) объем товара, поступающего на рынок в момент t, определяется ценой товара в момент $(t–1)$;

б) весь поставленный на рынок товар покупается, запасы товара невозможны.

При этих требованиях справедливо рекуррентное соотношение

$$D(p_t) = S(p_{t-1}), \tag{2}$$

которое задает последовательность значений цен (p_t), $t = 0,1,\ldots$, в моменты времени t, определяющие процесс «нащупывания». Если последовательность (p_t) сходится к p^{o}, то на рынке с течением времени устанавливается равновесная цена p^{o}. В случае, когда последовательность не сходится к p^{o}, считают положение на рынке неустойчивым.

Положим

$$\lambda = \left| \frac{p_t - p^{\text{o}}}{p^{\text{o}} - p_{t-1}} \right|. \tag{3}$$

Если для каждого t имеем $\lambda<1$, то последовательность (p_t) очевидно сходится к p^{o}. В противном случае сходимости нет.

Геометрически сказанное иллюстрирует рисунок.

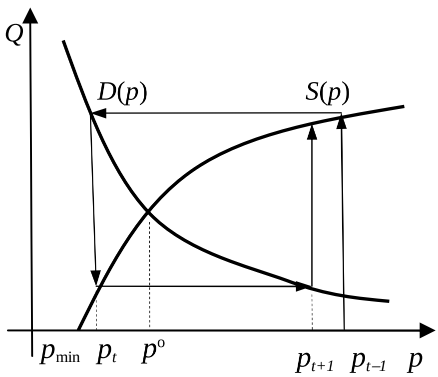

Рис. Скручивающаяся паутина

Изображенная на рисунке последовательность горизонтальных и вертикальных стрелок называется «паутиной». В данном случае мы видим «скручивающуюся паутину», т.е. последовательность (p_t) сходится к p^{o}.

На рисунке функция $D(p)$ выпуклая, а функция $S(p)$ – вогнутая. Если бы $S(p)$ была выпуклой функцией, то описанный процесс был бы расходящимся [1].

Случай, когда функции спроса и предложения являются линейными, т.е. и выпуклыми и вогнутыми одновременно, детально изучен в работе [3]. Если положить

$$D(p_t) = \begin{cases} A(p_{\max} - p),\ 0 \le p \le p_{\max}, \\ 0,\ \ p \ge p_{\max}, \end{cases}$$

$$S(p) = \begin{cases} 0,\ \ p \le p_{\min}, \\ B(p - p_{\min}),\ p \ge p, \end{cases}$$

то тогда по (3) получим $\lambda=B/A$. Здесь коэффициенты A и B считаются положительными. Таким образом, в линейном случае процесс может быть и сходящимся ($B<A$) и расходящимся ($B\geq A$). В последнем случае, как показано в [3], ситуацию в положительную сторону может изменить присутствие на рынке еще одного участника – спекулянта, который при понижении цены закупает Δ единиц товара (в [3] взято $\Delta=\gamma S(p_{t-1})$), т.е. выступает в роли дополнительного потребителя, и позже продает эти Δ единиц, выступая уже в роли поставщика. Предполагается, что эти функции может выполнять и сам производитель путем организации временного складирования части товара. Поэтому вместо равенства (2) требуется выполнение соотношений

$$D(p_t) + \Delta = S(p_{t-1}), \qquad p_{t-1} > p^{\circ}, \tag{4}$$

$$D(p_{t+1}) = \Delta + S(p_t), \qquad p_t < p^{\circ}. \tag{5}$$

Цель данной статьи – установить перечисленные выше эффекты в случае, когда спекулянт выбирает значение Δ в другом, отличном от предложенного в [3], виде. Будем считать, что с некоторым γ, $0\leq\gamma\leq 1$ выполняется равенство

$$\Delta = г(S(p_{t-1}) - D(p_{t-1})). \tag{6}$$

Такое определение авторам кажется более естественным: закупки и продажи пропорциональны разности между предложением и спросом. Более того, это позволит расширить область параметров, в которой полученные выводы будут справедливы.

Найдем γ, при которых цены на рынке будут стремиться к равновесным. Разумеется, что действия спекулянта считаются здесь соответствующими формулам (4), (5).

Прежде всего заметим, что в силу (1) выполняется следующее равенство

$$S(p_{t-1}) - D(p_{t-1}) = (A+B)p_{t-1} - Bp_{\min} - Ap_{\max} = (A+B)(p_{t-1} - p^{\circ}) \quad (7)$$

Теперь, пусть в момент t–1 справедливо неравенство $p_{t-1} > p^{\circ}$, тогда согласно неравенству $p_t < p^{\circ}$, вытекающему из (1), в следующий момент времени t происходит снижение цены. Спекулянт, ориентируясь на это снижение, закупает товар в объеме Δ. Эти рассуждения приводят к справедливости соотношения (4), что позволяет сравнить расстояния от p_t до p° и от p° до p_{t-1}. Имеем

$$\frac{p^{\circ} - p_t}{p_{t-1} - p^{\circ}} = \frac{p^{\circ} - p_t}{D(p^{\circ}) - D(p_t)} \frac{S(p^{o}) - S(p_{t-1}) + \Delta}{p_{t-1} - p^{\circ}} = \frac{B}{A} + \frac{p^{\circ} - p_t}{D(p^{\circ}) - D(p_t)} \frac{\Delta}{p_{t-1} - p^{\circ}} =$$

$$= \lambda + \left(-\frac{1}{A}\right) \frac{\gamma(S(p_{t-1}) - D(p_{t-1}))}{p_{t-1} - p^{\circ}} = \lambda - \frac{A+B}{A}\gamma = \lambda - (1+\lambda)\gamma. \quad (8)$$

Здесь мы использовали соотношения (4), (6), (7).

Таким образом, для того, чтобы выполнялись нужные нам условия $p_t < p^{\circ}$ и $p^{\circ} - p_t < p_{t-1} - p^{\circ}$, мы должны потребовать

$$0 < \lambda - (1+\lambda)\gamma < 1.$$

Очевидно, что последние неравенства равносильны неравенствам

$$\frac{\lambda - 1}{1+\lambda} < \gamma < \frac{\lambda}{1+\lambda}. \quad (9)$$

Переход от p_t к p_{t+1} обосновывается аналогично. Справедливыми при этом оказываются соотношения (5), (6), (7), (8), используя которые получим

$$\frac{p_{t+1}-p^{o}}{p^{o}-p_{t}}=\frac{p_{t+1}-p^{o}}{D(p_{t+1})-D(p^{o})}\frac{S(p_{t})+\Delta-S(p^{o})}{p^{o}-p_{t}}=\frac{B}{A}+\left(-\frac{1}{A}\right)\frac{\Delta}{p^{o}-p_{t}}=$$
$$=\lambda-\frac{\Delta}{A(p_{t-1}-p^{o})}\frac{p_{t-1}-p^{o}}{p^{o}-p_{t}}=\lambda-\frac{1}{A}\frac{\gamma(S(p_{t-})-D(p_{t-1}))}{p_{t-1}-p^{o}}\frac{p_{t-1}-p^{o}}{p^{o}-p_{t}}=$$
$$=\lambda-\frac{A+B}{A}\gamma\frac{1}{\lambda-(1+\lambda)\gamma}=\frac{\lambda^{2}-(1+\lambda)^{2}\gamma}{\lambda-(1+\lambda)\gamma}.$$

Итак, неравенства $p_{t+1}>p^{o}$ и $p^{o}-p_{t+1}<p_{t}-p^{o}$ имеют место, если

$$0<\frac{\lambda^{2}-(1+\lambda)^{2}\gamma}{\lambda-(1+\lambda)\gamma}<1.$$

Так как мы можем считать, согласно (9), положительным значение $\lambda-(1+\lambda)\gamma$, то последние неравенства равносильны соотношениям

$$\frac{\lambda-1}{1+\lambda}<\gamma<\frac{\lambda^{2}}{(1+\lambda)^{2}}. \qquad (10)$$

При любых λ, λ>0, очевидно имеет место

$$\frac{\lambda^{2}}{(1+\lambda)^{2}}<\frac{\lambda}{1+\lambda},$$

и поэтому (9), (10) справедливы, если

$$\frac{\lambda-1}{1+\lambda}<\gamma<\frac{\lambda^{2}}{(1+\lambda)^{2}}. \qquad (11)$$

Итак, если γ из (6) удовлетворяет соотношениям (11), то $p_{t}<p^{o}<p_{t+1}<p_{t-1}$ и «паутина» скручивается, т.е. цены товара на рынке приближаются к равновесной цене.

Конечно, здесь еще что-то должно заставлять спекулянта действовать так, чтобы в конечном итоге число γ оказалось в интервале из (11). Мотивацией таких действий оказывается (см. [3]) максимизация спекулянтом своей прибыли, которую мы обозначим через $\pi(\gamma)$. Сама прибыль, очевидно, равна

$$\pi(\gamma) = \Delta(p_{t+1} - p_t)\,.$$

Для нахождения максимального значения прибыли выполним следующие преобразования

$$\pi(\gamma) = \Delta(p_{t+1} - p_t) = \Delta(p_{t-1} - p^{\circ})\frac{p^{\circ} - p_t}{p_{t-1} - p^{\circ}}\left(\frac{p_{t+1} - p^{\circ}}{p^{\circ} - p_t} + 1\right) =$$

$$= \gamma(A + B)(p_{t-1} - p^{\circ})^2(\lambda - (1+\lambda)\gamma)\left(\frac{\lambda^2 - (1+\lambda)^2\gamma}{\lambda - (1+\lambda)\gamma} + 1\right) =$$

$$= \gamma(A + B)(p_{t-1} - p^{\circ})^2(\lambda + 1)(\lambda - (2+\lambda)\gamma).$$

Таким образом, прибыль $\pi(\gamma)$ как функция аргумента γ оказывается параболой с ветвями, направленными вниз. Поэтому максимальное значение $\pi(\gamma)$ достигается в точке

$$\text{г}^{\circ} = \frac{\lambda}{2(2+\lambda)}\,.$$

Нам остается заметить, что γ° окажется в нужном нам интервале (11), если $\lambda \in (0;(-1+\sqrt{17})/2)$, что лучше, чем в работе [3].

Итак, мы обосновали следующее утверждение. Пусть на рынке с $\lambda \in (0;(-1+\sqrt{17})/2)$ в момент $(t\text{–}1)$ цена товара p_{t-1} оказалась выше равновесной. Тогда закупка спекулянтом в момент t товара объемом Δ из (6) с целями продажи этой партии в момент $(t+1)$ по цене p_{t+1} и максимизации своей прибыли при этой операции обеспечивает приближение по сравнению ценой с p_{t-1} цены p_{t+1} к равновесной цене p°.

В заключение отметим следующее. В проведенных рассуждениях мы нигде не пользовались условием $\lambda \geq 1$, при котором положение на рынке неустойчиво. Поэтому при $\lambda < 1$ естественно ожидать, что появление спекулянта на рынке тоже окажется полезным в том смысле, что приближение к равновесным ценам окажется более быстрым. Это действительно так, что следует из приведенных ниже формул.

При наличии спекулянта мы имеем

$$p_{t+1} - p^{\circ} = \frac{p_{t+1} - p^{\circ}}{p^{\circ} - p_t}\frac{p^{\circ} - p_t}{p_{t-1} - p^{\circ}}(p_{t-1} - p^{\circ}) = (\lambda^2 - (1+\lambda)^2\gamma)(p_{t-1} - p^{\circ})\,,$$

а в случае отсутствия спекулянта на рынке

$$p_{t+1} - p^{\circ} = \lambda^2(p_{t-1} - p^{\circ})\,,$$

т.е. разность $p_{t+1} - p^{\circ}$ в первом случае меньше, чем во втором.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08-01-00-163).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Калемаев В.А. Математическая экономика: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 240 с.
2. Самуэльсон П. Экономика. – Т.2. – М.: НПО АЛГОН ВНИИСИ, 1993.
3. Стронгин Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения: учеб. – М.: Интернет-Университет Информационных Технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 207 с.