



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.09

УДК 539.4+539.37

## НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТРЕХСЛОЙНЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН, ОПЕРТЫХ ПО ВНУТРЕННЕМУ КОНТУРУ

**Т.П. Романова**

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,  
Новосибирск, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 22 июня 2015 г.  
Принята: 19 августа 2015 г.  
Опубликована: 30 сентября 2015 г.

#### Ключевые слова:

жесткопластическая модель,  
железобетон,  
угловое армирование,  
трехслойная пластина,  
внутренняя опора,  
отверстие,  
предельная нагрузка,  
оптимальное расположение опоры

### АННОТАЦИЯ

В рамках модели идеального жесткопластического тела построено точное решение задачи изгиба трехслойных железобетонных кольцевых пластин, имеющих разную структуру углового армирования в верхнем и нижнем слое. Средний слой пластины выполнен из бетона. Пластины шарнирно оперты по круговому контуру, расположенному внутри области пластины. Внешний и внутренний контуры пластин являются свободными. Пластины находятся под действием нагрузки, равномерно распределенной по поверхности. Условие пластичности в плоскости главных моментов, построенное на основе структурной модели композита, имеет вид прямоугольника типа условия Йогансена (Johansen). Учтено, что прочность бетона на растяжение намного меньше, чем на сжатие. Показано, что в зависимости от расположения внутреннего опорного контура возможны четыре схемы предельного деформирования пластины. Для каждой из схем определено условие ее реализации. Определены поля главных моментов и скорости прогибов пластины при различных расположениях опорного контура. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки. Получены и численно решены алгебраические уравнения, которые определяют оптимальное расположение опорного контура, соответствующее наибольшему значению предельной нагрузки пластины и, следовательно, наименьшей ее повреждаемости при различном армировании. Показано, что оптимальному расположению опоры соответствует образование на ней пластического шарнира. Решена задача по определению оптимальной толщины верхнего слоя пластины, соответствующей наибольшей предельной нагрузке при заданной суммарной толщине армированных слоев. Показано, что расположение опорного контура влияет на оптимальные соотношения толщин верхнего и нижнего слоев. Приведены численные примеры при различных структурах армирования.

© ПНИПУ

© Романова Татьяна Павловна – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, e-mail: lab4nemir@gmail.com

Tatiana P. Romanova – Ph.D. in Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, e-mail: lab4nemir@gmail.com

## CARRYING CAPACITY AND OPTIMIZATION OF THREE-LAYER REINFORCED CONCRETE ANNULAR PLATE, SUPPORTED ON THE INTERNAL CONTOUR

T.P. Romanova

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Siberian Branch  
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 22 June 2015  
Accepted: 19 August 2015  
Published: 30 September 2015

#### Keywords:

rigid-plastic model, reinforced concrete, corner reinforcement, three-layer plate, internal support, hole, limit load, optimal location of support

### ABSTRACT

Within the model of an ideal rigid-plastic body the exact solution is obtained for the problem of bending of three-layer reinforced concrete annular plates having different angular structure reinforcement at the top and bottom layers. The middle layer of the plate is made of concrete. The plates are hinge supported along the annular contour located within the area of the plate. External and internal contours of the plates are free. The plates are under load uniformly distributed over the surface of the plate. The condition of plasticity for the main moments, based on a structural model of the composite, has the form of a rectangle of type Johansen condition. It is taken into account that the strength of concrete in tension is much less than in compression. It is shown that there are four schemes of limit deformation of the plate, depending on the location of the internal support. The conditions of implementation are defined for all schemes. The main moments and the velocities of the deflections of the plate are defined at different locations of the internal support. The simple analytic expressions are obtained for the limit load. The optimal location of support is determined. The optimal support is a support at which the plate has a maximum limit load. It is shown that the optimal position of the support corresponds to the formation of plastic hinge on it. The problem is solved to determine the optimal thickness of the top layer of the plate corresponding to the maximum limit load for a given total thickness of the reinforced layers. It is shown that the location of the support affects the optimal thickness ratio of the upper and lower layers. Numerical examples are given for different structures of reinforcement.

© PNRPU

---

### Введение

Железобетонные конструкции являются базой современной строительной индустрии. Необходимость оценки несущей способности элементов железобетонных конструкций возникает при проектировании новых и реконструкции существующих строительных объектов. В [1] представлен обзор современных методов расчета прочности железобетонных плит перекрытий, работающих в двух направлениях. В [2] в рамках модели идеального жесткопластического тела с использованием структурных соотношений для композита построено условие пластичности в плоскости главных моментов и получено точное решение динамической задачи по определению предельной нагрузки и остаточных прогибов шарнирно опертой по внешнему контуру круглой трехслойной железобетонной пластины при различных характеристиках углового армирования, с центральной жесткой вставкой, под действием равномерно распределенной по поверхности нагрузки взрывного типа. При этом учитывалось, что прочность бетона при растяжении невелика и составляет от  $1/8$  до  $1/20$  (высокие марки) от прочности бетона при сжатии [3]. В связи с тем что в современных конструкциях существует значительная свобода выбора архитектурно-планировочных решений, в том числе и свобода размещения опор [4], в предлагаемой работе основное внимание уделяется вычислению предельных нагрузок трехслойных железобетонных кольцевых пластин при различных характеристиках углового армирования и различном расположении опорного кругового контура внутри области пластины, а также определению его оптимального расположения. В литературе точные решения для жесткопластических армированных пластин, опертых по контуру, расположенному внутри

области пластины, не известны. В случае однородного материала в работе [5] методом предельного равновесия определена предельная нагрузка для круглой пластины, опертой на  $n$  точек, расположенных симметрично на окружности. В [6] найдено оптимальное расположение дополнительной внутренней круговой опоры для шарнирно опертой, защемленной и свободной на контуре круглой пластины под действием начального импульса при предположении, что на опорном контуре образуется пластический шарнир. В [7, 8] методом предельного равновесия для железобетонных квадратных и прямоугольных плит находится оптимальное размещение колонн, которые рассматриваются как точечные опоры. Вопросы оптимального расположения опор для однородных упругих и упруго-пластических балок, круглых и прямоугольных пластин рассматриваются в [9–15]. Оптимальное расположение полигональных внутренних опор к однородным жесткопластическим круглым, одно- и двусвязным полигональным пластинам определено в [16, 17] методом предельного равновесия.

### 1. Условие пластичности и закон пластического течения

Рассмотрим в полярных координатах  $(r, \varphi)$  круглую железобетонную пластину с центральным круглым свободным отверстием с контуром  $L_0$ , шарнирно опертую по внутреннему круговому контуру  $L_1$ , при воздействии нагрузки, равномерно распределенной по поверхности пластины. Внешний контур пластины  $L_2$  свободный (рис. 1). Окружности  $L_0$ ,  $L_1$  и  $L_2$  – концентрические; их радиусы равны  $R_0$ ,  $R_1$  и  $R_2$  ( $0 \leq R_0 \leq R_1 \leq R_2$ ).

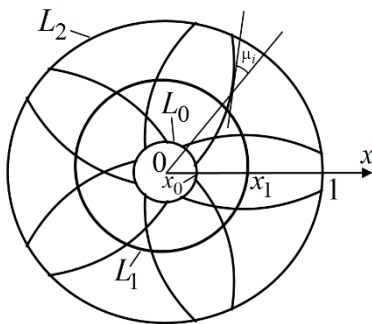


Рис. 1. Кольцевая армированная пластина, шарнирно опертая по внутреннему круговому контуру  $L_1$

Пластина состоит из трех различных слоев. Верхний  $I_1$  и нижний  $I_2$  слои пластины содержат по толщине большое количество армированных слоев и связующих их изотропных прослоек, описываемых моделью идеального жесткопластического материала с условием пластичности для бетона типа модифицированного условия Треска для материала, по-разному сопротивляющегося растяжению и сжатию. Считается, что волокна арматуры деформируются, как одномерные элементы, и располагаются в виде двух семейств криволинейных траекторий, симметричных относительно радиуса (угловое армирование), причем армирование в верхнем и нижнем слое различное. Средний слой пластины выполнен из бетона.

Пусть  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{M}_2$  – радиальный и окружной изгибные моменты;  $m_1$ ,  $m_2$  – их безразмерные значения;  $k\sigma_0$  и  $\sigma_0$  – пределы текучести связующего материала (бетона) на растяжение и сжатие ( $0 < k \leq 1$ );  $s_i^a$  – предел текучести материала арматуры в слое  $I_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\mu_i$  – угол армирования угловых волокон в области  $I_i$ ;  $\omega_i(x)$ ,  $\omega_{i0}$  – плотность армирования угловых волокон в области  $I_i$  и ее значение при  $x = x_0$ ;  $\bar{\delta}_1$  и  $\bar{\delta}_2$  – толщины верхнего и нижнего слоев пластины;  $\bar{w}$  – прогиб;  $\bar{t}$  – время;  $H$  – толщина пластины;  $\kappa_1$ ,

$\kappa_2$  – главные скорости кривизны поверхности пластины (безразмерные);  $\sigma_0^0, H_0, t_0$  – параметры обезразмеривания,

$$s = \sigma_0 / \sigma_0^0, \quad m_i = \bar{M}_i / M_0^0, \quad M_0^0 = \sigma_0^0 H_0^2 / 4, \quad s_i = s_i^a / \sigma_0^0, \quad \delta_i = \bar{\delta}_i / H_0,$$

$$\omega_{i1} = 2\omega_i \cos^2 \mu_i, \quad \omega_{i2} = 2\omega_i \sin^2 \mu_i \quad (i=1,2), \quad h = H / H_0, \quad \mu_{i0} = \mu_i(x_0),$$

$$\kappa_1 = -v'', \quad \kappa_2 = -v' / x, \quad x = r/R_2, \quad x_j = R_j / R_2 \quad (j=0,1), \quad v = (H_0 / R_2)^2 w, \quad w = \bar{w} / H_0,$$

$$(*)' = \partial(*) / \partial x, \quad (\dot{*}) = \partial(*) / \partial t, \quad t = \bar{t} / t_0.$$

Величина безразмерного предела текучести связующего (бетона)  $s$  не зависит от координаты  $x$ , а величины безразмерных пределов текучести арматуры в верхнем и нижнем слоях  $s_1, s_2$  в общем случае могут быть функциями от  $x$ .

Для возможных вариантов структур углового армирования плотность армирования одного семейства волокон  $\omega_i(x)$  ( $i=1,2$ ) определяется следующими соотношениями [18] (при армировании волокнами постоянного сечения):

а) спирали Архимеда

$$\omega_i(x) = \omega_{i0} \sqrt{x_0^2 + (xtg\mu_i)^2} / (x\sqrt{1 + tg^2\mu_i}), \quad tg\mu_i = (xtg\mu_{i0}) / x_0; \quad (1)$$

б) логарифмические спирали

$$\omega_i(x) = \omega_{i0} x_0 / x, \quad \mu_i(x) = \mu_{i0} = \text{const}; \quad (2)$$

в) “спицы велосипеда”

$$\omega_i(x) = \omega_{i0} x_0 \cos \mu_{i0} / \sqrt{x^2 - (x_0 \sin \mu_{i0})^2}, \quad \sin \mu_i = x_0 \sin \mu_{i0} / x. \quad (3)$$

В работе [2] на основе структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах и в рамках жесткопластического анализа получено, что условие пластичности в плоскости главных моментов для рассматриваемой трехслойной железобетонной пластины имеет форму восьмиугольника. При разных значениях параметров бетона и арматуры этот восьмиугольник может вырождаться в шестиугольник или четырехугольник. При малых значениях величины  $k$  ( $k \leq 1/15$ ) восьмиугольник становится практически четырехугольником. Поэтому для простоты анализа для трехслойной круглой пластины можно считать, что условие пластичности в плоскости главных моментов имеет вид прямоугольника  $ABCD$  типа условия Йогансена, изображенного на рис. 2 где:

$$\text{режим } AB : m_2 = a_2(x), \quad (\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 > 0);$$

$$\text{режим } BC : m_1 = -a_3(x) \quad (\kappa_2 = 0, \quad \kappa_1 < 0);$$

$$\text{режим } CD : m_2 = -a_4(x) \quad (\kappa_1 = 0, \quad \kappa_2 < 0);$$

$$\text{режим } AD : m_1 = a_1(x) \quad (\kappa_2 = 0, \quad \kappa_1 > 0);$$

$$a_1 = 2 \{ k s h^2 + \delta_1^2 (2 s \omega_1 - s_1 \omega_{11}) - \delta_2 (2 h - \delta_2) (2 k s \omega_2 - s_2 \omega_{21}) - [k s h + \delta_1 (2 s \omega_1 - s_1 \omega_{11}) - \delta_2 (2 k s \omega_2 - s_2 \omega_{21})]^2 / [(k+1) s] \}; \quad (4)$$

$$a_2 = 2 \{ k s h^2 + \delta_1^2 (2 s \omega_1 - s_1 \omega_{12}) - \delta_2 (2 h - \delta_2) (2 k s \omega_2 - s_2 \omega_{22}) - [k s h + \delta_1 (2 s \omega_1 - s_1 \omega_{12}) - \delta_2 (2 k s \omega_2 - s_2 \omega_{22})]^2 / [(k+1) s] \}; \quad (5)$$

$$a_3 = 2 \{ s h^2 + \delta_1^2 (2 k s \omega_1 - s_1 \omega_{11}) - \delta_2 (2 h - \delta_2) (2 s \omega_2 - s_2 \omega_{21}) - [s h + \delta_1 (2 k s \omega_1 - s_1 \omega_{11}) - \delta_2 (2 s \omega_2 - s_2 \omega_{21})]^2 / [(k+1) s] \}; \quad (6)$$

$$a_4 = 2 \{ s h^2 + \delta_1^2 (2 k s \omega_1 - s_1 \omega_{12}) - \delta_2 (2 h - \delta_2) (2 s \omega_2 - s_2 \omega_{22}) - [s h + \delta_1 (2 k s \omega_1 - s_1 \omega_{12}) - \delta_2 (2 s \omega_2 - s_2 \omega_{22})]^2 / [(k+1) s] \}. \quad (7)$$

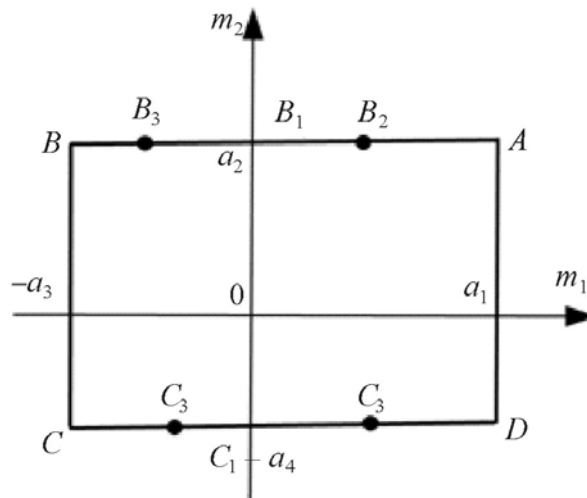


Рис. 2. Условие пластичности в форме прямоугольника для трехслойной железобетонной пластины

Поскольку пределы текучести арматуры  $s_i$  ( $i = 1, 2$ ) намного больше предела текучести связующего  $s$ , то  $a_j(x) > 0$  ( $j = 1 - 4$ ). Считаем, что  $a_j(x)$  являются гладкими функциями.

## 2. Определение моментов, предельной нагрузки и скоростей

Уравнения равновесия круглой пластины имеют вид

$$(x m_1)' - m_2 = x q, \quad (8)$$

$$(x q)' = -x p, \quad (9)$$

$$q = \bar{Q} R_2 / M_0^0, \quad p = \bar{P} R_2^2 / M_0^0,$$

где  $\bar{Q}$  – перерезывающая сила;  $\bar{P}$  – нагрузка, распределенная по поверхности пластины. В случае расположения опорного контура на внешнем контуре пластины ( $x_1 = 1$ ) при де-

формировании на границе отверстия при  $x = x_0$  реализуется режим  $B_1$ , при котором  $m_2(x_0) = a_2(x_0)$ ,  $m_1(x_0) = 0$  (см. рис. 2). На отрезке  $x_0 \leq x \leq 1$  реализуется пластическое состояние  $B_1 - B_2 - B_1$ , при котором, с учетом ассоциированного закона течения, имеем

$$m_2(x) = a_2(x), \dot{v}'' = 0, 0 \leq m_1(x) < a_1(x), m_1(x_0) = m_1(1) = 0.$$

Пусть опорная окружность смещена от внешнего контура пластины немного внутрь ее ( $x_{12} \leq x_1 \leq 1$ ; значение  $x_{12}$  определим ниже). Назовем возникающую при этом схему деформирования схемой 1. Поскольку пластина шарнирно оперта на внутренней опоре, то окружность  $x = x_1$  является промежуточным шарниром, на котором справедливо неравенство  $-a_3(x_1) < m_1(x_1) \leq 0$  и перерезывающие силы терпят разрыв. На отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$  реализуется пластическое состояние  $B_1 - B_2 - B_3$ , при котором

$$m_2(x) = a_2(x), \dot{v}'' = 0, m_1(x_1) \leq m_1(x) \leq a_1(x), m_1(x_1) \leq 0, m_1(x_0) = 0, \quad (10)$$

а на отрезке  $x_1 \leq x \leq 1$  реализуется пластическое состояние  $B_3 - B_1$ , при котором

$$m_2(x) = a_2(x), \dot{v}'' = 0, m_1(x_1) \leq m_1(x) \leq 0, m_1(x_1) \leq 0, m_1(1) = 0. \quad (11)$$

Из уравнения  $\dot{v}'' = 0$  при учете равенства нулю скоростей прогибов пластины на опорном контуре  $x = x_1$  получим распределение скоростей прогибов в пластине при схеме 1 (рис. 3, а):

$$\dot{v} = \dot{v}_0(x_1 - x) / (x_1 - x_0) \text{ при } x_0 \leq x \leq 1,$$

где  $\dot{v}_0$  – безразмерная скорость прогиба контура свободного отверстия  $L_0$ .

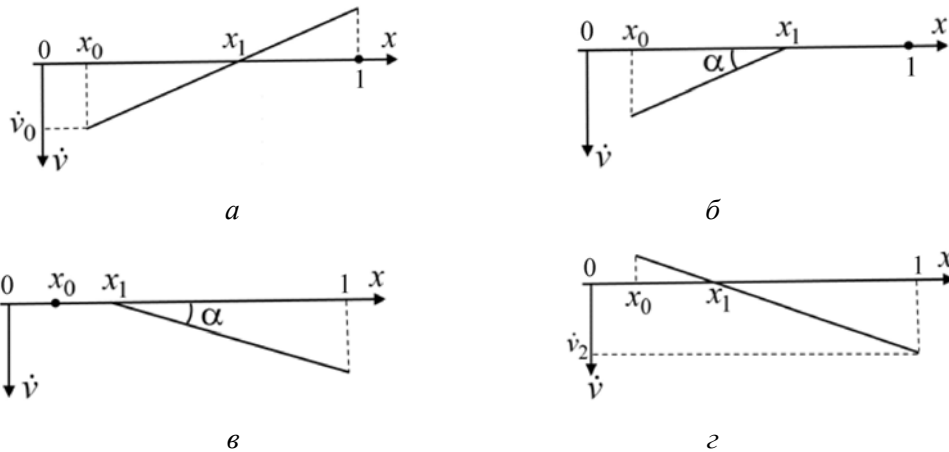


Рис. 3. Скорости прогибов пластины: а – схема 1; б – схема 2; в – схема 3; г – схема 4

Из (8)–(10) при  $x_0 \leq x \leq x_1$ , учитывая, что  $q(x_0) = 0$ , имеем

$$xq(x) = x_0q(x_0) - p \int_{x_0}^x y dy = -p(x^2 - x_0^2) / 2; \quad (xm_1)' = a_2(x) - p(x^2 - x_0^2) / 2,$$

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_{x_0}^x a_2(y) dy - \frac{p}{6} (x - x_0)^2 \left( 1 + 2 \frac{x_0}{x} \right). \quad (12)$$

При  $x_1 \leq x \leq 1$ , учитывая, что на свободном контуре  $q(1) = 0$ , из (8), (9), (11) получим

$$xq(x) = -p \int_1^x y dy = -p(x^2 - 1)/2; \quad (xm_1)' = a_2(x) - p(x^2 - 1)/2;$$

$$m_1(x) = -\frac{1}{x} \int_x^1 a_2(y) dy - \frac{p}{6} \left( x^2 - 3 + 2 \frac{1}{x} \right). \quad (13)$$

Из равенства  $m_1(x_1 - 0) = m_1(x_1 + 0)$  и (12), (13) получим предельную нагрузку  $p_{01}$  для схемы 1:

$$p_{01} = \frac{6}{(1 - x_0)[3x_1(1 + x_0) - 2(1 + x_0 + x_0^2)]} \int_{x_0}^1 a_2(x) dx. \quad (14)$$

Подставляя значение  $p = p_{01}$  в (12), (13), получим распределение в пластине радиального момента  $m_1(x)$ :

$$m_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x a_2(y) dy - \frac{(x - x_0)^2 (x + 2x_0)}{x(1 - x_0)[3x_1(1 + x_0) - 2(1 + x_0 + x_0^2)]} \int_{x_0}^1 a_2(x) dx; & x_0 \leq x \leq x_1, \\ -\frac{1}{x} \int_x^1 a_2(y) dy - \frac{(1 - x)^2 (x + 2)}{x(1 - x_0)[3x_1(1 + x_0) - 2(1 + x_0 + x_0^2)]} \int_{x_0}^1 a_2(x) dx; & x_1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Из анализа выражения (15) следует, что  $m_1(x)$  достигает своего минимального значения при  $x = x_1$ . При условии  $m_1(x_1) = -a_3(x_1)$  на опоре образуется пластический шарнир. Откуда следует, что схема 1 реализуется для значений  $x_1$  в интервале  $x_{12} \leq x_1 \leq 1$ , где  $x_{12}$  определяется из уравнения  $m_1(x_{12}) = -a_3(x_{12})$ , которое с учетом (15) при  $x = x_1 = x_{12}$  имеет вид

$$a_3(x_{12})x_{12} - \frac{(1 - x_{12})^2 (x_{12} + 2)}{(1 - x_0)[3x_{12}(1 + x_0) - 2(1 + x_0 + x_0^2)]} \int_{x_0}^1 a_2(x) dx = \int_{x_{12}}^1 a_2(y) dy. \quad (16)$$

При радиусе опорного контура  $x_1$  в интервале  $x_0 \leq x_{13} < x_1 \leq x_{12}$  на контуре  $L_1$  образуется пластический шарнир и пластину следует рассматривать как две независимые области: внутри контура  $L_1$  и между контурами  $L_1$  и  $L_2$ . Значение  $x_{13}$  определим ниже. Деформирование при  $x_0 \leq x \leq x_1$  (внутри контура  $L_1$ ) назовем схемой 2, а при  $x_1 \leq x \leq 1$  (между контурами  $L_1$  и  $L_2$ ) – схемой 3.

При деформировании по схеме 2 будет деформироваться только часть пластины внутри контура  $L_1$  как пластина с отверстием, защемленная по контуру  $L_1$ . На отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$  ( $x_{13} < x_1 \leq x_{12}$ ) реализуется пластическое состояние  $B_1 - B$ , при котором

$$m_2(x) = a_2(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad -a_3(x) \leq m_1(x) \leq 0, \quad m_1(x_1) = -a_3(x_1), \quad m_1(x_0) = 0.$$

Из условия  $\dot{v}'' = 0$  скорости прогибов в пластине при схеме 2 (рис. 3, б)

$$\dot{v} = \alpha(x_1 - x) \text{ при } x_0 \leq x \leq x_1 \text{ (} \alpha = \text{const)}.$$

Радиальный момент  $m_1(x)$  определяется выражением (12). Из условия  $m_1(x_1) = -a_3(x_1)$  получим предельную нагрузку  $p_{02}$  для схемы 2:

$$p_{02} = \frac{6}{(x_1 - x_0)^2(x_1 + 2x_0)} \left[ a_3(x_1)x_1 + \int_{x_0}^{x_1} a_2(x) dx \right]. \quad (17)$$

При деформировании по схеме 3 будет деформироваться только часть пластины между контурами  $L_1$  и  $L_2$  как пластина, защемленная по внутреннему контуру  $L_1$  и свободная на внешнем контуре  $L_2$ . На контуре  $L_1$  образуется пластический шарнир и  $m_2(x_1) < 0$ ,  $m_1(x_1) < 0$ . На отрезке  $x_1 \leq x \leq 1$  реализуется пластическое состояние  $C - C_1$ , при котором

$$m_2(x) = -a_4(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad -a_3(x) \leq m_1(x) \leq 0, \quad m_1(x_1) = -a_3(x_1), \quad m_1(1) = 0. \quad (18)$$

Из условия  $\dot{v}'' = 0$  скорости прогибов в пластине при схеме 3 (рис. 3, в)

$$\dot{v} = \alpha(x - x_1) \text{ при } x_1 \leq x \leq 1 \text{ (} \alpha = \text{const)}.$$

При  $x_1 \leq x \leq 1$ , учитывая, что на свободном контуре  $q(1) = 0$ , из (8), (9), (18) получим

$$\begin{aligned} xq(x) &= -p \int_1^x y dy = -p(x^2 - 1)/2; \quad (xm_1)' = -a_4(x) - p(x^2 - 1)/2, \\ m_1(x) &= \frac{1}{x} \int_x^1 a_4(y) dy - \frac{p}{6} \left( x^2 - 3 + \frac{2}{x} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) и условия  $m_1(x_1) = -a_3(x_1)$  получим предельную нагрузку  $p_{03}$  для схемы 3:

$$p_{03} = \frac{6}{(1 - x_1)^2(2 + x_1)} \left[ a_3(x_1)x_1 + \int_{x_1}^1 a_4(x) dx \right]. \quad (20)$$

Из выражений (17), (20) видно, что нагрузка  $p_{02}$  является убывающей функцией по  $x_1$ , а нагрузка  $p_{03}$  – возрастающая. Поэтому при уменьшении значения  $x_1$  от величины  $x_{12}$  сначала реализуется схема 2, а затем схема 3. Из равенства  $p_{02}(x_{1m}) = p_{03}(x_{1m})$  вычисляется значение  $x_1 = x_{1m}$ , при котором схема 3 переходит в схему 2. С учетом (17), (20) величина  $x_{1m}$  определяется из алгебраического уравнения

$$\begin{aligned} (1 - x_{1m})^2(2 + x_{1m}) \left[ a_3(x_{1m})x_{1m} + \int_{x_0}^{x_{1m}} a_2(x) dx \right] &= \\ = (x_{1m} - x_0)^2(x_{1m} + 2x_0) \left[ a_3(x_{1m})x_{1m} + \int_{x_{1m}}^1 a_4(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (21)$$



При деформировании по схеме 4 на отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$  реализуется пластическое состояние  $C_1 - C_2 - C_1$  и при  $x_1 \leq x \leq 1$  – состояние  $C_1 - C_3$  (см. рис. 2). Окружность  $x = x_1$  является промежуточным шарниром, на котором справедливо неравенство  $-a_3(x_1) < m_1(x_1) \leq 0$  и перерезывающие силы терпят разрыв. При  $x_0 \leq x \leq x_1$  имеем

$$m_2(x) = -a_4(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad m_1(x_1) \leq m_1(x) \leq a_1(x), \quad m_1(x_1) \leq 0, \quad m_1(x_0) = 0. \quad (22)$$

На отрезке  $x_1 \leq x \leq 1$

$$m_2(x) = -a_4(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad m_1(x_1) \leq m_1(x) \leq 0, \quad m_1(x_1) \leq 0, \quad m_1(1) = 0. \quad (23)$$

Из уравнения  $\dot{v}'' = 0$  при учете равенства нулю скоростей прогибов пластины на опорном контуре  $x = x_1$  получим распределение скоростей прогибов в пластине при схеме 4 (рис. 3, з):

$$\dot{v} = \dot{v}_2(x - x_1) / (1 - x_1) \quad \text{при } x_0 \leq x \leq 1,$$

где  $\dot{v}_2$  – безразмерная скорость прогиба внешнего контура  $L_2$ .

Из (8), (9), (22) при  $x_0 \leq x \leq x_1$ , учитывая, что  $q(x_0) = 0$ , имеем

$$xq(x) = x_0q(x_0) - p \int_{x_0}^x y dy = -p(x^2 - x_0^2) / 2; \quad (xm_1)' = -a_4(x) - p(x^2 - x_0^2) / 2,$$

$$m_1(x) = -\frac{1}{x} \int_{x_0}^x a_4(y) dy - \frac{p}{6} (x - x_0)^2 \left( 1 + 2 \frac{x_0}{x} \right). \quad (24)$$

При  $x_1 \leq x \leq 1$ , учитывая, что на свободном контуре  $q(1) = 0$ , из (8), (9), (23) получим

$$xq(x) = -p \int_1^x y dy = -p(x^2 - 1) / 2; \quad (xm_1)' = -a_4(x) - p(x^2 - 1) / 2,$$

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_x^1 a_4(y) dy - \frac{p}{6} \left( x^2 - 3 + 2 \frac{1}{x} \right). \quad (25)$$

Из равенства  $m_1(x_1 - 0) = m_1(x_1 + 0)$  и (24), (25) получим предельную нагрузку  $p_{04}$  для схемы 4:

$$p_{04} = \frac{6}{(1 - x_0)[ -3x_1(1 + x_0) + 2(1 + x_0 + x_0^2) ]} \int_{x_0}^1 a_4(x) dx. \quad (26)$$

Подставляя значение  $p = p_{04}$  в (24), (25), получим распределение в пластине радиального момента  $m_1(x)$ :

$$m_1(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} \int_{x_0}^x a_4(y) dy + \frac{(x_0 - x)^2 (x + 2x_0)}{x(1 - x_0)[ 3x_1(1 + x_0) - 2(1 + x_0 + x_0^2) ]} \int_{x_0}^1 a_4(x) dx; & x_0 \leq x \leq x_1, \\ \frac{1}{x} \int_x^1 a_4(y) dy + \frac{(1 - x)^2 (x + 2)}{x(1 - x_0)[ 3x_1(1 + x_0) - 2(1 + x_0 + x_0^2) ]} \int_{x_0}^1 a_4(x) dx; & x_1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (27)$$

Из анализа выражения (27) следует, что  $m_1(x)$  достигает своего минимального значения при  $x = x_1$ , когда  $m_1(x_1) = -a_3(x_1)$  (при этом на опоре образуется пластический шарнир и схема 4 переходит в схему 3). Откуда следует, что схема 4 реализуется для значений  $x_1$  в интервале  $x_0 \leq x_1 \leq x_{13}$ , где  $x_{13}$  определяется из уравнения  $m_1(x_{13}) = -a_3(x_{13})$ , которое с учетом (27) при  $x = x_1 = x_{13}$  имеет вид

$$a_4(x_{13})x_{13} + \frac{(1-x_{13})^2(x_{13}+2)}{(1-x_0)[3x_{13}(1+x_0)-2(1+x_0+x_0^2)]} \int_{x_0}^1 a_4(x)dx = - \int_{x_{13}}^1 a_4(y)dy. \quad (28)$$

При заданном значении опорного радиуса  $x_1$  пластина будет деформироваться по схеме, при которой предельная нагрузка минимальна. Предельная нагрузка  $p_0$  для рассматриваемой пластины

$$p_0 = \min(p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{04}). \quad (29)$$

Номер  $i$ , соответствующий минимальному значению величин  $p_{0i}$ , определяет номер схемы деформирования пластины ( $i = 1-4$ ). Таким образом, при  $x_{12} \leq x_1 \leq 1$  реализуется схема 1, при  $x_{1m} \leq x_1 \leq x_{12}$  будет схема 2, при  $x_{13} \leq x_1 \leq x_{1m}$  – схема 3 и при  $x_0 \leq x_1 \leq x_{13}$  – схема 4.

### 3. Вычисление оптимальной опоры

Оптимальной будем считать такую опору, при которой пластина имеет максимальную предельную нагрузку и, следовательно, минимальную повреждаемость. Из анализа выражений (14), (17), (20), (26) следует, что функции предельных нагрузок  $p_{01}(x_1)$ ,  $p_{02}(x_1)$  убывающие по  $x_1$ , а функции  $p_{03}(x_1)$ ,  $p_{04}(x_1)$  – возрастающие. Так как схема 1 реализуется при  $x_{12} \leq x_1 \leq 1$ , схема 2 реализуется при  $x_{1m} \leq x_1 \leq x_{12}$ , схема 3 – при  $x_{13} \leq x_1 \leq x_{1m}$ , и схема 4 – при  $x_0 \leq x_1 \leq x_{13}$ , то предельная нагрузка рассматриваемых пластин будет максимальна при переходе схемы 2 в схему 3, то есть при  $x_1 = x_{1m}$ . Поэтому условие оптимальности опоры имеет вид  $p_{02}(x_{1m}) = p_{03}(x_{1m})$ , а равенство (21) является алгебраическим уравнением для вычисления радиуса оптимальной опорной окружности  $x_1 = x_{1m}$ . Кроме того, видно, что на оптимальной внутренней опоре образуется пластический шарнир.

На рис. 4 изображены значения радиуса оптимальной опоры  $x_{1m}$ , полученные численно из (21) методом деления пополам, в зависимости от размера отверстия  $x_0$  и различных характеристик армирования железобетонной пластины. Считалось, что  $k = 1/17$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = 40$ ,  $s_2 = 50$ ,  $\mu_{10} = \pi/6$ ,  $\mu_{20} = \pi/5$ ,  $\omega_{10} = 0,25$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ ,  $h = 1$ ,  $\delta_2 = 0,15$ ; армирование обоих слоев по закону (2). Кривые 1–3 соответствуют расчетам при  $\delta_1 = 0,05$ ,  $\delta_1 = 0,1$  и  $\delta_1 = 0,2$ . Из рисунка видно, что при изменении характеристик армирования изменяется расположение оптимальной опоры.

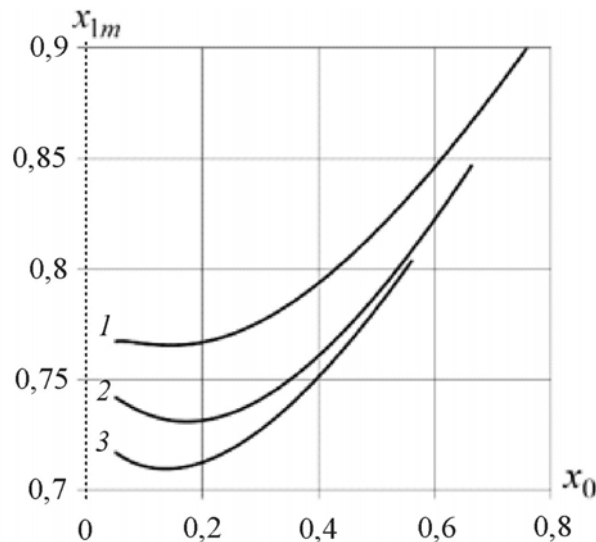


Рис. 4. Радиус оптимальной опоры  $x_{1m}$  в зависимости от размера отверстия  $x_0$ : линия 1 –  $\delta_1 = 0,05$ ; линия 2 –  $\delta_1 = 0,1$ ; линия 3 –  $\delta_1 = 0,2$

На рис. 5, 6 изображена безразмерная предельная нагрузка  $p_0$ , вычисленная по (14), (17), (20), (26), (29) для рассматриваемых слоистых железобетонных пластин, в зависимости от безразмерного радиуса опоры  $x_1$ . Считалось, что  $k = 1/17$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = 40$ ,  $s_2 = 50$ ,  $\mu_{10} = \pi/6$ ,  $\mu_{20} = \pi/5$ ,  $\omega_{10} = 0,25$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ ,  $h = 1$ .

На рис. 5 приведены расчеты при различных размерах отверстия. Было принято:  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,07$ ; армирование обоих слоев в форме логарифмических спиралей по закону (2). Линия  $c_1c_2c_3c_4c_5$  изображает  $p_0$  при безразмерном параметре отверстия  $x_0 = 0,1$ . На интервале  $c_1c_2$  реализуется схема 4, на интервале  $c_2c_3$  – схема 3, на интервале  $c_3c_4$  – схема 2, на интервале  $c_4c_5$  – схема 1. Максимум предельной нагрузки достигается на оптимальной опоре  $x_1 = x_{1m} = 0,715$  (в точке  $c_3$ ),  $p_0(x_{1m}) = 19,39$ ;  $p_0(x_{1m})/p_0(1) = 5,2$ . Линия  $e_1e_2e_3e_4e_5$  изображает нагрузку  $p_0$  при  $x_0 = 0,15$ . На интервале  $e_1e_2$  реализуется схема 4, на интервале  $e_2e_3$  – схема 3, на интервале  $e_3e_4$  – схема 2, на интервале  $e_4e_5$  – схема 1. Максимальное значение предельной нагрузки достигается при  $x_1 = x_{1m} = 0,713$  (в точке  $e_3$ ),  $p_0(x_{1m}) = 27,23$ ;  $p_0(x_{1m})/p_0(1) = 5,96$ . Линия  $b_1b_2b_3b_4b_5$  изображает  $p_0$  при  $x_0 = 0,2$ . На интервале  $b_1b_2$  реализуется схема 4, на интервале  $b_2b_3$  – схема 3, на интервале  $b_3b_4$  – схема 2, на интервале  $b_4b_5$  – схема 1. Максимальное значение предельной нагрузки достигается при  $x_1 = x_{1m} = 0,715$  (в точке  $b_2$ ),  $p_0(x_{1m}) = 35,71$ ;  $p_0(x_{1m})/p_0(1) = 6,74$ . При увеличении размеров отверстия отношение максимальной предельной нагрузки  $p_0(x_{1m})$  к предельной нагрузке  $p_0(1)$  (в случае шарнирного опирания по внешней контуре пластины) растет.

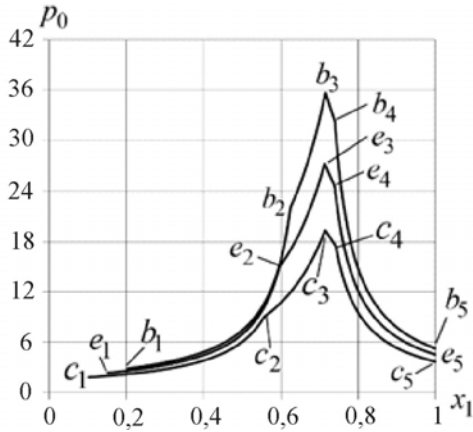


Рис. 5. Предельная нагрузка  $p_0$  в зависимости от радиуса опоры  $x_1$ : линия  $c_1c_2c_3c_4c_5$  –  $x_0 = 0,1$ ; линия  $e_1e_2e_3e_4e_5$  –  $x_0 = 0,15$ ; линия  $b_1b_2b_3b_4b_5$  –  $x_0 = 0,2$

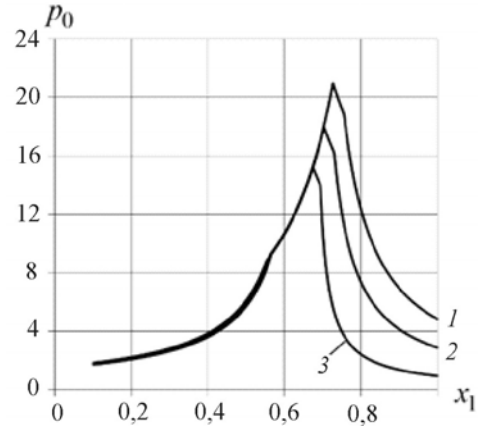


Рис. 6. Предельная нагрузка  $p_0$  в зависимости от радиуса опоры  $x_1$  при  $x_0 = 0,1$ : линия 1:  $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$ ; армирование обоих слоев по закону (2); линия 2:  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,05$ ; армирование обоих слоев по закону (2); линия 3:  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,05$ , армирование верхнего слоя  $I_1$  по закону (2) и нижнего слоя  $I_2$  закону (3)

Для расчетов, приведенных на рис. 6, размер отверстия  $x_0 = 0,1$ . Линия 1:  $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$ ; армирование обоих слоев по закону (2); радиус оптимальной опоры  $x_{1m} = 0,728$ ; максимум предельной нагрузки  $p_0 = 20,94$ . Линия 2:  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,05$ ; армирование обоих слоев по закону (2);  $x_{1m} = 0,7$ ; максимум предельной нагрузки  $p_0 = 17,95$ . Линия 3: параметры, как для кривой 2, но армирование верхнего слоя  $I_1$  по закону (2) и нижнего слоя  $I_2$  по закону (3);  $x_{1m} = 0,67$ ; максимум предельной нагрузки  $p_0 = 15,24$ . Из рисунка видно, что для рассматриваемых параметров армирования при размещении опорного контура около отверстия предельные нагрузки совпадают. Если же опора расположена ближе к внешнему контуру пластины, то предельные нагрузки существенно различаются.

На рис. 7 приведена предельная нагрузка  $p_0$  в зависимости от радиуса опоры  $x_1$  в случае различного соотношения толщин армированных слоев. Кривая 1 соответствует  $\delta_1 = 0,05$ ;  $\delta_2 = 0,1$ , кривая 2 –  $\delta_1 = 0,1$ ;  $\delta_2 = 0,05$ . Остальные характеристики слоев одинаковые:  $k = 1/17$ ,  $x_0 = 0,1$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = s_2 = 40$ ,  $\mu_{10} = \mu_{20} = \pi/6$ ,  $\omega_{10} = \omega_{20} = 0,25$ , армирование обоих слоев – по закону (2). Из рисунка видно, что при расположении опоры от положения около отверстия и до положения  $x_1 = x_{1m}$  (для схем 3, 4) нагрузка  $p_0$  больше для кривой 2, когда верхний слой толще нижнего. При расположении опоры около внешнего контура пластины (при схеме 1) нагрузка  $p_0$  больше для кривой 1, когда верхний слой тоньше нижнего. Оптимальное расположение опорного контура различное для рассматриваемых случаев. Значение  $x_{1m}$  для кривой 1 больше, чем для кривой 2 (на рис. 7:  $(x_{1m})_1 > (x_{1m})_2$ ). Поскольку максимум предельной нагрузки реализуется на оптимальной

опоре при переходе схемы 3 в схему 2, то максимум  $p_0$  больше, если верхний слой толще нижнего. Такая закономерность хорошо видна на рис. 7: максимум  $p_0$  для кривой 2 больше, чем этот максимум для кривой 1.

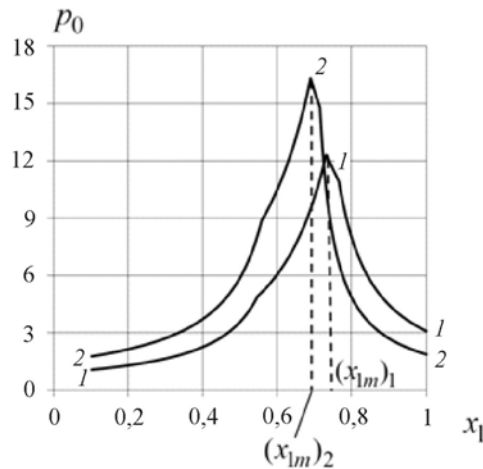


Рис. 7. Предельная нагрузка  $p_0$  в зависимости от радиуса опоры  $x_1$  при различном соотношении толщин армированных слоев: кривая 1 –  $\delta_1 = 0,05$ ;  $\delta_2 = 0,1$ , кривая 2 –  $\delta_1 = 0,1$ ;  $\delta_2 = 0,05$

С помощью (14), (17) можно вычислить отношение максимальной предельной нагрузки  $p_0(x_{1m}) = p_{02}(x_{1m})$  к предельной нагрузке  $p_0(1)$ , когда пластина шарнирно опята по внешнему контуру, из равенства

$$\frac{p_0(x_{1m})}{p_0(1)} = \frac{(1-x_0)[3x_{1m}(1+x_0) - 2(1+x_0+x_0^2)][a_3(x_{1m})x_{1m} + \int_{x_0}^{x_{1m}} a_2(x) dx]}{(x_{1m}-x_0)^2(x_{1m}+2x_0) \int_{x_0}^1 a_2(x) dx},$$

где  $x_{1m}$  определяется из (21). Как видно из приведенных численных примеров, при различных параметрах армирования отношение нагрузок  $p_0(x_{1m})/p_0(1)$  может быть больше пяти.

Рассмотренные примеры показывают, что изменение характеристик армирования круглой пластины с отверстием существенно влияет на ее предельную нагрузку. Однако если есть возможность управлять размещением опорного контура, то эффект оптимизации превосходит эффекты, получаемые за счет управления только армированием пластины. Изменяя расположение опорного контура внутри области пластины, можно найти опору, при которой пластина будет наиболее прочной.

#### 4. Оптимизация характеристик армирования пластины

Простые аналитические формулы для предельной нагрузки (14), (17), (20), (26) при различном расположении кругового внутреннего опорного контура позволяют определять оптимальные значения разных характеристик армирования железобетонных пластин с точки зрения максимума предельной нагрузки.

1. Пусть радиус опорного контура фиксирован и расположен около внешнего контура (например,  $0,9 \leq x_1 \leq 1$  при  $x_0 = 0,1$ ). В этом случае пластина деформируется по схеме 1, а предельная нагрузка определяется по формуле (14):

$$p_{01} = \frac{6}{(1-x_0)[3x_1(1+x_0) - 2(1+x_0+x_0^2)]} f_1, \quad f_1 = \int_{x_0}^1 a_2(x) dx.$$

При фиксированных значениях  $x_0, x_1$ , задача сводится к определению максимума функции  $f_1$ .

Например, определим оптимальную толщину верхнего армированного слоя, обеспечивающую максимальное значение предельной нагрузки при заданной суммарной толщине армированных слоев:  $\delta_1 + \delta_2 = \gamma = \text{const}$  ( $0 \leq \delta_1 \leq \gamma, 0 \leq \delta_2 \leq \gamma$ ). Поскольку  $\delta_2 = \gamma - \delta_1$ , то с учетом (5)  $f_1$  является квадратичной функцией от аргумента  $\delta_1$ :

$$f_1(\delta_1) = \alpha_0 \delta_1^2 + \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2,$$

$$\alpha_0 = -\frac{2}{s(k+1)} \int_{x_0}^1 (2s\omega_1 + 2ks\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) [2s\omega_1 + 2ks\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22} - s(k+1)] dx,$$

$$\alpha_1 = 4 \int_{x_0}^1 \{ (h-\gamma)(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22}) -$$

$$-\frac{1}{s(k+1)} [ksh - \gamma(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22})] (2s\omega_1 + 2ks\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) \} dx,$$

$$\alpha_2 = 2 \int_{x_0}^1 \left\{ ksh^2 - \gamma(2h-\gamma)(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22}) - \frac{1}{s(k+1)} [ksh - \gamma(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22})]^2 \right\} dx.$$

Коэффициент  $\alpha_0$  не зависит от величины  $\gamma$  и всегда меньше нуля, поскольку пределы текучести арматуры  $s_1, s_2$  намного больше предела текучести связующего  $s$ . Коэффициент  $\alpha_1$  больше нуля. Функция  $f_1(\delta_1)$  имеет единственный максимум при  $\delta_1 = -\alpha_1 / (2\alpha_0)$ . Следовательно, при заданной суммарной толщине армированных слоев максимальная предельная нагрузка при деформировании по схеме 1 рассчитывается так:

$$p_0 = \frac{6}{(1-x_0)[3x_1(1+x_0) - 2(1+x_0+x_0^2)]} \left( \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_0} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} + \alpha_2 \right), \quad (30)$$

при этом оптимальные толщины верхнего и нижнего слоев

$$\delta_1 = -\alpha_1 / (2\alpha_0), \quad \delta_2 = \gamma + \alpha_1 / (2\alpha_0). \quad (31)$$

2. Если опорный контур расположен внутри пластины недалеко от отверстия, то пластина деформируется по схеме 4, а предельная нагрузка определяется по формуле (26).

В этом случае задача оптимизации сводится к поиску максимума функции  $f_2 = \int_{x_0}^1 a_4(x) dx$ .

В случае поиска оптимальной толщины верхнего армированного слоя, обеспечивающей максимальное значение предельной нагрузки при условии  $\delta_1 + \delta_2 = \gamma$ , ( $0 \leq \delta_1 \leq \gamma$ ,  $0 \leq \delta_2 \leq \gamma$ ) с учетом (7), получаем, что  $f_2$  является квадратичной функцией от аргумента  $\delta_1$ :

$$f_2(\delta_1) = \beta_0 \delta_1^2 + \beta_1 \delta_1 + \beta_2, \quad (32)$$

$$\beta_0 = -\frac{2}{s(k+1)} \int_{x_0}^1 (2ks\omega_1 + 2s\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) [2ks\omega_1 + 2s\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22} - s(k+1)] dx,$$

$$\beta_1 = 4 \int_{x_0}^1 \{ (h-\gamma)(2s\omega_2 - s_2\omega_{22}) - \frac{1}{s(k+1)} [s h - \gamma(2s\omega_2 - s_2\omega_{22})] (2ks\omega_1 + 2s\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) \} dx,$$

$$\beta_2 = 2 \int_{x_0}^1 \left\{ s h^2 - \gamma(2h-\gamma)(2s\omega_2 - s_2\omega_{22}) - \frac{1}{s(k+1)} [s h - \gamma(2s\omega_2 - s_2\omega_{22})]^2 \right\} dx.$$

Видно, что коэффициент  $\beta_0$  не зависит от величины  $\gamma$ . Поскольку пределы текучести арматуры  $s_1$ ,  $s_2$  намного больше предела текучести связующего  $s$ , то  $\beta_0$  меньше нуля, а коэффициент  $\beta_1$  больше нуля.

Тогда, аналогично рассмотренному выше примеру, при заданной суммарной толщине армированных слоев максимальная предельная нагрузка при деформировании по схеме 4 определяется из (26), (32) как

$$p_0 = \frac{6}{(1-x_0)[-3x_1(1+x_0) + 2(1+x_0+x_0^2)]} \left( \frac{\beta_1^2}{4\beta_0} - \frac{\beta_1}{2\beta_0} + \beta_2 \right), \quad (33)$$

при этом оптимальные размеры толщины верхнего и нижнего слоя

$$\delta_1 = -\beta_1 / (2\beta_0), \quad \delta_2 = \gamma + \beta_1 / (2\beta_0). \quad (34)$$

Если опорный контур расположен так, что выбор схемы предельного деформирования не очевиден, как это было в рассмотренных примерах, то следует решать задачи по определению максимума предельной нагрузки при разных схемах и для полученных оптимальных характеристик проверять, соответствуют ли они выбранной схеме деформирования путем вычисления значений  $x_{12}$ ,  $x_{13}$  и  $x_{1m}$  из (16), (21), (28).

На рис. 8 приведены отношения оптимальных толщин верхнего  $\delta_1$  и нижнего  $\delta_2$  слоев в зависимости от суммарной толщины армированных слоев  $\gamma$ , полученные по формулам (31), (34). Считалось, что  $k = 1/17$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = 40$ ,  $s_2 = 50$ ,  $\mu_{10} = \pi/6$ ,  $\mu_{20} = \pi/5$ ,  $\omega_{10} = 0,25$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ ,  $h = 1$ ,  $x_0 = 0,1$ . Кривые 1, 3 изображают случай армирования обоих слоев по закону (2), кривые 2, 4 – армирование обоих слоев по закону (3). Кривые 1, 2 изображают при  $x_1 = 0,9$  отношение  $\delta_1 / \delta_2$  в случае деформирования по схеме 1, рассмотренном в примере 1. Кривые 3, 4 отображают при  $x_1 = 0,2$  отношение  $\delta_2 / \delta_1$  в случае деформирования по схеме 4, рассмотренном в примере 2. Из рисунка видно, что если пла-

стина шарнирно оперта около внешнего контура (кривые 1, 2;  $x_1 = 0,9$ ), то пластина будет более прочной, если нижний слой толще, чем верхний ( $\delta_1 / \delta_2 < 1$ ). Если же пластина оперта около отверстия (кривые 3, 4;  $x_1 = 0,2$ ), то пластина будет иметь максимальную предельную нагрузку, когда верхний слой толще нижнего ( $\delta_2 / \delta_1 < 1$ ).

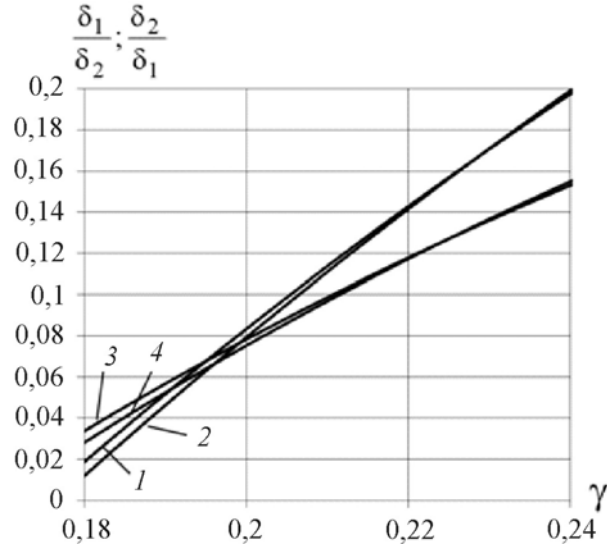


Рис. 8. Отношения оптимальных толщин верхнего  $\delta_1$  и нижнего  $\delta_2$  слоев в зависимости от суммарной толщины армированных слоев  $\gamma = \delta_1 + \delta_2$ ; кривые 1, 2 изображают при  $x_1 = 0,9$  отношение  $\delta_1 / \delta_2$  в случае деформирования по схеме 1; кривые 3, 4 отображают при  $x_1 = 0,2$  отношение  $\delta_2 / \delta_1$  в случае деформирования по схеме 4; кривые 1, 3 – армирование обоих слоев по закону (2); кривые 2, 4 – армирование обоих слоев по закону (3)

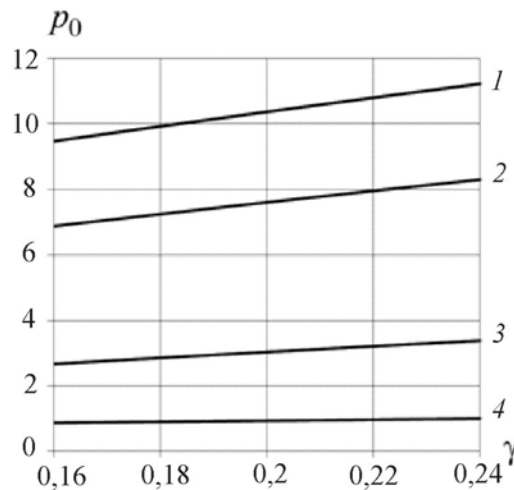


Рис. 9. Максимальная предельная нагрузка  $p_0$  в зависимости от суммарной толщины армированных слоев  $\gamma$ : кривые 1, 2 –  $x_1 = 0,9$ , деформирование по схеме 1; кривые 3, 4 –  $x_1 = 0,2$ , деформирование по схеме 4; кривые 1, 3 – армирование обоих слоев по закону (2); кривые 2, 4 – армирование обоих слоев по закону (3)



На рис. 9 приведена безразмерная максимальная предельная нагрузка  $p_0$ , полученная по формулам (30), (33), в зависимости от суммарной толщины армированных слоев  $\gamma$ . Для расчетов кривых 1–4 были приняты те же значения характеристик армирования, что и для кривых 1–4 на рис. 8. Из рисунка видно, что максимальная предельная нагрузка  $p_0$  при армировании обоих слоев по закону (2) (кривые 1, 3) больше, чем при армировании по закону (3) (кривые 2, 4), при одинаковом значении суммарной толщины слоев  $\gamma$  и при соответствующем расположении опорного контура.

## Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала построено точное решение задачи по определению главных моментов, скоростей деформаций и предельной нагрузки при изгибе трехслойных железобетонных круглых пластин, имеющих разную структуру углового армирования в верхнем и нижнем слое. Пластины шарнирно оперты по круговому контуру, расположенному внутри области пластины, имеют в центральной части свободное круглое отверстие и находятся под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки. В рамках структурной модели армированного слоя с однородным напряженным состоянием в волокнах обосновано принятие в расчетах условия пластичности в плоскости главных моментов в виде прямоугольника типа условия Йогансена (Johansen). Показано, что в зависимости от расположения опоры пластины могут деформироваться по четырем схемам. При изменении расположения опоры от внешнего контура внутрь пластины сначала реализуется схема в виде конуса, как и для пластины, шарнирно опертой по внешнему контуру. Затем реализуется схема, при которой деформируется в виде конуса только внутренняя часть пластины, защемленная по опорному контуру. При дальнейшем смещении опоры внутрь пластины конусообразно деформируется только внешняя от опорного контура, кольцевая часть пластины, защемленная по опорному контуру. При размещении опорного контура вблизи отверстия или на нем пластина деформируется конусообразно, как и пластина, шарнирно опертая по контуру отверстия. Для всех схем получены условия их реализации, определены поля главных моментов и скорости деформаций. Получены простые аналитические выражения для вычисления предельной нагрузки в зависимости от расположения опоры. Получены и численно решены алгебраические уравнения, которые определяют оптимальное расположение опорного контура, соответствующее наибольшему значению предельной нагрузки пластины, и, следовательно, наименьшей ее повреждаемости при различном армировании. Получено, что на оптимальной внутренней опоре образуется пластический шарнир. Показано, что изменение характеристик углового армирования и расположение внутреннего опорного контура существенно влияет на повреждаемость пластины. Простые аналитические формулы для предельной нагрузки позволяют определять оптимальные значения различных характеристик армирования пластины. Решена задача по определению оптимальной толщины верхнего армированного слоя, обеспечивающей максимальное значение предельной нагрузки при заданной суммарной толщине армированных слоев. При этом показано, что если пластина шарнирно оперта на внешнем контуре или около него, то пластина будет более прочной при условии, что нижний армированный слой толще,

чем верхний армированный слой. Если же пластина шарнирно оперта около отверстия, то пластина будет иметь максимальную предельную нагрузку, когда верхний слой толще нижнего.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 14-01-00102-а).

## Библиографический список

1. Жукьян П.П. Расчет железобетонных плит, опертых по контуру // Вестник Полоц. ун-та. Серия Ф. Прикладные науки. Строительство. – 2014. – № 8. – С. 54–58.
2. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Расчет динамического деформирования трехслойных железобетонных круглых и кольцевых пластин // Бетон и железобетон. – 2011. – № 6. – С. 26–30.
3. Сахновский К.В. Железобетонные конструкции. – М.: Гос. изд-во лит. по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1959. – 840 с.
4. Дехтярь А.С. Точечное опирание пластин сложного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 6. – С. 56–59.
5. Yang W.H. How to optimally support a plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1981. – Vol. 48. – P. 207–209.
6. Оленев Г.М. Оптимальное расположение дополнительных опор к жесткопластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения // Учен. зап. Тарт. гос. ун-та. – 1983. – Вып. 659. – С. 30–41.
7. Дехтярь А.С. Оптимальное опирание квадратной пластины // Прикладная механика. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 107–110.
8. Дехтярь А.С. Оптимальное размещение колонн в зданиях, возводимых методом подъема // Строительная механика и расчет сооружений. – 1989. – № 1. – С. 14–17.
9. Lellep J., Polikarpus J. Optimal design of circular plates with internal supports // WSEAS transactions on mathematics. – 2012. – Vol. 11. – No. 3. – P. 222–232.
10. Wang D. Optimization of support positions to minimize the maximal deflection of structures // Int. J. Solids and Str. – 2004. – Vol. 41. – P. 7445–7458.
11. Wang D. Optimum design of intermediate support for raising fundamental frequency of a beam or column under compressive axial load // J. Eng. Mech. ASCE. – 2014. – Vol. 140. – No. 7. – P. 04014040 (1–8).
12. Wang C.M., Liew K.M., Wang L., Aug K.K. Optimal locations of internal line supports for rectangular plates against buckling // Structural Optimization. – 1992. – No. 4. – P. 199–205.
13. Zhu Jihong, Zhang Weihong. Maximization of structural natural frequency with optimal support layout // Structural Optimization. – 2006. – Vol. 4. – P. 462–469.
14. Lepik U. Optimal design of elastic-plastic beams with additional supports // Structural Optimization. – 1995. – No. 9. – P. 18–24.
15. Mroz Z., Rozvany G.I.N. Optimal design of structures with variable support conditions // J. Optimiz. Theory Appl. – 1975. – Vol. 15. – No. 1 – P. 85–101.
16. Романова Т.П. Оптимальное расположение полигональных внутренних опор к круглым жесткопластическим пластинам // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 3 (36). – С. 94–105. DOI: 10.14498/vsgtu1312
17. Романова Т.П. Оптимальное опирание жесткопластических одно- и двусвязных полигональных пластин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – № 4. – С. 152–177. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.06
18. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования // Краевые задачи и математическое моделирование: сб. тр. 8-й Всерос. науч. конф. 1–3 декабря 2006 г., Новокузнецк. – Т. 1; Кем. гос. ун-т. – Новокузнецк, 2006. – С. 25–31.

## References

1. Zhuk'ian P.P. Raschet zhelezobetonnykh plit, opertykh po konturu [Calculation of reinforced concrete slabs supported on the contour]. *Vestnik Polotskogo universiteta. Prikladnye nauki. Stroitel'stvo*, 2014, no. 8(F), pp. 54-58.
2. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. Raschet dinamicheskogo deformirovaniia trekhslonnykh zhelezobetonnykh kruglykh i kol'tsevykh plastin [Calculation of dynamic deformation of three-layer reinforced concrete circular and annular plates]. *Beton i zhelezobeton*, 2011, no. 6, pp. 26-30.
3. Sakhnovskii K.V. Zhelezobetonnye konstruksii [Reinforced concrete structures]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo literatury po stroitel'stvu, arkhitekture i stroitel'nym materialam, 1959. 840 p.
4. Dekhtiar' A.S. Tochechnoe opiranie plastin slozhnogo ochertaniia [Point support plates of complex shape]. *Stroitel'naiia mekhanika i raschet sooruzhenii*, 2010, no. 6, pp. 56-59.
5. Yang W.H. How to optimally support a plate. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 1981, vol. 48, pp. 207-209.
6. Olenev G.M. Optimal'noe raspolozhenie dopolnitel'nykh opor k zhestkoplasticheskim kruglym plastinkam v sluchae impul'snogo nagruzheniia [Optimal location of additional supports to rigid-plastic circular plates in case of impulse loading]. *Uchenye zapiski Tartusskogo gosudarstvennogo universiteta*, 1983 (659), pp. 30-41.
7. Dekhtiar' A.S. Optimal'noe opiranie kvadratnoi plastiny [Optimal support of square plate]. *Prikladnaia mekhanika*, 1991, vol. 27, no. 6, pp. 107-110.
8. Dekhtiar' A.S. Optimal'noe razmeshchenie kolonn v zdaniiax, vozvodimykh metodom pod'ema [Optimal placement of columns in buildings constructed by lifting]. *Stroitel'naiia mekhanika i raschet sooruzhenii*, 1989, no. 1, pp. 14-17.
9. Lellep J., Polikarpus J. Optimal design of circular plates with internal supports. *WSEAS Transactions on Mathematics*, 2012, vol. 11, no. 3, pp. 222-232.
10. Wang D. Optimization of support positions to minimize the maximal deflection of structures. *Int. J. Solids and Str.*, 2004, vol. 41, pp. 7445-7458.
11. Wang D. Optimum design of intermediate support for raising fundamental frequency of a beam or column under compressive axial load. *J. Eng. Mech. ASCE*, 2014, vol. 140, no. 7, pp. 04014040 (1-8).
12. Wang C.M., Liew K.M., Wang L, Aug K.K. Optimal locations of internal line supports for rectangular plates against buckling. *Structural Optimization*, 1992, no. 4, pp. 199-205.
13. Zhu Jihong, Zhang Weihong. Maximization of structural natural frequency with optimal support layout. *Structural Optimization*, 2006, vol. 4, pp. 462-469.
14. Lepik U. Optimal design of elastic-plastic beams with additional supports. *Structural Optimization*, 1995, no. 9, pp. 18-24.
15. Mroz Z., Rozvany G.I.N. Optimal design of structures with variable support conditions. *J. Optimiz. Theory Appl*, 1975, vol. 15, no. 1, pp. 85-101.
16. Romanova T.P. Optimal'noe raspolozhenie poligonal'nykh vnutrennikh opor k kruglym zhestkoplasticheskim plastinam [Optimal location of polygonal internal supports to circular rigid-plastic plates]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2014, no. 3 (36), pp. 94-105. DOI: 10.14498/vsgtu1312.
17. Romanova T.P. Optimal'noe opiranie zhestkoplasticheskikh odno- i dvusviaznykh poligonal'nykh plastin [Optimal support of rigid-plastic singly and doubly connected polygonal plates]. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2014, no. 4, pp. 152-177. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.06.
18. Vokhmianin I.T., Nemirovsky Yu.V. Osobennosti prodol'no-poperechnogo izgiba trekhslonnykh kol'tsevykh plastinok s nesimmetrichnymi strukturami armirovaniia. *Trudy 8 Vserossiiskoi nauchnoi konferentsii "Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie"* [Boundary problems and mathematical modeling: Proceedings of 8th Russian sci. conf.]. Vol. 1. Novokuznetsk: Kemerovskii gosudarstvennyi universitet, 2006, pp. 25-31.