



ВЕСТНИК ПНИПУ. МЕХАНИКА

№ 3, 2015

PNRPU MECHANICS BULLETIN

<http://vestnik.pstu.ru/mechanics/about/inf/>



DOI: 10.15593/perm.mech/2015.3.07

УДК 539.3

## БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ В ТЕОРИИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

**В.В. Карпов, А.А. Семенов**

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,  
Санкт-Петербург, Россия

### О СТАТЬЕ

Получена: 23 апреля 2015 г.  
Принята: 17 июля 2015 г.  
Опубликована: 30 сентября 2015 г.

#### Ключевые слова:

оболочки,  
безразмерные параметры,  
математическая модель,  
подкрепленные оболочки,  
параметры Ляме, ортотропия,  
оболочки вращения, устойчивость,  
безразмерная нагрузка,  
безразмерный функционал

### АННОТАЦИЯ

В статье предлагается вариант безразмерных параметров для широкого класса оболочечных конструкций. Для пологих оболочек прямоугольного плана безразмерные параметры применяются давно, для оболочек общего вида нет единой формы безразмерных соотношений, так как для каждого вида оболочек параметры Ляме различны не только по значениям, но и по размерностям. Поэтому в статье показаны безразмерные соотношения для деформаций, напряжений, усилий, моментов и функционала полной потенциальной энергии деформации. В соотношениях учитывается геометрическая нелинейность, поперечные сдвиги, ортотропия материала, а также введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости. Показан дальнейший подход к решению задач прочности и устойчивости различных видов оболочек в безразмерных параметрах. Некоторые методики решения нелинейных задач устойчивости выглядят не совсем корректно, когда используются размерные параметры (например, методика, основанная на методе продолжения решения по наилучшему параметру). В безразмерных параметрах все расчеты не вызывают сомнений в корректности. Проведены расчеты некоторых оболочечных конструкций в безразмерных и размерных параметрах, показана их согласованность. Введение безразмерных параметров при расчете таких конструкций позволяет получить более обширную информацию о напряженно-деформированном состоянии оболочек и выявить особенности деформирования для целой серии подобных оболочек. Также этот подход удобен для оптимизации выбора параметров конструкций. Анализируются некоторые различия в критических нагрузках, полученные в безразмерном и размерном решении задачи.

© ПНИПУ

© Карпов Владимир Васильевич – доктор технических наук, профессор, e-mail: [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru)  
Семенов Алексей Александрович – кандидат технических наук, e-mail: [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com)

Vladimir V. Karpov – Doctor of Technical Sciences, Professor, e-mail: [vvkarpov@lan.spbgasu.ru](mailto:vvkarpov@lan.spbgasu.ru)  
Alexey A. Semenov – Ph.D. in Technical Sciences, e-mail: [sw.semenov@gmail.com](mailto:sw.semenov@gmail.com)

## DIMENSIONLESS PARAMETERS IN THE THEORY OF REINFORCED SHELLS

V.V. Karpov, A.A. Semenov

Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering,  
St. Petersburg, Russian Federation

---

### ARTICLE INFO

Received: 23 April 2015  
Accepted: 17 July 2015  
Published: 30 September 2015

#### Keywords:

shell, dimensionless parameters, mathematical model, reinforced shells, Lamé parameters, orthotropy, a shell of revolution, stability, dimensionless load, dimensionless functional

### ABSTRACT

In this paper a variant of the dimensionless parameters for a wide range of shell structures is proposed. For shallow shells of have a rectangular form, the dimensionless parameters are used for a long time, as for the general form of shells; there is no single form of dimensionless ratios for each type of shell, because Lamé parameters differ not only in values, but also in dimensions. Therefore, the work shows the dimensionless relations for deformations, stresses, forces, moments and functional of total potential energy of deformation. The relations consider geometric nonlinearity, transverse shifts, orthotropy of material and the introduction of ribs on the structural anisotropy of the method in accordance with their shear and torsional rigidity. The authors show a further approach to solving the strength and stability tasks of different types of shells in the dimensionless parameters. Some methods for solving nonlinear problems of stability do not look quite correct, when using the dimensional parameters (e.g., a technique, based on the method of continuation of solution for the best parameter). In dimensionless parameters, all calculations are beyond doubt. The calculations of some shell structures are provided in dimensionless and dimensional parameters and their consistency is shown. The proposed approach allows one to obtain values for the calculation of a series of such shells, which is more convenient to optimize the choice of design parameters. We have examined some of the differences in critical loads, obtained in dimensionless and dimensional solution of the problem.

© PNRPU

Введение безразмерных параметров позволяет одним расчетом получить напряженно-деформированное состояние целой серии подобных оболочек и выбрать наиболее рациональные размерные параметры оболочек, а для изотропных оболочек еще и материал оболочки.

При расчете пологих изотропных оболочек прямоугольного плана безразмерные параметры использовались в работах [1–8]. Для оболочек вращения в осесимметричной постановке безразмерные параметры использовались в работе [9], что является частным случаем параметров, предлагаемых в данной работе.

В работах [10–17] используются различные безразмерные параметры для каждого конкретного вида оболочек и решаемых задач. Однако целесообразно разработать единые безразмерные параметры, пригодные для различного вида оболочек независимо от класса решаемой задачи.

Целью данной работы является разработка безразмерных параметров для различного вида оболочек, проведение расчетов прочности и устойчивости оболочек в безразмерных и размерных параметрах и анализ полученных результатов.

## 1. Теория и методы

### 1.1. Основные соотношения математической модели

#### 1.1.1. Соотношения для гладких оболочек

Математическая модель деформирования оболочек состоит из трех групп соотношений:

- геометрические соотношения, связывающие деформации и перемещения;
- физические соотношения, связывающие напряжения и деформации;

– функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки, из условия минимума которого выводятся уравнения равновесия.

Геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности принимают известный вид [18]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \\ \theta_1 &= -\left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = -\left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  – деформации удлинения вдоль координат  $x, y$  срединной поверхности;  $\gamma_{xy}$  – деформации сдвига в плоскости  $XOY$ ;  $k_x = \frac{1}{R_1}, k_y = \frac{1}{R_2}$  – главные кривизны оболочки вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $A, B$  – параметры Ляме, характеризующие геометрию оболочки;  $U = U(x, y), V = V(x, y), W = W(x, y)$  – перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль осей  $x, y, z$ .

Будем учитывать поперечные сдвиги, тогда

$$\gamma_{xz} = k f(z) \left[ \Psi_x - \theta_1 \right], \quad \gamma_{yz} = k f(z) \left[ \Psi_y - \theta_2 \right].\tag{2}$$

Здесь  $f(z)$  – функция, характеризующая распределение напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  по толщине оболочки;  $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$  – углы поворота нормали в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$  соответственно;  $k = \frac{5}{6}$ .

Для гладких оболочек [11]

$$f(z) = 6 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right),$$

где  $h$  – толщина оболочки.

Физические соотношения при линейно-упругом деформировании для ортотропного материала при плоском напряженном состоянии будут иметь вид [19]

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right];\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= G_{12} \left[ \gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right]; \\ \tau_{xz} &= G_{13}\gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = G_{23}\gamma_{yz}.\end{aligned}$$

Здесь  $E_1, E_2, \mu_{12}, \mu_{21}, G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – механические характеристики материала, а  $\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  – функции изменения кривизн и кручения,

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \\ 2\chi_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right).\end{aligned}$$

Функционал полной потенциальной энергии деформации гладкой ортотропной оболочки можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}E_p &= \frac{E_1 h}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \iint_{a_1}^{ab} \left\{ \varepsilon_x^2 + \bar{G}_2 \varepsilon_y^2 + 2\mu_{21} \varepsilon_x \varepsilon_y + \bar{G}_{12} \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13} k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \right. \\ &\left. + \bar{G}_{23} k(\Psi_y - \theta_2)^2 + \frac{h^2}{12} (\chi_1^2 + \bar{G}_2 \chi_2^2 + 2\mu_{21} \chi_1 \chi_2 + 4\bar{G}_{12} \chi_{12}^2) - 2 \frac{q(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1 h} W \right\} AB dx dy.\end{aligned}\quad (4)$$

С учетом того что для ортотропного материала  $E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12}$ , здесь введены следующие обозначения:

$$\bar{G}_2 = \frac{E_2}{E_1}, \quad \bar{G}_{12} = \frac{G_{12}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_{13} = \frac{G_{13}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_{23} = \frac{G_{23}(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1}.$$

Выражения усилий и моментов для гладких ортотропных оболочек имеют вид [20]

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ h \left( \varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y \right) \right], \quad N_y = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ h \left( \varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x \right) \right], \quad N_{xy} = N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy}, \\ M_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ \left( \frac{h^3}{12} \right) (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right], \quad M_y = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ \left( \frac{h^3}{12} \right) (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right], \\ M_{xy} &= M_{yx} = G_{12} \left[ 2 \left( \frac{h^3}{12} \right) \chi_{12} \right], \quad Q_x = G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2),\end{aligned}\quad (5)$$

где  $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$  – нормальные усилия в направлении осей  $x, y$  и сдвиговые усилия в плоскости  $XOY$  соответственно;  $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$  – изгибающие моменты в направлении осей  $x, y$  и крутящие моменты;  $Q_x, Q_y$  – поперечные силы в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ .

### 1.1.2. Соотношения для подкрепленных оболочек

Для учета подкрепления конструкции ребрами жесткости при достаточно большом числе ребер будем использовать метод конструктивной анизотропии [21]. Суть этого метода заключается в сведении оболочки дискретно-переменной толщины к оболочке рав-

новеликой по жесткости оболочке постоянной толщины, что дает возможность учитывать такие существенные факторы, как сдвиговая и крутильная жесткость ребер. Также этот метод может быть модифицирован для расчета оболочек, ослабленных вырезами.

Для оболочки, подкрепленной ребрами жесткости,  $f(z)$  принимает вид [21]

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2} \left(z + \frac{h}{2}\right) \left(z - \frac{h}{2} - H\right).$$

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где  $h$  – высота; индексы  $i$  и  $j$  указывают номер ребра, расположенного параллельно оси  $x$  и  $y$  соответственно;  $n, m$  – количество ребер;  $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$ ;  $\bar{\delta}(x - x_j)$  и  $\bar{\delta}(y - y_i)$  представляют собой разности двух единичных функций  $\bar{\delta}(x - x_j) = U(x - a_j) - U(x - b_j)$ ;  $\bar{\delta}(y - y_i) = U(y - c_i) - U(y - d_i)$ , где  $a_j = x_j - r_j / 2$ ,  $b_j = x_j + r_j / 2$ ,  $c_i = y_i - r_i / 2$ ,  $d_i = y_i + r_i / 2$ ;  $r$  – ширина ребра. Следовательно, толщина всей конструкции равна  $h + H$ .

Функционал полной потенциальной энергии деформации будет иметь вид [20]

$$\begin{aligned} E_p = & \frac{E_1}{2(1-\mu_{12}\mu_{21})} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + F_x) \varepsilon_x^2 + \bar{G}_2 (h + F_y) \varepsilon_y^2 + \mu_{21} (2h + F_x + F_y) \varepsilon_x \varepsilon_y + \right. \\ & + \frac{1}{2} \bar{G}_{12} (2h + F_x + F_y) \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13} k (h + F_x) (\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23} k (h + F_y) (\Psi_y - \theta_2)^2 + 2S_x \varepsilon_x \chi_1 + \\ & + \mu_{21} (S_x + S_y) \varepsilon_x \chi_2 + \mu_{21} (S_x + S_y) \varepsilon_y \chi_1 + 2\bar{G}_2 S_y \varepsilon_y \chi_2 + 2\bar{G}_{12} (S_x + S_y) \gamma_{xy} \chi_{12} + \left. \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_1^2 + \right. \\ & + \bar{G}_2 \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_2^2 + \mu_{21} \left( \frac{h^3}{6} + J_x + J_y \right) \chi_1 \chi_2 + \\ & \left. + 2\bar{G}_{12} \left( \frac{h^3}{6} + J_x + J_y \right) \chi_{12}^2 - 2 \frac{q(1-\mu_{12}\mu_{21})}{E_1} W \right\} AB dx dy. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $F_x, F_y, S_x, S_y, J_x, J_y$  – площадь поперечного сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения; статический момент и момент инерции этого сечения, которые имеют вид [20]

$$\begin{aligned} F_x = & \sum_{i=1}^n \frac{h^i r_i}{\tilde{b}} + \sum_{j=1}^m \left( \frac{h^j r_j}{\tilde{a}} - \sum_{i=1}^n \frac{h^{ij} r_i r_j}{\tilde{a} \tilde{b}} \right) \frac{r_j}{\tilde{a}}; \quad F_y = \sum_{j=1}^m \frac{h^j r_j}{\tilde{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{h^i r_i}{\tilde{b}} - \sum_{j=1}^m \frac{h^{ij} r_i r_j}{\tilde{a} \tilde{b}} \right) \frac{r_i}{\tilde{b}}; \\ S_x = & \sum_{i=1}^n \frac{S^i r_i}{\tilde{b}} + \sum_{j=1}^m \left( \frac{S^j r_j}{\tilde{a}} - \sum_{i=1}^n \frac{S^{ij} r_i r_j}{\tilde{a} \tilde{b}} \right) \frac{r_j}{\tilde{a}}; \quad S_y = \sum_{j=1}^m \frac{S^j r_j}{\tilde{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{S^i r_i}{\tilde{b}} - \sum_{j=1}^m \frac{S^{ij} r_i r_j}{\tilde{a} \tilde{b}} \right) \frac{r_i}{\tilde{b}}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$J_x = \sum_{i=1}^n \frac{J^i r_i}{\tilde{b}} + \sum_{j=1}^m \left( \frac{J^j r_j}{\tilde{a}} - \sum_{i=1}^n \frac{J^i r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_j}{\tilde{a}}; \quad J_y = \sum_{j=1}^m \frac{J^j r_j}{\tilde{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{J^i r_i}{\tilde{b}} - \sum_{j=1}^m \frac{J^j r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_i}{\tilde{b}},$$

где

$$S^i = \frac{h^i (h + h^i)}{2}, \quad S^j = \frac{h^j (h + h^j)}{2}, \quad S^{ij} = \frac{h^{ij} (h + h^{ij})}{2}, \quad J^i = 0,25h^2 h^i + 0,5h (h^i)^2 + \frac{1}{3} (h^i)^3, \\ J^j = 0,25h^2 h^j + 0,5h (h^j)^2 + \frac{1}{3} (h^j)^3, \quad J^{ij} = 0,25h^2 h^{ij} + 0,5h (h^{ij})^2 + \frac{1}{3} (h^{ij})^3.$$

Здесь переменные  $\tilde{a}, \tilde{b}$  позволяют ребрам жесткости иметь постоянную ширину и определяются как  $\tilde{a} = aA, \tilde{b} = bB \left( \frac{a - a_1}{2} \right)$ .

Выражения усилий и моментов для подкрепленных ортотропных оболочек имеют вид [20]

$$N_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ (h + F_x)(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + S_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ N_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ (h + F_y)(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + S_y(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ N_{xy} = G_{12} \left[ (h + F_y)\gamma_{xy} + 2S_y\chi_{12} \right], \quad N_{yx} = G_{12} \left[ (h + F_x)\gamma_{xy} + 2S_x\chi_{12} \right], \quad (8) \\ M_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ S_x(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ M_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ S_y(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ M_{xy} = G_{12} \left[ S_y\gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_{12} \right], \quad M_{yx} = G_{12} \left[ S_x\gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_{12} \right], \\ Q_x = G_{13}k(h + F_x)(\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23}k(h + F_y)(\Psi_y - \theta_2).$$

## 1.2. Безразмерные параметры для гладких ортотропных оболочек

Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \bar{a}_1 = \frac{a_1}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y, \\ \bar{U} = \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y bB}{h}, \quad (9)$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x(1-\mu_{12}\mu_{21})a^2 A^2}{E_1 h^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y(1-\mu_{12}\mu_{21})a^2 A^2}{E_2 h^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} a^2 A^2}{G_{12} h^2},$$

$$\bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \quad \bar{B} = \frac{bB}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h},$$

где  $a, b$  – линейные размеры оболочки в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\lambda$  – безразмерный коэффициент;  $\xi, \eta, \bar{z}$  – новая (безразмерная) система координат оболочки.

Важную роль в формулировании безразмерных параметров играют параметры Ляме  $A, B$  поверхности оболочки. Значения параметров Ляме для цилиндрических, сферических, конических, тороидальных оболочек приведены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры Ляме для основных видов оболочек вращения

Вид оболочки	$A$	$B$	$R_1, \text{ м}$	$R_2, \text{ м}$	$a$	$b$
Пологая, прямоугольная в плане	1	1	$r_1$	$r_2$	метр	метр
Цилиндрическая	1	$r$	$\infty$	$r$	метр	радиан
Сферическая	$r$	$r \cdot \sin x$	$r$	$r$	радиан	радиан
Коническая	1	$x \cdot \sin \theta$	$\infty$	$x \cdot \tan \theta$	метр	радиан
Тороидальная	$r$	$d + r \cdot \sin x$	$r$	$\frac{d + r \cdot \sin x}{\sin x}$	радиан	радиан

Здесь  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны оболочки вдоль осей  $x, y$ ;  $d$  – смещение образующего сектора от оси вращения для тороидальной оболочки;  $\theta$  – угол конусности конической оболочки.

Как видно из табл. 1, параметр  $b$  – безразмерный; если  $a$  – размерное, то  $A$  – безразмерное и наоборот, т.е.  $aA$  – размерная величина (м);  $B = B(x)$  – размерная величина (м), т.е.  $bB$  – размерная величина. Следовательно, если ввести безразмерные параметры Ляме следующим образом:  $\bar{A} = \frac{aA}{h}, \bar{B} = \frac{bB}{h}$ , то для всех рассматриваемых видов оболочек они будут безразмерными.

Расчет напряженно-деформированного состояния и устойчивости оболочечных конструкций в безразмерных параметрах позволяет получить критическую нагрузку для целой серии подобных оболочек (рис. 1, 2). При этом прогибы, усилия и моменты для различных подобных оболочек находятся масштабированием полученных безразмерных значений этих величин.

Перейдем к безразмерным параметрам (9) в соотношениях (1), (2), заготовив вначале выражения  $\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x}, \theta_1, \theta_2$  в безразмерных параметрах:

$$\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} = \frac{1}{AB} \frac{h}{ab} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} = \frac{h}{AaBb} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi},$$

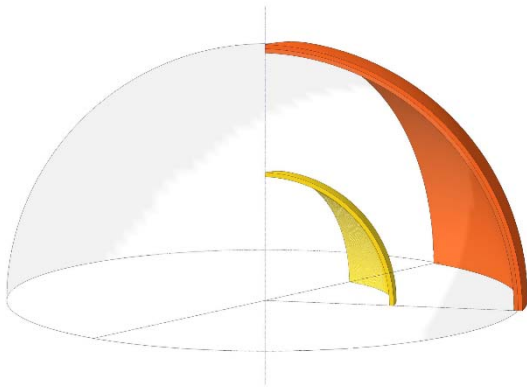


Рис. 1. Подобные сферические оболочки

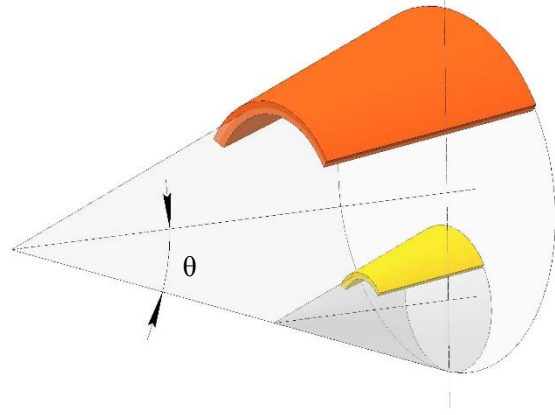


Рис. 2. Подобные конические оболочки

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -\left(\frac{h}{aA} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} + \frac{1}{h} k_\xi \frac{h^2}{aA} \bar{U}\right) = -\frac{h}{aA} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} + k_\xi \bar{U}\right) = \frac{h}{aA} \bar{\theta}_1; \\ \theta_2 &= -\left(\frac{h}{bB} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + \frac{1}{h} k_\eta \frac{h^2}{bB} \bar{V}\right) = -\frac{h}{aA} \lambda \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + k_\eta \bar{V}\right) = \frac{h}{aA} \lambda \bar{\theta}_2; \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2 = \frac{h^2}{a^2 A^2} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - k_\xi \bar{A}^2 \bar{W} + \frac{1}{2} \bar{\theta}_1^2\right) = \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\varepsilon}_x; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2 = \\ &= \frac{h^2}{a^2 A^2} \left(\lambda^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{U} - k_\eta \bar{A}^2 \bar{W} + \frac{1}{2} \lambda^2 \bar{\theta}_2^2\right) = \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\varepsilon}_y; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \theta_1 \theta_2 = \\ &= \frac{h^2}{a^2 A^2} \left(\lambda \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} - \lambda \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{V} + \lambda \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2\right) = \frac{h^2}{a^2 A^2} \lambda \bar{\gamma}_{xy}; \\ \gamma_{xz} &= k f(z) \left[\Psi_x - \theta_1\right] = \frac{h}{aA} k f(\bar{z}) \left[\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1\right] = \frac{h}{aA} \bar{\gamma}_{xz}; \\ \gamma_{yz} &= k f(z) \left[\Psi_y - \theta_2\right] = \frac{h}{aA} \lambda k f(\bar{z}) \left[\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2\right] = \frac{h}{aA} \bar{\gamma}_{yz}; \\ \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{h}{A a^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \xi} = \frac{h}{A^2 a^2} \bar{\chi}_1; \\ \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x = \frac{h}{A^2 a^2} \left(\lambda^2 \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \eta} + \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{\Psi}_x\right) = \frac{h}{A^2 a^2} \bar{\chi}_2; \\ 2\chi_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y = \frac{h}{a^2 A^2} \left(\lambda \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \xi} + \lambda \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \eta} - \lambda \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{\Psi}_y\right) = \frac{h}{a^2 A^2} \lambda 2 \bar{\chi}_{12}. \end{aligned}$$



При линейно-упругом деформировании физические соотношения для ортотропных оболочек вращения имеют вид (3), перейдем в них к безразмерным параметрам (9):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right] = \\ &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ \bar{\varepsilon}_x + \mu_{21}\bar{\varepsilon}_y + \bar{z}(\bar{\chi}_1 + \mu_{21}\bar{\chi}_2) \right] = \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\sigma}_x; \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ \varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right] = \\ &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ \bar{\varepsilon}_y + \mu_{12}\bar{\varepsilon}_x + \bar{z}(\bar{\chi}_2 + \mu_{12}\bar{\chi}_1) \right] = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\sigma}_y; \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[ \gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right] = G_{12} \frac{h^2}{a^2 A^2} \lambda \left[ \bar{\gamma}_{xy} + 2\bar{z}\bar{\chi}_{12} \right] = G_{12} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\tau}_{xy}; \\ \tau_{xz} &= G_{13} k f(z) \left[ \Psi_x - \theta_1 \right] = G_{13} \frac{h^2}{a^2 A^2} k f(\bar{z}) \bar{A} \left[ \bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1 \right] = G_{13} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\tau}_{xz}; \\ \tau_{yz} &= G_{23} k f(z) \left[ \Psi_y - \theta_2 \right] = G_{23} \frac{h^2}{a^2 A^2} k f(\bar{z}) \bar{A} \lambda \left[ \bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2 \right] = G_{23} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\tau}_{yz}.\end{aligned}$$

Здесь

$$f(\bar{z}) = 6 \left( \frac{1}{4} - \bar{z}^2 \right).$$

Функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}E_p &= \frac{E_1 h^7}{2a^4 A^4 (1-\mu_{12}\mu_{21})} \int_{\bar{a}_1}^1 \int_0^1 \left\{ \bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{G}_2 \bar{\varepsilon}_y^2 + (\mu_{21} + \bar{G}_2 \mu_{12}) \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \bar{G}_{12} \lambda^2 \bar{\gamma}_{xy}^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{12} (\bar{\chi}_1^2 + \bar{G}_2 \bar{\chi}_2^2 + (\mu_{21} + \bar{G}_2 \mu_{12}) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + 4\bar{G}_{12} \lambda^2 \bar{\chi}_{12}^2) + \bar{G}_{13} k \bar{A}^2 (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1)^2 + \\ &\left. + \bar{G}_{23} k \bar{A}^2 \lambda^2 (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2)^2 - 2(1-\mu_{12}\mu_{21}) \bar{P} \bar{W} \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \frac{E_1 h^7}{2a^4 A^4 (1-\mu_{12}\mu_{21})} \bar{E}_p.\end{aligned}\quad (10)$$

Таким образом, под знаком интеграла остаются только безразмерные слагаемые.

При необходимости можно получить безразмерные значения для усилий и моментов:

$$\begin{aligned}N_x &= \frac{E_1 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) = \frac{E_1 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} (\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21}\bar{\varepsilon}_y) = \\ &= \frac{E_1 h}{(1-\mu_{12}\mu_{21}) \bar{A}^2} (\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21}\bar{\varepsilon}_y) = E_1 h \bar{N}_x; \\ N_y &= \frac{E_2 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) = \frac{E_2 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} (\bar{\varepsilon}_y + \mu_{12}\bar{\varepsilon}_x) = E_2 h \bar{N}_y;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_{xy} = N_{yx} &= G_{12} h \gamma_{xy} = G_{12} h \frac{h^2}{a^2 A^2} \lambda \bar{\gamma}_{xy} = \frac{G_{12} h}{A^2} \lambda \bar{\gamma}_{xy} = G_{12} h \bar{N}_{xy}; \\
 M_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left[ \left( \frac{h^3}{12} \right) (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right] = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} \frac{h}{a^2 A^2} (\bar{\chi}_1 + \mu_{21} \bar{\chi}_2) = \\
 &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21}) A^2} (\bar{\chi}_1 + \mu_{21} \bar{\chi}_2) = E_1 h^2 \bar{M}_x; \\
 M_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left[ \left( \frac{h^3}{12} \right) (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right] = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mu_{12} \mu_{21})} \frac{h}{a^2 A^2} (\bar{\chi}_2 + \mu_{12} \bar{\chi}_1) = E_2 h^2 \bar{M}_y; \\
 M_{xy} = M_{yx} &= G_{12} \frac{h^3}{6} \chi_{12} = G_{12} \frac{h^2}{6 A^2} \lambda \bar{\chi}_{12} = G_{12} h^2 \bar{M}_{xy}; \\
 Q_x &= G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1) = G_{13} k \frac{h}{A} (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1) = G_{13} h \bar{Q}_x; \\
 Q_y &= G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2) = G_{23} k \frac{h}{A} \lambda (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2) = G_{23} h \bar{Q}_y.
 \end{aligned}$$

### 1.3. Безразмерные параметры для подкрепленных ортотропных оболочек

Для подкрепленных оболочек, помимо предложенных выше, необходимо ввести дополнительные безразмерные параметры

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_x &= \frac{F_x}{h}, \quad \bar{F}_y = \frac{F_y}{h}, \quad \bar{S}_x = \frac{S_x}{h^2}, \quad \bar{S}_y = \frac{S_y}{h^2}, \quad \bar{J}_x = \frac{J_x}{h^3}, \quad \bar{J}_y = \frac{J_y}{h^3}, \quad \bar{H} = \frac{H}{h}, \\
 f(z) &= -\frac{6}{(1 + \bar{H})^2} \left( \bar{z} + \frac{1}{2} \right) \left( \bar{z} - \frac{1}{2} - \bar{H} \right) = f(\bar{z}). \\
 \bar{x}_j &= \frac{x_j}{a}, \quad \bar{r}_j = \frac{r_j}{a}, \quad \bar{h}_j = \frac{h_j}{h}, \quad \bar{a}_j = \frac{a_j}{a}, \quad \bar{b}_j = \frac{b_j}{a}, \\
 \bar{y}_i &= \frac{y_i}{b}, \quad \bar{r}_i = \frac{r_i}{b}, \quad \bar{h}_i = \frac{h_i}{h}, \quad \bar{c}_i = \frac{c_i}{b}, \quad \bar{d}_i = \frac{d_i}{b}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Толщина всей конструкции будет равна  $1 + \bar{H}$ .

Функционал полной потенциальной энергии деформации будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 E_p &= \frac{E_1 h^7}{2a^4 A^4 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \int_{\bar{a}_1}^1 \int_0^1 \left\{ (1 + \bar{F}_x) \bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{G}_2 (1 + \bar{F}_y) \bar{\varepsilon}_y^2 + \mu_{21} (2 + \bar{F}_x + \bar{F}_y) \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \right. \\
 &+ \frac{1}{2} \bar{G}_{12} (2 + \bar{F}_x + \bar{F}_y) \lambda^2 \bar{\gamma}_{xy}^2 + \bar{G}_{13} k A^2 (1 + \bar{F}_x) (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1)^2 + \bar{G}_{23} k A^2 \lambda^2 (1 + \bar{F}_y) (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2)^2 + \\
 &+ 2 \bar{S}_x \bar{\varepsilon}_x \bar{\chi}_1 + \mu_{21} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) \bar{\varepsilon}_x \bar{\chi}_2 + \mu_{21} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) \bar{\varepsilon}_y \bar{\chi}_1 + 2 \bar{G}_2 \bar{S}_y \bar{\varepsilon}_y \bar{\chi}_2 + 2 \bar{G}_{12} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) \lambda^2 \bar{\gamma}_{xy} \bar{\chi}_{12} + \\
 &+ \left( \frac{1}{12} + \bar{J}_x \right) \bar{\chi}_1^2 + \bar{G}_2 \left( \frac{1}{12} + \bar{J}_y \right) \bar{\chi}_2^2 + \mu_{21} \left( \frac{1}{6} + \bar{J}_x + \bar{J}_y \right) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + 2 \bar{G}_{12} \left( \frac{1}{6} + \bar{J}_x + \bar{J}_y \right) \lambda^2 \bar{\chi}_{12}^2 - \\
 &\left. - 2(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \bar{P} \bar{W} \right\} \bar{A} \bar{B} d \xi d \eta = \frac{E_1 h^7}{2a^4 A^4 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \bar{E}_p.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Выражения усилий и моментов для подкрепленных ортотропных оболочек запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ (h+F_x)(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + S_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right] = \\
 &= \frac{E_1 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ (1+\bar{F}_x)(\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21}\bar{\varepsilon}_y) + \bar{S}_x(\bar{\chi}_1 + \mu_{21}\bar{\chi}_2) \right] = E_1 h \bar{N}_x, \\
 N_y &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ (h+F_y)(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + S_y(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right] = \\
 &= \frac{E_2 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ (1+\bar{F}_y)(\bar{\varepsilon}_y + \mu_{12}\bar{\varepsilon}_x) + \bar{S}_y(\bar{\chi}_2 + \mu_{12}\bar{\chi}_1) \right] = E_2 h \bar{N}_y, \\
 N_{xy} &= G_{12} \left[ (h+F_y)\gamma_{xy} + 2S_y\chi_{12} \right] = G_{12} h \lambda \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ (1+\bar{F}_y)\bar{\gamma}_{xy} + 2\bar{S}_y\bar{\chi}_{12} \right] = G_{12} h \bar{N}_{xy}, \\
 N_{yx} &= G_{12} \left[ (h+F_x)\gamma_{xy} + 2S_x\chi_{12} \right] = G_{12} h \lambda \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ (1+\bar{F}_x)\bar{\gamma}_{xy} + 2\bar{S}_x\bar{\chi}_{12} \right] = G_{12} h \bar{N}_{yx}, \\
 M_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ S_x(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right] = \\
 &= \frac{E_1 h^2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ \bar{S}_x(\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21}\bar{\varepsilon}_y) + \left( \frac{1}{12} + \bar{J}_x \right) (\bar{\chi}_1 + \mu_{21}\bar{\chi}_2) \right] = E_1 h^2 \bar{M}_x, \\
 M_y &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[ S_y(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right] = \\
 &= \frac{E_2 h^2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ \bar{S}_y(\bar{\varepsilon}_y + \mu_{12}\bar{\varepsilon}_x) + \left( \frac{1}{12} + \bar{J}_y \right) (\bar{\chi}_2 + \mu_{12}\bar{\chi}_1) \right] = E_2 h^2 \bar{M}_y, \\
 M_{xy} &= G_{12} \left[ S_y\gamma_{xy} + 2\left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_{12} \right] = G_{12} h^2 \lambda \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ \bar{S}_y\bar{\gamma}_{xy} + 2\left( \frac{1}{12} + \bar{J}_y \right) \bar{\chi}_{12} \right] = G_{12} h^2 \bar{M}_{xy}, \\
 M_{yx} &= G_{12} \left[ S_x\gamma_{xy} + 2\left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_{12} \right] = G_{12} h^2 \lambda \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[ \bar{S}_x\bar{\gamma}_{xy} + 2\left( \frac{1}{12} + \bar{J}_x \right) \bar{\chi}_{12} \right] = G_{12} h^2 \bar{M}_{yx}, \\
 Q_x &= G_{13} k (h+F_x)(\Psi_x - \theta_1) = G_{13} h k \frac{h}{aA} (1+\bar{F}_x)(\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1) = G_{13} h \bar{Q}_x, \\
 Q_y &= G_{23} k (h+F_y)(\Psi_y - \theta_2) = G_{23} h k \frac{h}{aA} (1+\bar{F}_y)(\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2) = G_{23} h \bar{Q}_y.
 \end{aligned}$$

#### 1.4. Безразмерные параметры для изотропных пологих оболочек при решении задач динамики и термоупругости

При решении уравнений в смешанной форме вводится функция напряжений в срединной поверхности оболочки  $\Phi(x, y)$ . В безразмерных параметрах она имеет вид

$$\bar{\Phi}(\xi, \eta) = \frac{\Phi(x, y)}{Eh^2}.$$

При решении задач динамики вводится безразмерный параметр времени [22]

$$\bar{t} = \frac{h}{a^2} \sqrt{\frac{E}{(1-\mu^2)\rho}} t, \quad \rho = \frac{\gamma}{g}.$$

Здесь  $\gamma, g$  – удельный вес материала оболочки и ускорение силы тяжести.

При решении задач термоупругости вводится безразмерный параметр температуры [22]  $\bar{T} = \frac{\alpha a^2}{h^2} T$ , где  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения материала.

### 1.5. Некоторые частные случаи

Рассмотрим частный случай для гладких пологих изотропных оболочек, прямоугольных в плане. В этом случае параметры Ляме будут  $A = 1, B = 1$ , а безразмерные параметры примут вид

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \lambda = \frac{a}{b}, \quad k_\xi = \frac{a^2 k_x}{h}, \quad k_\eta = \frac{b^2 k_y}{h}, \\ \bar{U} &= \frac{aU}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bV}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x a}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y b}{h}, \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x a^2}{Eh^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y a^2}{Eh^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} a^2}{G_{12} h^2}, \quad \bar{P} = \frac{a^4 q}{h^4 E}, \quad \bar{a} = \frac{a}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}. \end{aligned} \quad (13)$$

Следует отметить, что в данном варианте безразмерных параметров, помимо подстановки параметров Ляме и выполнения упрощений, связанных с изотропией материала, по-другому выбраны выражения для главных кривизн оболочки [22].

Выражения для деформаций примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 = \frac{h^2}{a^2} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} - k_\xi \bar{W} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right)^2 \right) = \frac{h^2}{a^2} \bar{\varepsilon}_x; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 = \frac{h^2}{a^2} \lambda^2 \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} - k_\eta \bar{W} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right)^2 \right) = \frac{h^2}{a^2} \lambda^2 \bar{\varepsilon}_y; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{h^2}{a^2} \lambda \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right) = \frac{h^2}{a^2} \lambda \bar{\gamma}_{xy}; \\ \gamma_{xz} &= k f(z) \left[ \Psi_x - \frac{\partial W}{\partial x} \right] = \frac{h}{a} k f(\bar{z}) \left[ \bar{\Psi}_x - \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} \right] = \frac{h}{a} \bar{\gamma}_{xz}; \\ \gamma_{yz} &= k f(z) \left[ \Psi_y - \frac{\partial W}{\partial y} \right] = \frac{h}{a} \lambda k f(\bar{z}) \left[ \bar{\Psi}_y - \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} \right] = \frac{h}{a} \lambda \bar{\gamma}_{yz}; \\ \chi_1 &= \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = \frac{h}{a^2} \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \xi} = \frac{h}{a^2} \bar{\chi}_1; \end{aligned}$$

$$\chi_2 = \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} = \frac{h}{a^2} \lambda^2 \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \eta} = \frac{h}{a^2} \lambda^2 \bar{\chi}_2;$$

$$2\chi_{12} = \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} = \frac{h}{a^2} \lambda \left( \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \eta} \right) = \frac{h}{a^2} \lambda 2\bar{\chi}_{12}.$$

При линейно-упругом деформировании физические соотношения для изотропных оболочек вращения будут иметь вид (3) при  $E_1 = E_2 = E$ ,  $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = \frac{E}{2(1+\mu)}$ . Перейдем в них к безразмерным параметрам (13):

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \varepsilon_x + \mu \varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu \chi_2) \right] = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^2}{a^2} \left[ \bar{\varepsilon}_x + \mu \lambda^2 \bar{\varepsilon}_y + \bar{z}(\bar{\chi}_1 + \mu \lambda^2 \bar{\chi}_2) \right] = E \frac{h^2}{a^2} \bar{\sigma}_x;$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \varepsilon_y + \mu \varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu \chi_1) \right] = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{h^2}{a^2} \left[ \lambda^2 \bar{\varepsilon}_y + \mu \bar{\varepsilon}_x + \bar{z}(\lambda^2 \bar{\chi}_2 + \mu \bar{\chi}_1) \right] = E \frac{h^2}{a^2} \bar{\sigma}_y;$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[ \gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right] = \frac{E}{2(1+\mu)} \lambda \frac{h^2}{a^2} \left[ \bar{\gamma}_{xy} + 2\bar{z}\bar{\chi}_{12} \right] = E \frac{h^2}{a^2} \bar{\tau}_{xy};$$

$$\tau_{xz} = G_{13} \gamma_{xz} = G_{13} \frac{h}{a} \bar{\gamma}_{xz}; \quad \tau_{yz} = G_{23} \gamma_{yz} = G_{23} \frac{h}{a} \lambda \bar{\gamma}_{yz}.$$

Функционал полной потенциальной энергии деформации полой оболочки прямоугольного плана с учетом (13) будет иметь вид [22]

$$E_p = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \int_0^a \int_0^b \left\{ \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \bar{G} \gamma_{xy}^2 + \bar{G} k (\Psi_x - \theta_1)^2 + \right.$$

$$\left. + \bar{G} k (\Psi_y - \theta_2)^2 + \frac{h^2}{12} (\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + 4\bar{G} \chi_{12}^2) - 2 \frac{q(1-\mu^2)}{Eh} W \right\} dx dy =$$

$$= \frac{Eh^5}{2(1-\mu^2)a^4} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \bar{\varepsilon}_x^2 + \lambda^4 \bar{\varepsilon}_y^2 + 2\mu \lambda^2 \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \bar{G} \lambda^2 \bar{\gamma}_{xy}^2 + \bar{G} k (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1)^2 + \bar{G} k \lambda^2 (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12} (\bar{\chi}_1^2 + \lambda^4 \bar{\chi}_2^2 + 2\mu \lambda^2 \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + 4\bar{G} \lambda^2 \bar{\chi}_{12}^2) - 2\bar{P}(1-\mu^2) \bar{W} \right\} d\xi d\eta = \frac{Eh^5}{2(1-\mu^2)a^4} \bar{E}_p.$$

Здесь

$$\bar{G} = \frac{G_{12}(1-\mu^2)}{E}.$$

### 1.6. Дальнейший подход к решению задач прочности и устойчивости изотропных и ортотропных оболочечных конструкций в безразмерных и размерных параметрах

Для минимизации функционала полной потенциальной энергии деформации используем метод Ритца. Для решения задач в размерных параметрах представим искомые функции в виде

$$U(x, y) = \sum_{I=1}^N U(I)Z_1(I); V(x, y) = \sum_{I=1}^N V(I)Z_2(I); W(x, y) = \sum_{I=1}^N W(I)Z_3(I);$$

$$\Psi_x(x, y) = \sum_{I=1}^N PS(I)Z_4(I); \Psi_y(x, y) = \sum_{I=1}^N PN(I)Z_5(I),$$

где  $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$  – неизвестные числовые коэффициенты, а  $Z_1(I) – Z_5(I)$  – известные аппроксимирующие функции аргументов  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки;  $N$  – количество членов разложения.

Для решения задач в безразмерных параметрах искомые функции

$$\bar{U}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^N \bar{U}(I)\bar{Z}_1(I); \bar{V}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^N \bar{V}(I)\bar{Z}_2(I); \bar{W}(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^N \bar{W}(I)\bar{Z}_3(I);$$

$$\bar{\Psi}_x(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^N \bar{PS}(I)\bar{Z}_4(I); \bar{\Psi}_y(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^N \bar{PN}(I)\bar{Z}_5(I),$$

здесь  $\bar{U}(I), \bar{V}(I), \bar{W}(I), \bar{PS}(I), \bar{PN}(I)$  – неизвестные безразмерные числовые коэффициенты;  $\bar{Z}_1(I) – \bar{Z}_5(I)$  – известные аппроксимирующие функции аргументов  $\xi$  и  $\eta$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки.

Подставив разложения искомых функций в функционал (12) и проведя процедуру метода Рунге, получим систему нелинейных алгебраических уравнений. Полученную систему будем решать с помощью метода продолжения решения по наилучшему параметру [23, 24]. Точность применения метода продолжения решения по наилучшему параметру можно свести к анализу угла между векторами приращений неизвестных параметров с прошлого и текущего шага решения (сумма квадратов которых на каждом шаге дает квадрат длины дуги приращения в многомерном пространстве). Так, если угол между векторами решений на предыдущем и текущем шаге оказался слишком большим, то производится уменьшение параметра длины дуги в 10 раз и откат итерационного процесса на два шага назад (для рассматриваемых в данной работе задач такое ограничение угла было выбрано 0,0177 рад). Если значение угла находится в пределах от 0,0094 до 0,0177 рад, то длина дуги сохраняется такой же, как на предыдущем шаге. Если значение угла не превысило 0,0094 рад, то длина дуги увеличивается в 1,5 раза. Таким образом, можно достичь достаточной точности решения вблизи особых точек и в то же время быстро проходить ровные участки кривой.

Точность метода Рунге зависит от числа разложений искомых функций в ряды. С помощью вычислительного эксперимента было показано, что для рассматриваемых оболочек достаточно принять  $N = 16$  для обеспечения достаточно высокой точности [25].

Такой подход позволяет исследовать прочность и устойчивость оболочек, обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб», получать значения верхней и нижней критических нагрузок, находить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции [23, 24].

## 2. Расчеты

### 2.1. Характеристика рассматриваемых конструкций

Все рассматриваемые далее конструкции имеют шарнирно-неподвижное закрепление контура и находятся под действием внешней статической равномерно-распределенной поперечной нагрузки, направленной по нормали к срединной поверхности.

В дальнейшем будут рассматриваться конструкции, выполненные из следующих изотропных и ортотропных материалов (табл. 2).

Таблица 2

Механические характеристики материалов рассматриваемых конструкций

Характеристика	Ортотропные		Изотропные
	Углепластик	Стеклопластик	
	<i>M60J/Ероху</i>	<i>T-10/УПЭ22-27</i>	Сталь
$E_1$ , МПа	$3,3 \cdot 10^5$	$0,294 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^5$
$\mu_{12}$	0,32	0,123	0,3
$E_2$ , МПа	$0,59 \cdot 10^4$	$1,78 \cdot 10^4$	$2,1 \cdot 10^5$
$G_{12}$ , МПа	$0,39 \cdot 10^4$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,807 \cdot 10^5$
$G_{13}$ , МПа	$0,39 \cdot 10^4$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,807 \cdot 10^5$
$G_{23}$ , МПа	$0,39 \cdot 10^4$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,807 \cdot 10^5$
$F_1^+$ , МПа	1760	508	–
$F_1^-$ , МПа	–780	–209	–
$F_2^+$ , МПа	30	246	–
$F_2^-$ , МПа	–168	–117	–
$F_{12}$ , МПа	39	43	–
$\sigma_T$ , МПа	–	–	1720
Плотн., кг/м <sup>3</sup>	1500	1800	7800

Используя безразмерные параметры, будем одним расчетом проводить исследование прочности и устойчивости целой серии подобных оболочек. В методе Ритца примем  $N = 16$ .

### 2.2. Пологие оболочки, квадратные в плане

Рассмотрим вначале подобные квадратные в плане пологие оболочки с размерными и безразмерными параметрами (табл. 3).

Таблица 3

Пример размерных и безразмерных параметров для подобных квадратных в плане пологих оболочек

Вариант	$a$ , м	$R_1$ , м	$h$ , м	$\bar{a}$	$\bar{R}_1$	$k_\xi$
1	18	45,3	0,03	600	1510	238,41
2	27	67,95	0,045			
3	36	90,6	0,06			
4	54	135,9	0,09			

Проведенные расчеты в размерных параметрах для оболочки варианта 4 из углепластика М60J показали, что критическая нагрузка первой потери устойчивости составила  $\bar{P}_{kr} = 5198,543$  (размерное значение  $q_{kr} = 0,01323$  МПа), нагрузка потери прочности  $\bar{P}_{pr} = 12670,4$  (размерное значение  $q_{pr} = 0,0322$  МПа). Эти нагрузки будут одинаковыми для всех рассмотренных вариантов пологих оболочек.

Максимальный прогиб при потере устойчивости  $\bar{W}_{max}$  был равен 0,858, при переводе в размерные параметры это будет 0,077 м. Значения, полученные переходом к размерным параметрам для остальных вариантов конструкций, показаны в табл. 4.

Таблица 4

Размерные и безразмерные результаты расчета для подобных квадратных в плане пологих оболочек

Параметр (безр.)	Значение	Параметр (разм.)	При переводе в размерные варианты				Сравнение (расчет в разм.)	
			Вар. 1	Вар. 2	Вар. 3	Вар. 4	Значение	Разница, %
Входные параметры конструкции								
$\bar{a}$	600	$a$ , м	18	27	36	54	54	–
$\bar{R}_1$	1510	$R_1$ , м	45,3	67,95	90,6	135,9	135,9	–
–	–	$h$ , м	0,03	0,045	0,06	0,09	0,09	–
Результаты расчета								
$\bar{P}_{kr}$	5198,543	$q_{kr}$ , МПа	0,01323				0,01318	0,4
$\bar{P}_{pr}$	12670	$q_{pr}$ , МПа	0,0322				0,0308	4,3
$\bar{W}_{max}$	0,858	$W_{max}$ , м	0,026	0,039	0,051	0,077	0,088	14,6

### 2.3. Панели цилиндрических оболочек

Рассмотрим далее подобные панели цилиндрических оболочек, выполненных из стеклопластика. Расчет будем проводить для конструкции с параметрами  $\bar{a} = 2000$ ,  $\bar{R} = 540$ , угол разворота  $\pi$ .

Критическая нагрузка первой потери устойчивости  $\bar{P}_{kr} = 3,554132 \cdot 10^7$  (размерное значение  $q_{kr} = 0,065307$  МПа), нагрузка потери прочности  $\bar{P}_{pr} = 2,194 \cdot 10^7$  (размерное значение  $q_{pr} = 0,0403$  МПа). Эти нагрузки будут одинаковыми для всех рассмотренных вариантов оболочек. Максимальный прогиб при потере устойчивости  $\bar{W}_{max}$  был равен 20,62, при переводе в размерные параметры это будет 0,2062 м.

Были также проведены расчеты этой же оболочки в размерных параметрах ( $a = 20$  м,  $R = 5,4$  м,  $h = 0,01$  м). Значения, полученные при расчете и в безразмерных, и в размерных параметрах показаны в табл. 5.



Таблица 5

Размерные и безразмерные результаты расчета  
для подобных цилиндрических панелей

Параметр (безр.)	Безразм. значение	Параметр (разм.)	При переводе в размерные варианты				Сравнение (расчет в разм.)	
			Вар. 1	Вар. 2	Вар. 3	Вар. 4	Значение	Разница, %
Входные параметры конструкции								
$\bar{a}$	2000	$a$ , м	5	10	15	20	20	–
–	–	$h$ , м	0,0025	0,005	0,0075	0,01	0,01	–
Результаты расчета								
$\bar{P}_{kr}$	$3,554 \cdot 10^7$	$q_{kr}$ , МПа	0,065307				0,066250	1
$\bar{P}_{pr}$	$2,194 \cdot 10^7$	$q_{pr}$ , МПа	0,0403				0,0407	1
$\bar{W}_{max}$	20,62	$W_{max}$ , м	0,0515	0,1031	0,1546	0,2062	0,2192	6

#### 2.4. Панели усеченных конических оболочек

Рассмотрим панели усеченных гладких конических оболочек, выполненных из изотропного материала (стали). Размерные параметры и соответствующие им безразмерные параметры приводятся в табл. 6. Чтобы было возможным рассматривать оболочки как подобные, был взят одинаковый угол конусности  $\theta = 0,78$  рад и одинаковый угол разворота  $b = \pi$  рад. Также соблюдается правило равенства отношений  $\frac{a}{h}, \frac{a_1}{h}$  для всех рассматриваемых вариантов. Результаты расчетов прочности и устойчивости для этих конструкций приводятся в табл. 7. Здесь потеря прочности происходит одновременно с потерей устойчивости, поэтому значения соответствующих нагрузок объединены. Сравнение с расчетом в размерных параметрах проводилось по конструкции варианта 2.

Таблица 6

Пример размерных и безразмерных параметров для подобных панелей  
усеченных конических оболочек

Вариант	$a$ , м	$a_1$ , м	$h$ , м	$a - a_1$ , м	$\bar{a} = a / h$	$\bar{a}_1 = a_1 / h$
1	12,5	2,5	0,005	10	2500	500
2	25	5	0,010	20		
3	37,5	7,5	0,015	30		
4	50	10	0,020	40		

Таблица 7

Размерные и безразмерные результаты расчета для подобных панелей  
усеченных конических оболочек

Безразм. параметр	Безразм. значение	Размерный параметр	При переводе в размерные варианты				Сравнение (расчет в разм.)	
			Вар. 1	Вар. 2	Вар. 3	Вар. 4	Значение	Разница, %
Входные параметры конструкции								
$\bar{a}$	2500	$a$ , м	12,5	25	37,5	50	25	–
–	–	$h$ , м	0,005	0,010	0,015	0,020	0,010	–
Результаты расчета								
$\bar{P}_{kr} = \bar{P}_{pr}$	$5,07 \cdot 10^7$	$q_{kr} = q_{pr}$ , МПа	0,2730				0,2847	4
$\bar{W}_{max 1}$	34,27	$W_{max 1}$ , м	0,1714	0,3427	0,5141	0,6854	0,3515	2

### 3. Анализ

Для оболочек, изготовленных из одного и того же материала, с одинаковыми значениями безразмерных параметров  $\bar{A}, \bar{B}, k_\xi, k_\eta$  и разными размерными значениями  $a, b, h, R_1, R_2$  (подобные оболочки) значения критической нагрузки потери устойчивости (или прочности)  $\bar{P}$  и напряжений  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$  будут одинаковыми. Соответственно, одинаковыми будут и размерные значения нагрузки и напряжений  $q, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

Чтобы найти размерные значения прогиба, усилий и моментов, необходимо выполнить следующие действия:

$$\begin{aligned} W &= h\bar{W}, \quad N_x = E_1 h \bar{N}_x, \quad N_y = E_2 h \bar{N}_y, \quad N_{xy} = G_{12} h \bar{N}_{xy}, \quad N_{yx} = G_{12} h \bar{N}_{yx}, \\ M_x &= E_1 h^2 \bar{M}_x, \quad M_y = E_2 h^2 \bar{M}_y, \quad M_{xy} = G_{12} h^2 \bar{M}_{xy}, \quad M_{yx} = G_{12} h^2 \bar{M}_{yx}, \\ Q_x &= G_{13} h \bar{Q}_x, \quad Q_y = G_{23} h \bar{Q}_y. \end{aligned}$$

### Заключение

Введение безразмерных параметров при расчете оболочечных конструкций позволяет получить более обширную информацию о напряженно-деформированном состоянии оболочек и выявить особенности деформирования для целой серии подобных оболочек.

Как видно из проведенных исследований, решения в размерных и безразмерных параметрах несколько отличаются друг от друга. Значения критических нагрузок близки, но кривые «нагрузка – прогиб» не совпадают.

При решении в размерных параметрах искомые функции имеют разный порядок. Так, прогибы  $W$  имеют порядок  $10^{-1}$ , а  $U, V, \Psi_x, \Psi_y$  – порядок  $10^{-2} - 10^{-3}$ . Кроме того, при действии с малыми числами накапливается инструментальная ошибка. При  $N = 16$  порядок системы алгебраических уравнений равен 81.

При решении задачи в безразмерных параметрах порядок искомых функций выравнивается и инструментальная ошибка накапливается меньше. Однако порядок параметра нагрузки  $\bar{P}$  может существенно отличаться от порядка остальных параметров и для каждой конкретной задачи быть разным. Правильный подбор параметров точности расчета в методе продолжения решения по наилучшему параметру позволяет достаточно точно находить значения критических нагрузок, несмотря на разницу в порядках. Так что расчеты в безразмерных параметрах следует признать более справедливыми.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России, проект № 3801.

### Библиографический список

1. Амельченко В.В., Неверов И.В., Петров В.В. Решение нелинейных задач теории пологих оболочек путем вариационных итераций / Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1969. – № 3. – С. 62–68.
2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 1975. – 119 с.

3. Петров В.В., Филатов В.Н. Расчет гибких пластинок вариационным методом В.З. Власова // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1970. – № 2.
4. Петров В.В. Расчет гибких пластин и пологих оболочек вариационным методом В.З. Власова // Прикладная механика. – 1966. – Т. II. – Вып. 5.
5. Карпов В.В., Филатов В.Н. Закритические деформации гибких пластин в температурном поле с учетом изменения свойств материала от нагревания // Материалы VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин (Днепропетровск, 1969). – М.: Наука, 1970. – С. 276–280.
6. Карпов В.В., Петров В.В. Уточнение решений при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 5. – С. 189–191.
7. Крысько В.А., Федоров П.Б. Исследование динамической устойчивости гибкой полой оболочки в зависимости от механических и тепловых характеристик // Прикладная механика. – 1984. – Т. XX, № 3. – С. 45–49.
8. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Ivanova Yu.I. Solution of two-dimensional problems of the statics of flexible shallow shells by spline approximation // International Applied Mechanics. – 1995. – Vol. 31. – No. 4. – P. 255–260.
9. Валишвили Н.В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
10. Elastic Buckling Analysis of Ring and Stringer-stiffened Cylindrical Shells under General Pressure and Axial Compression via the Ritz Method / Arani A. Ghorbanpour, A. Loghman, A.A. Mosallaie Barzoki, R. Kolahchi // Journal of Solid Mechanics. – 2010. – Vol. 2. – No. 4. – P. 332–347.
11. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
12. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
13. Zenon del Prado, Gonçalves Paulo B., Paidoussis Michael P. Non-linear vibrations and instabilities of orthotropic cylindrical shells with internal flowing fluid // International Journal of Mechanical Sciences. – 2010. – Vol. 52. – P. 1437–1457. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.03.016
14. Янковский А.П. Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при граничных условиях первого рода на лицевых поверхностях // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 1 (34). – С. 168–185. DOI: 10.14498/vsgtu1281
15. Yasin M. Yaqoob, Kapuria S. An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells // Composite Structures. – 2013. – Vol. 98. – P. 202–214. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.10.048
16. Large deflection analysis of laminated composite plates resting on nonlinear elastic foundations by the method of discrete singular convolution / A.K. Baltacioğlu, Ö. Civalek, B. Akgöz, F. Demir // International Journal of Pressure Vessels and Piping. – 2011. – Vol. 88. – Iss. 8–9. – P. 290–300. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2011.06.004
17. Wu C.-P., Wang Y.-M., Hung Y.-C. Asymptotic finite strip analysis of doubly curved laminated shells // Computational Mechanics. – 2001. – Vol. 27. – P. 107–118. DOI: 10.1007/s004660000218
18. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
19. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Физматлит, 1961. – 384 с.
20. Карпов В.В., Семенов А.А. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 5. – С. 100–106. DOI:10.5862/MCE.40.11
21. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – М.: Физматлит, 2010. – 288 с.
22. Карпов В.В., Игнатьев О.В., Сальников А.Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. – М.: АСВ; СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. архит.-строит. ун-та, 2002. – 420 с.

23. Семенов А.А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 1. – С. 49–63.

24. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике). – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.

25. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 2: Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. – М: Физматлит, 2011. – 248 с.

## References

1. Amel'chenko V.V., Neverov I.V., Petrov V.V. Reshenie nelineinykh zadach teorii pologikh obolochek putem variatsionnykh iteratsii [Solution of nonlinear problems in the theory of shallow shells by variational iteration]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela*, 1969, no. 3.

2. Petrov V.V. Metod posledovatel'nykh nagruzenii v nelineinoi teorii plastinok i obolochek [The method of successive loadings in the nonlinear theory of plates and shells]. Saratovskii gosudarstvennyi universitet, 1975. 119 p.

3. Petrov V.V., Filatov V.N. Raschet gibkikh plastinok variatsionnym metodom V.Z. Vlasova [Calculation of flexible plates by the variational method of V.Z. Vlasov]. *Izvestiia vuzov. Stroitel'stvo i arkhitektura*, 1970, no. 2.

4. Petrov V.V. Raschet gibkikh plastin i pologikh obolochek variatsionnym metodom V.Z. Vlasova [Calculation of flexible plates and shallow shells by the variational method of V.Z. Vlasov]. *Prikladnaia mekhanika*, 1966, vol. II, iss. 5.

5. Karpov V.V., Filatov V.N. Zakriticheskie deformatsii gibkikh plastin v temperaturnom pole s uchetom izmeneniia svoistv materiala ot nagrevaniia [Supercritical deformation of flexible plates in the temperature field, taking into account the changes in material properties from heating]. *Materialy VII Vsesoiuznoi konferentsii po teorii obolochek i plastin* (Dnepropetrovsk, 1969). Moscow: Nauka, 1970. P. 276-280.

6. Karpov V.V., Petrov V.V. Utochnenie reshenii pri ispol'zovanii shagovykh metodov v teorii gibkikh plastinok i obolochek [Clarification solutions using stepper methods in the theory of flexible plates and shells]. *Izvestiia Akademii nauk SSSR. MTT*, 1975, no. 5, pp. 189-191.

7. Krys'ko V.A., Fedorov P.B. Issledovanie dinamicheskoi ustoychivosti gibkoi pologo obolochki v zavisimosti ot mekhanicheskikh i teplovykh kharakteristik [Investigation of the dynamic stability of a shallow shell flexible depending on the mechanical and thermal characteristics]. *Prikladnaia mekhanika*, 1984, vol. XX, no. 3, pp. 45-49.

8. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Ivanova Yu.I. Solution of two-dimensional problems of the statics of flexible shallow shells by spline approximation. *International Applied Mechanics*, 1995, vol. 31, no. 4, pp. 255-260.

9. Valishvili N.V. Metody rascheta obolochek vrashcheniia na ETsVM [Methods for calculating the shells of revolution by computer]. Moscow: Mashinostroenie, 1976. 278 p.

10. Ghorbanpour Arani A., Loghman A., Mosallaie Barzoki A.A., Kolahchi R. Elastic Buckling Analysis of Ring and Stringer-stiffened Cylindrical Shells under General Pressure and Axial Compression via the Ritz Method. *Journal of Solid Mechanics*, 2010, vol. 2, no. 4, pp. 332-347.

11. Vol'mir A.S. Nelineinaia dinamika plastinok i obolochek [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow: Nauka, 1972. 432 p.

12. Vol'mir A.S. Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]. Moscow: Nauka, 1967. 984 p.

13. Zenon del Prado, Gonçaves Paulo B., Païdoussis Michael P. Non-linear vibrations and instabilities of orthotropic cylindrical shells with internal flowing fluid. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2010, vol. 52, pp. 1437-1457. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2010.03.016

14. Iankovskii A.P. Asimptoticheski analiz resheniia nelineinoi zadachi nestatsionarnoi teploprovodnosti sloistyykh anizotropnykh neodnorodnykh obolochek pri granichnykh usloviakh pervogo roda na litsevykh poverkhnostiakh [Asymptotic analysis of solutions of a nonlinear problem of unsteady heat conduction of layered anisotropic inhomogeneous shells under boundary conditions of the first kind on the front surfaces]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2014, no. 1 (34), pp. 168-185. DOI: 10.14498/vsgtu1281
15. Yasin M. Yaqoob, Kapuria S. An efficient layerwise finite element for shallow composite and sandwich shells. *Composite Structures*, 2013, vol. 98, pp. 202-214. DOI: 10.1016/j.compstruct.2012.10.048
16. Baltacioğlu A.K., Civalek Ö., Akgöz B., Demir F. Large deflection analysis of laminated composite plates resting on nonlinear elastic foundations by the method of discrete singular convolution. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, (2011), vol. 88, iss. 8-9, pp. 290-300. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2011.06.004
17. Wu C.-P., Wang Y.-M., Hung Y.-C. Asymptotic finite strip analysis of doubly curved laminated shells. *Computational Mechanics*, 2001, vol. 27, pp. 107-118. DOI: 10.1007/s004660000218
18. Novozhilov V.V. Teoriia tonkikh obolochek [The theory of thin shells]. Leningrad: Sudpromizdat, 1962. 431 p.
19. Ambartsumian S.A. Teoriia anizotropnykh obolochek [The theory of anisotropic shells]. Moscow: Fizmatlit, 1961. 384 p.
20. Karpov V.V., Semenov A.A. Matematicheskaia model' deformirovaniia podkreplennykh ortotropnykh obolochek vrashcheniia [Mathematical model of deformation of orthotropic reinforced shells of revolution]. *Inzhenerno-stroitel'nyi zhurnal*, 2013, no. 5, pp. 100-106. DOI:10.5862/MCE.40.11
21. Karpov V.V. Prochnost' i ustoichivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniia. Ch. 1: Modeli i algoritmy issledovaniia prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniia [The strength and stability of reinforced shells of revolution. Part 1: Models and algorithms of research strength and stability of reinforced shells of revolution]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 288 p.
22. Karpov V.V., Ignat'ev O.V., Sal'nikov A.Iu. Nelineinye matematicheskie modeli deformirovaniia obolochek peremennoi tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniia [Nonlinear mathematical models of deformation of shells of variable thickness and algorithms for their research]. Moscow: ASV; St. Peterburgskii gosudarstvennyi arkhitekturno-stroitelnyi universitet, 2002. 420 p.
23. Semenov A.A. Algoritmy issledovaniia prochnosti i ustoichivosti podkreplennykh ortotropnykh obolochek [Algorithms for the research of strength and stability of reinforced orthotropic shells]. *Stroitel'naia mekhanika inzhenernykh konstruksii i sooruzhenii*, 2014, no. 1, pp. 49-63.
24. Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B. Metod prodolzheniia resheniia po parametru i nailuchshaia parametrizatsiia (v prikladnoi matematike i mekhanike) [The method of the parameter continuation and best parameterization (in applied mathematics and mechanics)]. Moscow: Editorial URSS, 1999. 224 p.
25. Karpov V.V. Prochnost' i ustoichivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniia. Ch. 2: Vychislitel'nyi eksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozdeistvii [The strength and stability of reinforced shells of rotation. Part 2: Computer experiment in static mechanical action]. Moscow: Fizmatlit, 2011. 248 p.