

## ГОРНОЕ ДЕЛО

DOI: 10.15593/2224-9923/2015.16.10

УДК 622.831.312

© Некрасов С.В., Андрейко С.С., 2015

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА ОЦЕНКИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВЕ НЕПРЯМОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С.В. Некрасов, С.С. Андрейко

Горный институт Уральского отделения РАН, Пермь, Россия

Конечно-элементные методы в геомеханических расчетах по оценке напряженно-деформированного состояния массива горных пород показали недостаточную гибкость к изменению геометрии расчетных схем и необходимость введения большого числа неизвестных в случае решения трехмерных задач. Численный расчет коэффициента интенсивности напряжений при вершине трещины на основе конечных элементов является весьма ресурсоемкой задачей при пространственном геомеханическом моделировании. Разбиение области нерегулярной сеткой ведет к существенному росту ширины ленты матрицы жесткости, которая во многом зависит также от способа нумерации элементов. В случаях значительного превышения геометрией расчетной схемы задачи по размерам области детального изучения напряженно-деформированного состояния массива использование классических методов МКЭ или МГП является нецелесообразным. В работе предлагается использовать потенциально более точную вычислительную схему оценки напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной трехмерной упругой среды на основе непрямого метода граничных элементов. В случае отработки калийных пластов столбовой системой разработки метод разрывных смещений, как один из вариантов метода граничных элементов, является удобным инструментом расчета НДС, позволяющим достаточно просто учитывать взаимодействие (пригрузку) кровли и почвы выработанного пространства лавы. На основе непрямого метода граничных элементов разработан пакет программ, реализующий вычислительную схему для решения задачи оценки напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной линейно-упругой среды. Приведены результаты решения тестовых задач, показывающие эффективность предлагаемой вычислительной схемы для оценки напряженно-деформированного состояния массива горных пород.

**Ключевые слова:** геомеханика, напряженно-деформированное состояние, пространственные задачи, постановка задачи, разбиение областей, граничные элементы, не прямой метод, итерационные методы, кусочно-однородная среда, тестовые задачи, погрешность.

### COMPUTATIONAL SCHEME OF EVALUATING STRAIN-STRESS STATE OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS THREE-DIMENSIONAL ELASTIC ENVIRONMENT BASED ON INDIRECT METHOD OF BOUNDARY ELEMENTS

S.V. Nekrasov, S.S. Andreiko

Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
Perm, Russian Federation

Finite-element techniques in geomechanic calculations to assess strain-stress state in rock have shown insufficient flexibility towards varying geometry of computational schemes and necessity to set a large number of the unknown in solving space problems. Numeric calculation of stress intensity factor at the fracture tip by finite element analysis is a very demanding task in dimensional geomechanic simulation. Domain partition by irregular grid significantly expands the length of rigidity matrix bandwidth, which also largely depends on element enumeration approach. When computational scheme geometry considerably exceeds the size of the area of the detailed exploration of strain-stress state application of traditional methods of finite elements and geometric immersion is not feasible. The paper suggests to apply a potentially more accurate computational scheme for assessing strain-stress state of three-dimensional piecewise-homogeneous elastic environment on the basis of indirect method of boundary elements. In developing potassium beds by pillar system displacement discontinuity method as a variation of boundary element method appears to be a convenient tool to compute strain-stress state, which allows taking account of relation between the top and soil of the longwall space. Based on the indirect method of boundary elements, a software package was developed that offers a computational scheme to solve the problem of evaluating strain-stress state of piecewise-homogeneous linear-elastic environment. The results of solving test problems are given that prove adequacy of the computational scheme to evaluate strain-stress state of rock.

**Keywords:** geomechanics, strain-stress state, spatial problem, setting of the problem, domain partition, boundary elements, indirect method, iterative methods, piecewise-homogeneous environment, test problems, measure of inaccuracy.

## Введение

Для решения вопросов безопасной и эффективной разработки месторождений полезных ископаемых довольно часто приходится выполнять большие объемы расчетов по оценке напряженного состояния массива горных пород. Необходимость таких расчетов особенно актуальна при разработке пластов, опасных по газодинамическим явлениям (ГДЯ). Для некоторого класса таких задач использование в геомеханических расчетах конечно-элементных методов показало их недостаточную гибкость к изменению геометрии расчетных схем и необходимость введения большого числа неизвестных в случае решения трехмерных задач [1–7]. Геомеханический анализ условий формирования зон, опасных по газодинамическим явлениям, может в значительной степени опираться на механику разрушений. Опыт показывает, что численный расчет коэффициента интенсивности напряжений при вершине трещины на основе конечных элементов является весьма ресурсоемкой задачей даже в плоской постановке, не говоря уже о пространственном геомеханическом моделировании. Это связано с тем, что разбиение области нерегулярной сеткой ведет к существенному росту ширины ленты матрицы жесткости, которая в большой степени зависит также от способа нумерации элементов. Еще одним недостатком, относящимся к конечно-элементным методам, является разрывность полей напряжений на границах конечных элементов. В тех случаях, когда геометрия расчетной схемы задачи значительно превышает по размерам область детального изучения напряженно-деформированного состояния горных пород, использование классических методов оценки напряженно-деформированного состояния горных пород, таких, как МКЭ или МГП, является нецелесообразным. Сгущение сетки конечных элементов в данной области при приме-

нении, например, МКЭ приводит к значительному росту числа узлов, и оценка объемов оперативной памяти, необходимых для расчетов некоторых конкретных задач, может на один-два порядка превышать доступные на сегодняшний день возможности вычислительных мощностей персональных компьютеров.

В этой связи предлагается использовать в расчетах более совершенные в данном смысле и потенциально более точные методы моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) горных пород, которым, однако, присущи и некоторые недостатки, сужающие класс решаемых ими задач. К таким методам в первую очередь можно отнести методы граничных элементов (МГЭ), которые снижают размерность решаемой задачи на единицу. Так, сгущение сетки граничных элементов при использовании МГЭ не приводит к значительному росту необходимых для расчетов объемов оперативной памяти, поскольку сеткой в случае объемных задач покрывается не трехмерная область, а только поверхности. Можно выделить еще одно преимущество метода граничных элементов для систем, границы которых частично находятся в бесконечности, что естественным образом согласуется с общей постановкой задач геомеханики. Поскольку процедура решения МГЭ автоматически удовлетворяет допустимым граничным условиям на бесконечности, разбиение этих границ не требуется, в то время как в методе конечных элементов границы в бесконечности должны быть аппроксимированы значительным количеством удаленных конечных элементов. Кроме того, в случае отработки калийных пластов столбовой системой разработки метод разрывных смещений, как один из вариантов МГЭ, является удобным инструментом расчета НДС, позволяющим достаточно просто учитывать взаимодействие (пригрузку) кровли и почвы выработанного пространства лавы.

В данной работе рассматривается алгоритм численной реализации непрямого МГЭ по определению НДС трехмерной кусочно-однородной линейно-упругой изотропной среды.

**Постановка краевой задачи и идеология непрямого метода граничных элементов**

Для соляного породного массива принимается кусочно-однородная линейно-упругая модель, в рамках которой напряжения, деформации и перемещения должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений и граничных условий [8]:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \times \tilde{\sigma} + \rho \times \bar{f} &= 0, \\ \tilde{\sigma} &= \tilde{D} / \tilde{\epsilon}, \\ \tilde{\epsilon} &= 0,5 \times (\bar{\nabla} \times \bar{u} + \bar{u} \times \bar{\nabla}), \\ \bar{n} \times \tilde{\sigma} &= \bar{P}, \quad \bar{x} \in \Gamma_{\sigma}, \\ \bar{u} &= \bar{U}, \quad \bar{x} \in \Gamma_u, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tilde{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\tilde{\epsilon}$  – тензор деформаций;  $\rho \times \bar{f}$  – вектор массовых сил;  $\tilde{D}$  – тензор упругих свойств;  $\bar{u}$  – вектор перемещений;  $\bar{n}$  – вектор нормали к поверхности тела;  $\bar{P}$  и  $\bar{U}$  – векторы граничных условий в напряжениях и перемещениях соответственно.

Для изотропной среды тензор  $\tilde{D}$  есть изотропный симметричный тензор четвертого ранга, тогда закон Гука принимает вид

$$\tilde{\sigma} = \lambda \times I_1 \times \tilde{g} + 2 \times \mu \times \tilde{\epsilon}, \quad (2)$$

где  $\tilde{g}$  – единичный тензор второго ранга;  $I_1$  – первый инвариант тензора деформаций;  $\lambda, \mu$  – упругие постоянные Ляме, которые определяются из выражений

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3)$$

Сущность методов граничных элементов состоит в преобразовании системы дифференциальных уравнений (1) в эквивалентную систему граничных интегральных уравнений в качестве первого шага решения задачи. Такая система уравнений будет включать значения переменных только на границе области. Методы граничных элементов делятся на прямые и не прямые варианты. В прямом варианте неизвестные функции, входящие в интегральные уравнения, являются реальными, имеющими физический смысл переменными задачи. В задачах теории упругости такое решение интегрального уравнения должно сразу давать все усилия и смещения на границе, а внутри тела они должны быть получены из граничных значений численным интегрированием. Некоторые из разработанных алгоритмов, основанных на этом подходе, описаны в работах [9–13].

В не прямом варианте интегральные уравнения полностью выражаются через фундаментальное сингулярное решение исходных дифференциальных уравнений, распределенное с неизвестной плотностью по границам рассматриваемой области. Сами по себе функции плотности не имеют определенного физического смысла, но когда они найдены (например, численным решением интегральных уравнений), значения параметров решения везде внутри тела могут быть получены из них простым интегрированием. Алгоритмы, основанные на таком подходе, использовались для решения широкого круга технических задач и представлены в работах [14–19].

Рассмотрим идеологию непрямого МГЭ для однородной среды, которая основывается на следующем физическом подходе [20]. Расчетная схема для рассматриваемого тела условно расширяется, например, до бесконечной области, в которой известны точные аналитические решения (функции влияния) от действия единичной сосредоточенной силы или единичного разрыва смещений. Ре-

шение Кельвина для единичной сосредоточенной силы  $\bar{e}(\bar{\xi})$ , действующей в бесконечной трехмерной однородной изотропной упругой среде и приложенной в т.  $\bar{\xi}$ , строится следующим образом:

$$\bar{u}(\bar{x}) = \tilde{G}(\bar{x}, \bar{\xi}) \times \bar{e}(\bar{\xi}), \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}(\bar{x}) = \tilde{T}(\bar{x}, \bar{\xi}) \times \bar{e}(\bar{\xi}), \quad (5)$$

$$\bar{t}(\bar{x}) = \tilde{F}(\bar{x}, \bar{\xi}) \times \bar{e}(\bar{\xi}), \quad (6)$$

где  $\bar{u}(\bar{x})$  – вектор перемещений в т.  $\bar{x}$ ;  $\bar{\sigma}(\bar{x})$  – тензор напряжений в т.  $\bar{x}$ ;  $\bar{t}(\bar{x})$  – вектор усилия в т.  $\bar{x}$ , действующий на площадке с нормалью  $\bar{n}$ ;  $\tilde{T}(\bar{x}, \bar{\xi})$  – тензор III ранга;  $\tilde{G}(\bar{x}, \bar{\xi})$ ,  $\tilde{F}(\bar{x}, \bar{\xi})$  – тензоры II ранга, компоненты которых в декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$G_{ij}(\bar{x}, \bar{\xi}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{y_i y_j}{r^2} \right], \quad (7)$$

$$T_{ijk}(\bar{x}, \bar{\xi}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \times \left[ \left( \delta_{ik} \frac{y_j}{r} + \delta_{jk} \frac{y_i}{r} - \delta_{ij} \frac{y_k}{r} \right) \times (1-2\nu) + 3 \frac{y_i y_j y_k}{r^3} \right], \quad (8)$$

$$F_{ij}(\bar{x}, \bar{\xi}) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \times \left[ \left( n_j \frac{y_i}{r} - n_i \frac{y_j}{r} \right) (1-2\nu) + \left( 3 \frac{y_i y_j}{r^2} + (1-2\nu)\delta_{ij} \right) \frac{y_k n_k}{r} \right], \quad (9)$$

$$y_i = x_i - \xi_i, \quad r^2 = y_i y_i, \quad (10)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\mu$  – модуль сдвига;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $n_i$  – компоненты вектора нормали  $\bar{n}$ .

Напряжения, возникающие в бесконечном линейно-упругом изотропном трехмерном пространстве в результате приложения единичного нормального разрыва смещений по оси Z, определяются по формулам [21]

$$\sigma_x = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^3} \left[ 1 - 3\beta \frac{y^2}{r^2} - 15(1-\beta) \frac{x^2 z^2}{r^4} \right],$$

$$\sigma_y = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{1}{r^3} \left[ 1 - 3\beta \frac{x^2}{r^2} - 15(1-\beta) \frac{y^2 z^2}{r^4} \right],$$

$$\sigma_z = -\frac{\mu(1-\beta)}{2\pi} \frac{1}{r^3} \left[ 1 + 6 \frac{z^2}{r^2} - 15 \frac{z^4}{r^4} \right], \quad (11)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{3\mu}{2\pi} \frac{xy}{r^5} \left[ \beta - 5(1-\beta) \frac{z^2}{r^2} \right],$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{3\mu(1-\beta)}{2\pi} \frac{yz}{r^5} \left[ 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right],$$

$$\sigma_{zx} = -\frac{3\mu(1-\beta)}{2\pi} \frac{xz}{r^5} \left[ 1 - 5 \frac{z^2}{r^2} \right],$$

где  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль сдвига,  $\beta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ .

Пользуясь принципом суперпозиции и функциями влияния, определяют такие фиктивные силы  $\bar{e}(\bar{\xi})$  (метод фиктивных нагрузок) или такие разрывы смещений (метод разрывных смещений), прикладываемые в бесконечной области на воображаемой границе тела, которые обеспечивают удовлетворение граничных условий для данного тела. Тогда, например, на основе кусочно-постоянной аппроксимации фиктивных величин (сил или разрывов смещений) на треугольных граничных элементах и принципа супер-

позиции строится система линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим некоторую область в бесконечном упругом пространстве, по поверхности  $S$  которой распределены силы  $\bar{e}(\bar{\xi})$ . Пусть в т.  $\bar{x}$  этой поверхности с внешней нормалью к телу  $\bar{n}$  задано граничное условие в напряжениях  $\bar{t}(\bar{x})$ . Тогда согласно принципу суперпозиции из формулы (6) получаем

$$\bar{t}(\bar{x}) = \oint_S \tilde{F}(\bar{x}, \bar{\xi}) \times \bar{e}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \quad (12)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{t}(\bar{x}) = \\ = \frac{1}{2} \bar{e}(\bar{x}) + \oint_S \tilde{F}(\bar{x}, \bar{\xi}) \times \bar{e}(\bar{\xi}) dS(\bar{\xi}), \end{aligned} \quad (13)$$

где поверхностный интеграл в последнем выражении следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Пусть поверхность  $S$  покрыта сеткой из  $n$  треугольных граничных элементов  $S_j$ , на каждом из которых равномерно распределена сила  $\bar{e}_j$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Тогда на граничном элементе  $S_i$ , в точке  $\bar{x}_i$  которого задано граничное условие в напряжениях  $\bar{t}_i$ , уравнения (12) и (13) преобразуются к следующему виду, поскольку постоянная распределенная сила на элементе  $\bar{e}_j$  выносятся за знак интеграла:

$$\bar{t}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{P}_{ij} \times \bar{e}_j, \quad (14)$$

где

$$\tilde{P}_{ij} = \int_{S_j} \tilde{F}(\bar{x}_i, \bar{\xi}) dS(\bar{\xi}). \quad (15)$$

Если на каждом элементе задано граничное условие в напряжениях, то получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных распределенных сил  $\bar{e}_j$ :

$$\sum_{j=1}^n \tilde{P}_{ij} \times \bar{e}_j = \bar{t}_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Аналогичным образом строится уравнение для граничного элемента  $S_i$ , на котором задано граничное условие в перемещениях:

$$\bar{u}_i = \sum_{j=1}^n \tilde{U}_{ij} \times \bar{e}_j, \quad (17)$$

где

$$\tilde{U}_{ij} = \int_{S_j} \tilde{G}(\bar{x}_i, \bar{\xi}) dS(\bar{\xi}). \quad (18)$$

В общем случае, когда на части границы области заданы нагрузки, а на другой части перемещения, в систему  $n$  уравнений для  $n$  неизвестных распределенных сил  $\bar{e}_j$  будут входить уравнения обоих видов (14) и (17). Из решения системы линейных алгебраических уравнений по найденным распределенным силам  $\bar{e}_j$  можно в произвольной точке упругой среды  $\bar{x}$  определить напряженно-деформированное состояние как суперпозицию действий всех фиктивных нагрузок  $\bar{e}_j$  или разрывов смещений:

$$\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \int \tilde{T}(\bar{x}, \bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \times \bar{e}_j, \quad (19)$$

$$\bar{u}(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n \int \tilde{G}(\bar{x}, \bar{\xi}) dS(\bar{\xi}) \times \bar{e}_j. \quad (20)$$

Компоненты тензора деформаций можно выразить из закона Гука через компоненты тензора напряжений.

### Итерационная схема решения однородной задачи

Во всех дальнейших выкладках тензоры заменены трехмерными матрицами компонент тензоров, а векторы трехмерными вектор-столбцами соответствующих компонент, записанными в каком-либо выбранном базисе, например в глобальной системе координат или в локальном базисе треугольного элемента. В последнем случае удобно проводить численное интегрирование функций

влияния по граничному элементу. Однако координаты точки наблюдения необходимо будет преобразовывать из глобальной системы координат в локальную систему элемента. Затем компоненты тензоров напряжений и деформаций, а также вектора перемещений и нагрузок необходимо преобразовывать обратно из локальной системы координат элемента в глобальную (при выводе решения) или в локальную систему другого элемента, на котором граничные условия записаны в его собственном базисе (при построении матрицы влияния).

Рассмотрим уравнение для граничного условия в напряжениях, записанное для  $i$ -го элемента:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} \times e_j = t_i, \quad (21)$$

где  $n$  – общее число элементов;  $P_{ij}$  – трехмерная матрица компонент тензора влияния  $j$ -го элемента на центральную точку  $i$ -го элемента;  $e_j$  – неизвестный трехмерный вектор-столбец фиктивных сил или разрывов смещений, распределенных на  $j$ -м элементе;  $t_i$  – трехмерный вектор-столбец граничного условия в напряжениях на  $i$ -м элементе.

Три столбца матрицы  $P_{ij}$  есть трехмерные векторы нагрузок на площадке  $i$ -го элемента в его центральной точке, создаваемые действием каждой из трех компонент вектора  $e_j$  с единичным распределением по  $j$ -му элементу.

Аналогично для граничного условия в перемещениях на  $i$ -м элементе

$$\sum_{j=1}^n U_{ij} \times e_j = u_i, \quad (22)$$

где  $u_i$  – трехмерный вектор-столбец граничного условия в перемещениях; три столбца матрицы  $U_{ij}$  есть трехмерные векторы перемещений в центральной точке  $i$ -го элемента, создаваемые действием каждой из трех компонент векто-

ра  $e_j$  с единичным распределением по  $j$ -му элементу.

В общем случае любые два элемента имеют ненулевое влияние друг на друга, поэтому матрица СЛАУ является полностью заполненной и требует для хранения значительных объемов оперативной памяти компьютера. Однако применение итерационных методов решения СЛАУ исключает необходимость в хранении в оперативной памяти всей матрицы, так как элементы матрицы можно вычислять по ходу итерационного процесса.

Влияние  $i$ -го элемента на себя является наибольшим, поэтому итерационную схему для  $i$ -го элемента определим в соответствии с методом Зейделя следующим образом [22]:

$$e_i^{(k+1)} = P_{ii}^{-1} \times \left( t_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n P_{ij} \times e_j^{(k)} \right) \quad (23)$$

из уравнения (21) или

$$e_i^{(k+1)} = U_{ii}^{-1} \times \left( u_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_{ij} \times e_j^{(k)} \right) \quad (24)$$

из уравнения (22), где  $k$  – номер шага итерационного процесса.

В качестве критерия контроля сходимости итерационного процесса можно использовать относительную норму приращения решения на соседних итерациях.

### Итерационная схема решения кусочно-однородной задачи

Для решения неоднородной задачи составляется СЛАУ для каждой однородной области и учитываются уравнения стыковки граничных условий на контакте между областями, которые имеют следующий вид (третий закон Ньютона и условие неразрывности перемещений):

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 0, \\ u_1 &= u_2, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $t_1, u_1, t_2, u_2$  – трехмерные вектор-столбцы граничных условий в напряжениях и перемещениях в точке контакта для первой и второй области соответственно.

Уравнения для элементов с заданными граничными условиями также будут иметь вид (21) или (22). В каждое  $i$ -е уравнение будут входить неизвестные  $e_j$  на элементах контура только той области, которой принадлежит  $i$ -й элемент. Таким образом, итерационные схемы для таких элементов будут также иметь вид (23) или (24) в зависимости от типа граничного условия. Для двойного (контактного)  $i$ -го элемента система уравнений (25) преобразуются к следующему виду:

$$\sum_{j \in M_1} P_{ij}^1 \times e_j^1 + \sum_{j \in M_2} P_{ij}^2 \times e_j^2 = 0, \quad (26)$$

$$\sum_{j \in M_1} U_{ij}^1 \times e_j^1 = \sum_{j \in M_2} U_{ij}^2 \times e_j^2, \quad (27)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  – множества номеров элементов, принадлежащих первой и второй области соответственно (пересечение  $M_1$  и  $M_2$  есть множество номеров двойных элементов, лежащих на контакте первой и второй области);  $P_{ij}^1, U_{ij}^1, P_{ij}^2, U_{ij}^2$  – матрицы влияния на двойной  $i$ -й элемент в напряжениях и перемещениях от элементов первой и второй области соответственно. Отметим, что на двойном  $i$ -м элементе будет два неизвестных вектора  $e_i^1, e_i^2$  для первой и второй области.

Выполним следующее тождественное преобразование СЛАУ, которое позволит построить эффективную итерационную схему для двойных элементов. Для двойного  $i$ -го элемента определим шестимерную матрицу:

$$D_i = \begin{bmatrix} P_{ii}^1 & P_{ii}^2 \\ U_{ii}^1 & -U_{ii}^2 \end{bmatrix}. \quad (28)$$

Тогда система уравнений (26), (27) преобразуется к следующему виду:

$$D_i \begin{bmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{j \in M_1/i} P_{ij}^1 \times e_j^1 + \sum_{j \in M_2/i} P_{ij}^2 \times e_j^2 \\ \sum_{j \in M_1/i} U_{ij}^1 \times e_j^1 - \sum_{j \in M_2/i} U_{ij}^2 \times e_j^2 \end{bmatrix} = 0. \quad (29)$$

Таким образом, по аналогии с методом Зейделя для двойного  $i$ -го элемента построим следующую итерационную схему:

$$\begin{bmatrix} e_i^1 \\ e_i^2 \end{bmatrix}^{(k+1)} = D_i^{-1} \times \begin{bmatrix} - \sum_{j \in M_1/i} P_{ij}^1 \times e_j^1 - \sum_{j \in M_2/i} P_{ij}^2 \times e_j^2 \\ - \sum_{j \in M_1/i} U_{ij}^1 \times e_j^1 + \sum_{j \in M_2/i} U_{ij}^2 \times e_j^2 \end{bmatrix}^{(k)}. \quad (30)$$

Следует отметить, что трехмерные матрицы  $P_{ii}, U_{ii}$  из схем (23), (24) и шестимерную матрицу  $D_i$  из схемы (30) необходимо обратить только один раз перед началом итерационного процесса.

### Результаты решения тестовых задач непрямым методом граничных элементов

На основе непрямого метода граничных элементов разработан пакет программ, реализующий предложенную вычислительную схему для решения задачи оценки напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной линейно-упругой среды, который включает следующие модули: автоматическую триангуляцию границы рассчитываемой области; построение матриц влияния граничных элементов; модуль, реализующий итерационную схему для определения фиктивных нагрузок или разрывов смещений на граничных элементах, и модуль вывода компонент тензора напряжений, тензора деформаций, вектора перемещений, главных напряжений и других характеристик НДС в заданную сетку, покрывающую анализируемую область горного массива.

Приведем некоторые результаты тестирования разработанного пакета программ для расчета напряженно-деформи-

рованного состояния линейно-упругой трехмерной кусочно-однородной среды.

Рассмотрим кубический образец с единичной длиной ребра, растягиваемый единичной распределенной нагрузкой, приложенной к одной из граней образца. На противоположной грани заданы нулевые смещения по нормали и нулевые касательные усилия. Модуль упругости равен единице, коэффициент Пуассона – 0,3. В отличие от метода конечных элементов решение данной задачи методом граничных элементов не является тривиальным. Ось  $X$  направлена в направлении приложения нагрузки, тогда в образце реализуется однородное напряженное состояние только с одной компонентой тензора напряжений отличной от нуля  $\sigma_{xx} = 1$ , а деформации  $\epsilon_{xx} = 1$ ,  $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = 0,3$ . Исследуем сходимость метода. В таблице приведены соответствующие напряжения и деформации в центральной точке куба в результате численного решения для различных разбиений поверхности образца на треугольные элементы.

Напряжения в центральной точке куба в результате численного решения для различных разбиений поверхности образца на треугольные элементы

Количество треугольных элементов	Напряжения $\sigma_{xx}$	Погрешность $\sigma_{xx}, \%$
60	0,988	1,2
156	0,996	0,4
336	1,002	0,2
1294	1,001	0,1

Результаты моделирования показали удовлетворительную сходимость метода. Уже при небольшом разбиении погрешность в центре куба не превышает 2 % для напряжений  $\sigma_{xx}$  и 5 % для поперечных деформаций  $\epsilon_{yy}$ .

Поле перемещений в направлении оси  $X$  оценивалось по результатам численного решения при разбиении границы

на 336 элементов. Точное решение определяется формулой

$$u_x(x, y, z) = x. \quad (31)$$

Результаты расчетов показали, что незначительная погрешность наблюдается вблизи поверхности куба и для различных разбиений на расстоянии характерного размера ближайшего граничного элемента до точки наблюдения погрешность не превышает 5 %.

Следующая тестовая задача заключалась в оценке напряженно-деформированного состояния вокруг выработки кругового поперечного сечения. Длина выработки, задаваемая в расчетах, составляла 50 м, радиус – 1 м. Контур поперечного сечения выработки разбивался на 32 отрезка. Сетка треугольных элементов сгущалась по длине выработки вблизи ее центральной части, где характерный размер элементов составлял 0,1. Вертикальное напряжение принималось равным единице, коэффициент бокового отпора – 0,5. На рис. 1 показаны распределения напряжений, полученные в результате численных расчетов напряженно-деформированного состояния в сравнении с известным точным решением задачи о выработке круглого поперечного сечения [23]. Как видно из рис. 1, численное решение вполне соответствует точному. Незначительное отклонение от точного решения наблюдается вблизи поверхности выработки, что вызвано в первую очередь неточной аппроксимацией окружности 32-угольником.

Еще в одной тестовой задаче оценивалось напряженно-деформированное состояние вокруг сферической полости в бесконечной среде, находящейся под давлением газа. Рассматривалась сферическая полость единичного радиуса, нагруженная единичной распределенной нагрузкой, направленной против нормали к поверхности. Тогда в сферических координатах точное значение напряжения определяется по формуле

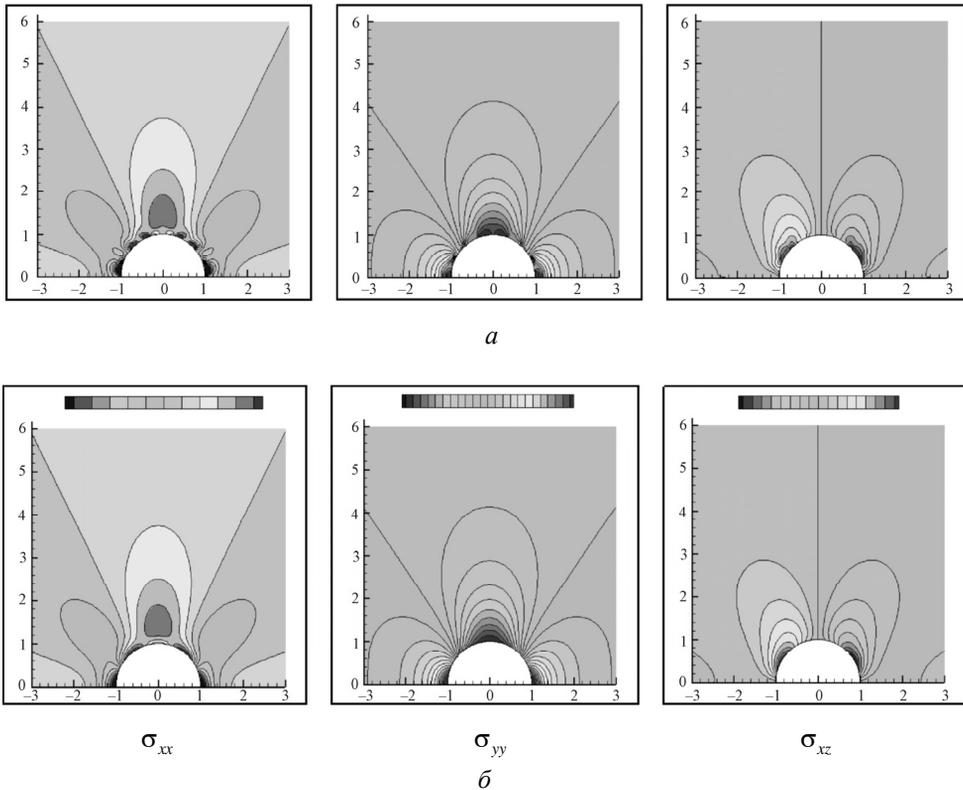


Рис. 1. Расчетное (а) и точное (б) распределение напряжений в долях единицы вокруг выработки кругового поперечного сечения

$$\sigma_{rr}(r) = -1/r^3. \quad (32)$$

Расчеты проводились для сферы, разбитой на 996 треугольных элементов. Результаты численного моделирования показали удовлетворительное соответствие точному решению (рис. 2). Так, погрешность численного решения с помощью разработанного алгоритма, реализующего не прямой метод граничных элементов, достигает своего максимального значения на расстоянии от сферы порядка одного ее радиуса и не превышает величины 2,5 %.

В целом результаты решения тестовых задач по оценке напряженно-деформированного состояния линейно-упругой трехмерной кусочно-однородной среды показали достаточно высокую точность и эффективность разработанного алго-

ритма, реализующего не прямой метод граничных элементов.

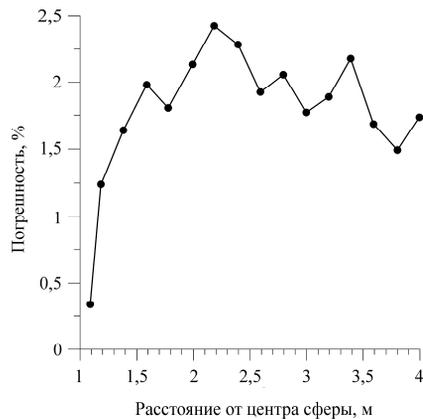


Рис. 2. Распределение погрешности численной оценки напряжений  $\sigma_{rr}$  на различном расстоянии от сферической полости

## Заключение

Результаты разработки вычислительной схемы оценки напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной трехмерной упругой среды на основе непрямого метода граничных элементов позволяют сделать следующие выводы:

1. На основе непрямого метода граничных элементов разработана вычислительная схема решения задачи оценки напряженно-деформированного состояния трехмерной кусочно-однородной линейно-упругой среды, реализующая итерационный метод решения общей системы линейных алгебраических уравнений относительно одинарных и двойных (контактных) граничных элементов за счет разрешения уравнения граничного или контактного условия относительно неизвестных фиктивных усилий.

2. Разработан пакет программ, реализующий вычислительную схему решения задачи оценки напряженно-деформиро-

ванного состояния кусочно-однородной линейно-упругой среды, который включает следующие модули: автоматическую триангуляцию границы рассчитываемой области; построение матриц влияния граничных элементов; модуль, реализующий итерационную схему для определения фиктивных нагрузок или разрывов смещений на граничных элементах, и модуль вывода компонент тензора напряжений и деформаций, вектора перемещений, главных напряжений и других характеристик НДС в заданную сетку, покрывающую анализируемую область горного массива.

3. Результаты решения тестовых задач показали достаточно высокую точность и эффективность разработанного алгоритма, реализующего не прямой метод граничных элементов. Максимальная погрешность решения задачи о напряженно-деформированном состоянии реализуется вблизи поверхности тела и на расстоянии характерного размера ближайшего граничного элемента до точки поля не превышает 5 %.

## Список литературы

1. Расчетные методы в механике горных ударов и выбросов: справ. пособие / И.М. Петухов, А.М. Линьков, В.С. Сидоров [и др.]. – М.: Недра, 1992. – 256 с.
2. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Метод квазифункции Грина в механике деформируемого твердого тела. – Минск: Университетское, 1993. – 180 с.
3. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Теоретические основы деформационной механики блочно-слоистого массива соляных пород. – Минск: Университетское, 1995. – 255 с.
4. Громадка П.Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
5. Геомеханическое моделирование внезапных разрушений пород почвы горных выработок / И.А. Подлесный, С.П. Береснев, С.С. Андрейко, С.В. Некрасов, Н.А. Литвиновская // Горный журнал. – 2010. – № 8. – С. 28–30.
6. Щерба В.Я., Башура А.Н., Андрейко С.С. Управление газодинамическими процессами на Старобинском месторождении калийных солей. – М.: Изд-во МГГУ, 2004. – 194 с.
7. Андрейко С.С., Некрасов С.В. Алгоритм решения неоднородной трехмерной упругой задачи непрямым методом граничных элементов // Известия вузов. Горный журнал. – 2004. – № 1. – С. 26–29.
8. Демидов С.П. Теория упругости. – М.: Высш. шк., 1979. – 432 с.
9. Cruse T.A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics // International Journal of Solids and Structures. – 1969. – Vol. 5. – P. 1259–1274. DOI: 10.1016/0020-7683(69)90071-7
10. Cruse T.A., Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1968. – Vol. 22, iss. 2. – P. 244–259. DOI: 10.1016/0022-247X(68)90177-7
11. Lachat J.C. Further developments of the boundary integral techniques for elastostatic. Ph. D. thesis / Southampton Univ. – Southampton, 1975.
12. Rizzo F.J., Shippy D.J. An advanced boundary equation method for three-dimensional thermo-elasticity // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1977. – Vol. 11, iss. 11. – P. 1753. DOI: 10.1002/nme.1620111109
13. Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике / под ред. Т. Круза и Ф. Риццо. – М.: Мир, 1978. – 210 с.
14. Banerjee P.K. Integral equation methods for analysis of piecewise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape // Int. J. Mech. Sci. – 1976. – Vol. 18. – P. 293–303.

15. Banerjee P.K., Butterfield R. Boundary element methods in geomechanics // *Finite elements in geomechanics* / ed. by G. Gudehus. – London: Wiley, 1977.
16. Tomlin G.R., Butterfield R. Elastic analysis of zone orthotropic continua // *Proc. ASCE. Engng Mech. Div.* – 1974. – Vol. EM3. – P. 511–529.
17. Oliveira E.R. Plane stress analysis by a general integral method // *J. ASCE. Eng. Mech. Div.* – 1968. – Febr. – P. 79–85.
18. Watson J.O. Analysis of thick shells with holes by using integral equation method. Ph. D. thesis / Southampton Univ. – Southampton, 1973.
19. Jaswon M.A., Symm G.T. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. – London: Academic Press, 1977.
20. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 327 с.
21. Морарь Г.А. Метод разрывных решений в механике деформируемых твердых тел. – Кишинев: Штиинца, 1990. – 130 с.
22. Каханер Д., Мулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение: пер. с англ. – М.: Мир, 2001. – 575 с.
23. Введение в механику скальных пород: пер. с англ. / под ред. Х. Бока. – М.: Мир, 1983. – 276 с.

#### References

1. Petukhov I.M., Lin'kov A.M., Sidorov V.S. [et al.]. Raschetnye metody v mekhanike gornyykh udarov i vybrosov [Computational methods in mechanics of rock bumps and outbreaks]. Moscow: Nedra, 1992. 256 p.
2. Martynenko M.D., Zhuravkov M.A. Metod kvazifunktsii Grina v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Quasi-Green's function method in mechanics of deformable solids]. Minsk: Universitetskoe, 1993. 180 p.
3. Martynenko M.D., Zhuravkov M.A. Teoreticheskie osnovy deformatsionnoi mekhaniki blochno-sloistogo massiva solianyykh porod [Theoretical background of deformation mechanics in block-layered saliferous rock]. Minsk: Universitetskoe, 1995. 255 p.
4. Gromadka P.T., Lei Ch. Kompleksnyi metod granichnykh elementov v inzhenernykh zadachakh [Integrated method of boundary elements in engineering problems]. Moscow: Mir, 1990. 303 p.
5. Podlesnyi I.A., Beresnev S.P., Andreiko S.S., Nekrasov S.V., Litvinovskaia N.A. Geomekhanicheskoe modelirovanie vnezapnykh razrushenii porod pochvy gornyykh vyrabotok [Geomechanical simulation of simultaneous failures in mine workings]. *Gornyy zhurnal*, 2010, no. 8, pp. 28-30.
6. Shcherba V.Ia., Bashura A.N., Andreiko S.S. Upravlenie gazodinamicheskimi protsessami na Starobinskom mestorozhdenii kaliinykh solei [Control of gas-dynamic processes in Starobinskoye deposit of potassium salts]. *Moskovskii gosudarstvennyi gumanitarnyi universitet*, 2004. 194 p.
7. Andreiko S.S., Nekrasov S.V. Algoritm resheniia neodnorodnoi trekhmernoi uprugoi zadachi nepriamym metodom granichnykh elementov [Algorithm of solving a non-homogeneous three-dimensional elastic problem by indirect method of boundary elements]. *Izvestia vuzov. Gornyy zhurnal*, 2004, no. 1, pp. 26-29.
8. Demidov S.P. Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]. Moscow: Vysshaia shkola, 1979. 432 p.
9. Cruse T.A. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *International Journal of Solids and Structures*, 1969, vol. 5, pp. 1259-1274. DOI: 10.1016/0020-7683(69)90071-7
10. Cruse T.A., Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1968, vol. 22, iss. 2, pp. 244-259. DOI: 10.1016/0022-247X(68)90177-7
11. Lachat J.C. Further developments of the boundary integral techniques for elastostatic. Ph. D. thesis. Southampton University, 1975.
12. Rizzo F.J., Shippy D.J. An advanced boundary equation method for three-dimensional thermo-elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1977, vol. 11, iss. 11, p. 1753. DOI: 10.1002/nme.1620111109
13. Metod granichnykh integral'nykh uravnenii. Vychislitel'nye aspekty i prilozheniia v mekhanike [Method of boundary integral equations Computational aspects and applications in mechanics]. Eds. T. Kruz, F. Ritstso. Moscow: Mir, 1978. 210 p.
14. Banerjee P.K. Integral equation methods for analysis of piecewise non-homogeneous three-dimensional elastic solids of arbitrary shape. *Int. J. Mech. Sci.*, 1976, vol. 18, pp. 293-303.
15. Banerjee P.K., Butterfield R. Boundary element methods in geomechanics. *Finite elements in geomechanics*. Ed. by G. Gudehus. London: Wiley, 1977.
16. Tomlin G.R., Butterfield R. Elastic analysis of zone orthotropic continua. *Proc. ASCE. Engng Mech. Div.*, 1974, vol. EM3, pp. 511-529.
17. Oliveira E.R. Plane stress analysis by a general integral method. *J. ASCE. Eng. Mech. Div.*, 1968, Febr., pp. 79-85.
18. Watson J.O. Analysis of thick shells with holes by using integral equation method. Ph. D. thesis. Southampton University, 1973.
19. Jaswon M.A., Symm G.T. Integral equation methods in potential theory and elastostatics. London: Academic Press, 1977.
20. Krauch S., Starfild A. Metody granichnykh elementov v mekhanike tverdogo tela [Methods of boundary elements in solid mechanics]. Moscow: Mir, 1987. 327 p.
21. Morar' G.A. Metod razryvnykh reshenii v mekhanike deformiruemyykh tverdykh tel [Method of discontinuous solution in mechanics of deformable solids]. Kishinev: Shtiintsa, 1990. 130 p.
22. Kakhaner D., Moulér K., Nesh S. Chislennyye metody i programnoe obespechenie [Numerical methods and software]. Moscow: Mir, 2001. 575 p.
23. Vvedenie v mekhaniku skal'nykh porod [An introduction to rock mechanics]. Ed. by Kh. Boka. Moscow: Mir, 1983. 276 p.

## Об авторах

**Некрасов Сергей Викторович** (Пермь, Россия) – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории геотехнологических процессов и рудничной газодинамики Горного института Уральского отделения РАН (614007, г. Пермь, ул. Сибирская, 78а; e-mail: miner@mi-perm.ru).

**Андрейко Сергей Семенович** (Пермь, Россия) – доктор технических наук, профессор, заведующий лабораторией геотехнологических процессов и рудничной газодинамики Горного института Уральского отделения РАН (614007, г. Пермь, ул. Сибирская, 78а; e-mail: ssa@mi-perm.ru).

## About the authors

**Sergei V. Nekrasov** (Perm, Russian Federation) – Ph.D. in Technical Sciences, Researcher, Laboratory of Geotechnological Processes and Mining Gasdynamics, Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (614007, Perm, Sibirskaya st., 78a; e-mail: miner@mi-perm.ru).

**Sergei S. Andreiko** (Perm, Russian Federation) – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Laboratory of Geotechnological Processes and Mining Gasdynamics, Mining Institute of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (614007, Perm, Sibirskaya st., 78a; e-mail: ssa@mi-perm.ru).

Получено 01.04.2015

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Некрасов С.В., Андрейко С.С. Вычислительная схема оценки напряженно-деформированного состояния кусочно-однородной трехмерной упругой среды на основе непрямого метода граничных элементов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Геология. Нефтегазовое и горное дело. – 2015. – № 16. – С. 86–97. DOI: 10.15593/2224-9923/2015.16.10

Please cite this article in English as:

Nekrasov S.V., Andreiko S.S. Computational scheme of evaluating strain-stress state of piecewise-homogeneous three-dimensional elastic environment based on indirect method of boundary elements. *Bulletin of PNRPU. Geology. Oil & Gas Engineering & Mining*, 2015, no. 16, pp. 86-97. DOI: 10.15593/2224-9923/2015.16.10