УДК 519.1

И.П. НЕПОРОЖНЕВ
Пермский государственный технический университет

РАСКРАСКИ РЕБЕР ПОЛНОГО 5-ВЕРШИННОГО ГРАФА БЕЗ ПЕТЕЛЬ

В работе рассматриваются различные, с точностью до переобозначений вершин и ребер, раскраски ребер полного 5-вершинного графа без петель в различные числа цветов при условии, что в каждой вершине сходятся ребра различного цвета. Приводятся их группы автоморфизмов[1].

Вершины графа обозначаем буквами *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, ребра – номерами 1, 2, 3, 4, … Полный 3-граф без петель с сохранением в дальнейшем лексикографического расположения номеров в первой строке симметрического квадрата с пустой главной диагональю будет иметь один из двух следующих видов:

$$\Delta 1 = \begin{array}{c|c|c|c|} & A & B & C \\ \hline A & X & 1 & 2 \\ \hline B & 1 & X & 3 \\ \hline C & 2 & 3 & X \\ \hline \end{array}$$

$$\Delta 2 = \begin{array}{c|c|c|c|} & A & B & C \\ \hline A & X & 1 & 2 \\ \hline B & 1 & X & 4 \\ \hline C & 2 & 4 & X \\ \hline \end{array}$$

Группа автоморфизмов 3-графа является группой треугольника, имеет порядок 6 и образующие $t = (BC)(12)$ и $w = (ABC)(132)$, или $w = (ABC)(142)$.

Множество допустимых элементов, образующих пучки ребер, соединяющих четвертую вершину *D* с вершинами *A*, *B*, *C*, состоит из восьми следующих элементов: $1(321)$, $2(32*)$, $3(3*1)$, $4(*21)$, $5(3**)$, $6(*2*)$, $7(**1)$, $8(***)$, где звездочки означают новые цвета из чисел $4, 5, 6$. Это множество относительно группы автоморфизмов 3-графа образует четыре класса транзитивности: (1), $(2, 3, 4)$, $(5, 6, 7)$, (8). Оче-

[1] Непорожнев И.П. Раскраска ребер обыкновенного полного шестивершинного графа в восемь цветов // Сборник рефератов депонированных рукописей. Вып. 17. Сер. Б. Инв. NB 1962. 1991.

видно, что эти четыре класса транзитивности соответствуют четырем различным раскраскам ребер 4-графа в числа цветов $\sigma = 3, 4, 5, 6$.

В дальнейшем будем рассматривать следующие *базисные 4-графы*.

	A	*B*	*C*	*D*
A	X	1	2	3
B		X	4	5
C			X	6
D	IV			X

	A	*B*	*C*	*D*
A	X	1	2	3
B		X	4	2
C			X	1
D	II			X

	A	*B*	*C*	*D*
A	X	1	2	3
B		X	4	5
C			X	1
D	III			X

	A	*B*	*C*	*D*
A	X	1	2	3
B		X	3	2
C			X	1
D	I			X

Подгруппа группы автоморфизмов 3-графа, сохраняющая вершину *D* графа I, совпадает со всей группой. Меняя вершину *D* с каждой из вершин *A*, *B*, *C*, получаем дополнительные отображения графа I в себя. Группа автоморфизмов графа I имеет порядок $6*4=24$ и образующие $w=(ABC)(132)$, $s_1=(ABCD)(13)$.

Подгруппа группы автоморфизмов 3-графа, сохраняющая вершину *D* графа II, имеет порядок 2 и образующую *t*. Меняя вершину *D* с одной из вершин классов транзитивности (A) и (B,C), получаем дополнительные отображения графа II в себя. Группа автоморфизмов графа II имеет порядок $2*2*2=8$ и образующие $s_2=(ABDC)(12)(34)$, $t_2=(AB)(CD)(34)$.

Подгруппа группы автоморфизмов 3-графа, сохраняющая вершину *D* графа III, имеет порядок 2 и образующую *t*. Аналогично предыдущему получаем группу автоморфизмов графа III порядка 8 с образующими $s_3=(ACBD)(2453)$, $t_3=(AD)(BC)(25)$.

Подгруппа группы автоморфизмов 3-графа, сохраняющая вершину *D* графа IV совпадает со всей группой, имеет порядок 24 и образующие $s_4=(ABCD)(1463)(25)$, $t_4=(CD)(23)(45)$.

Дальнейшее решение задачи о различных раскрасках ребер полного 5-графа без петель проводится аналогичным образом. Именно, составляются множества пучков ребер, соединяющих вершину *E* с вершинами *A*, *B*, *C*, *D*, и разбиваются на классы транзитивности относительно групп автоморфизмов базисных 4-графов. Для произвольно выбранного элемента каждого класса транзитивности находится подгруппа группы автоморфизмов соответствующего 4-графа, сохраняющая выбранный элемент (вершину *E*) и разбивающая вершины *A*, *B*, *C*, *D* каждого 4-графа на классы транзитивности вершин. Меняя местами вершину *E* с одним из элементов каждого класса транзитивности вершин, находим как изоморфизмы, так и автоморфизмы новых базисных 5-графов.

С базисным графом I определяем выбор вершины *E* и получаем пятивершинный граф $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I} + 4567$.

С базисным графом II выбор вершины *E* возможен девятью следующими способами, составляющими три класса транзитивности.

1.43**	2.4*3*	3.*3*4	4.**34	5.4***
6.*3**	7.**3*	8.***4	9.****	

Классы транзитивности: 1(1, 2, 3, 4), 2(5, 6, 7, 8), 3(9).

С базисным графом III выбор вершины *E* возможен 47 следующими способами, составляющими 9 классов транзитивности.

1.4352	2.5234	3.423*	4.425*	5.435*
6.523*	7.43*2	8.52*4	9.53*2	10.53*4
11.4*32	12.4*52	13.5*32	14.5*34	15.*234
16.*254	17.*352	18.*354	19.42**	20.43**
21.52**	22.53**	23.4*3*	24.4*5*	25.5*3*
26.4**2	27.5**2	28.5**4	29.*23*	30.*25*
31.*35*	32.*2*4	33.*3*2	34.*3*4	35.**32
36.**34	37.**52	38.**54	39.4***	40.5***
41.*2**	42.*3*	43.**3*	44.**5*	46.***4
47.****				

Классы транзитивности: 1 (1, 2), 2 (5, 6, 7, 8, 12,14,15,17), 3 (3, 4, 9 ,10, 11, 13, 16, 18), 4 (20, 21, 36, 37), 5 (23, 27, 30, 34), 6 (24, 25, 26, 28, 29, 31, 32, 33), 7 (19, 22, 35, 38), 8 (39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46), 9 (47).

С базисным графом IV выбор вершины *E* возможен 163 способами.

1.4231	2.4251	3.4312	4.4351	5.4352
6.4612	7.4631	8.4632	9.4651	10.4652
11.5214	12.5231	13.5234	14.5312	15.5314
16.5612	17.5614	18.5631	19.5632	20.5634
21.6214	22.6231	23.6234	24.6251	25.6254
26.6312	27.6314	28.6351	29.6352	30.6354
31.421*	32.423*	33.425*	34.431*	35.435*
36.461*	37.463*	38.465*	39.521*	40.523*
41.531*	42.561*	43.563*	44.621*	45.623*
46.625*	47.631*	48.635*	49.42*1	50.43*1
51.43*2	52.46*1	53.46*2	54.52*1	55.52*4

56.53*1	57.53*2	58.53*4	59.56*1	60.56*2
61.56*4	62.62*1	63.62*4	64.63*1	65.63*2
66.63*4	67.4*12	68.4*31	69.4*32	70.4*51
71.4*52	72.5*12	73.5*14	74.5*31	75.5*32
76.5*34	77.6*12	78.6*14	79.6*31	80.6*32
81.6*34	82.6*51	83.6*52	84.6*54	85.*214
86.*231	87.*234	88.*251	89.*254	90.*312
91.*314	92.*351	93.*352	94.*354	95.*612
96.*614	97.*631	98.*632	99.*634	100.*651
101.*652	102.*654	103.42**	104.43**	105.46**
106.52**	107.53**	108.56**	109.62**	110.63**
111.4*1*	112.4*3*	113.4*5*	114.5*1*	115.5*3*
116.6*1*	117.6*3*	118.6*5*	119.4**1	120.4**2
121.5**1	122.5**2	123.5**4	124.6**1	125.6**2
126.6**4	127.*21*	128.*23*	129.*25*	130.*31*
131.*35*	132.*61*	133.*63*	134.*65*	135.*2*1
136.*2*4	137.*3*1	138.*3*2	139.*3*4	140.*6*1
141.*6*2	142.*6*4	143.**12	144.**14	145.**31
146.**32	147.**34	148.**51	149.**52	150.**54
151.4***	152.5***	153.6***	154.*2**	155.*3**
156.*6**	157.**1*	158.**3*	159.**5*	160.***1
161.***2	162.***4	163.****		

Классы транзитивности: 1 ((1), 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26, 28, 29, 30); 2 (5,(7),13, 16, 24, 27); 3 (31, 56, (80), 102); 4 (32, 33, 34, 36, 39, 44, 50, (54), 57, 58, 59, 64, 69, 75, 77, 79, 81, 83, 89, 94, 96, 99, 100, 101); 5(35, 37, 40, 42, 46, (47), 51, 52, 55, 60, 62, 66, 68, 71, 72, 76, 78, 82, 87, 88, 91, 93, 95, 97); 6 ((38), 41, 45, 49, 61, 65, 67, 74, 84, 85, 92, 98); 7 (43, 48, 53, 63, 70, 73, (86), 90); 8 (103, 107, 111, 117, 121, 125, (127), 134, 137, 142, 146, 150); 9 (104, 106, 112, (116), 122, 124, 129, 132, 139, 140, 147, 149); 10 (105, 108, 109, 110, 113, 114, 115, 118, 119, 120, 123, 126, 128, 130, 131, 133, (135), 136, 138, 141, 143, 144, 145, 148); 11(151, 152, (153), 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162); 12 (163).

Далее рассматриваем полученные 25 следующих 5-графов, заменяя звездочки в выделенных представителях классов транзитивности новыми номерами.

$\mathrm{I}_1 = \mathrm{I} + 4567$ $\quad$ $\mathrm{II}_1 = \mathrm{II} + 4356$ $\quad$ $\mathrm{II}_5 = \mathrm{II} + 4567$

$\mathrm{II}_9 = \mathrm{II} + 5678$ $\quad$ $\mathrm{III}_1 = \mathrm{III} + 4352$ $\quad$ $\mathrm{III}_5 = \mathrm{III} + 4356$

$\mathrm{III}_{13} = \mathrm{III} + 5632$ $\quad$ $\mathrm{III}_{20} = \mathrm{III} + 4367$ $\quad$ $\mathrm{III}_{23} = \mathrm{III} + 4637$

$\mathrm{III}_{24}=\mathrm{III}+4657$ $\mathrm{III}_{35}=\mathrm{III}+6732$ $\mathrm{III}_{39}=\mathrm{III}+4678$

$\mathrm{III}_{47}=\mathrm{III}+6789$ $\mathrm{IV}_{1}=\mathrm{IV}+4231$ $\mathrm{IV}_{7}=\mathrm{IV}+4631$

$\mathrm{IV}_{38}=\mathrm{IV}+4657$ $\mathrm{IV}_{47}=\mathrm{IV}+6317$ $\mathrm{IV}_{54}=\mathrm{IV}+5271$

$\mathrm{IV}_{80}=\mathrm{IV}+6732$ $\mathrm{IV}_{86}=\mathrm{IV}+7231$ $\mathrm{IV}_{116}=\mathrm{IV}+6718$

$\mathrm{IV}_{127}=\mathrm{IV}+7218$ $\mathrm{IV}_{135}=\mathrm{IV}+7281$ $\mathrm{IV}_{153}=\mathrm{IV}+6789$

$\mathrm{IV}_{163}=\mathrm{IV}+78910$

Переставляя местами вершину *E* с вершинами *A*, *B*, *C*, *D*, получаем как изоморфизмы, так и автоморфизмы полных 5-графов.

Рассмотрим граф $\mathrm{I}_1=\mathrm{I}+4567$. Подгруппа группы автоморфизмов графа I, сохраняющая выбранную вершину *E*, совпадает со всей группой и образует один класс транзитивности вершин (*A*, *B*, *C*, *D*).

Достаточно сделать перестановку вершин *D* и *E* и привести полученную раскраску ребер подграфа к одной из базовых раскрасок 4-графов. Схематически эти действия можно изобразить следующим образом.

$\mathrm{I}_1\xrightarrow{(DE)}\Delta 1+456+3217\xrightarrow{(34)}\Delta 2+356+4217=\mathrm{IV}+4217\xrightarrow{S_4^2}\mathrm{IV}+6732=\mathrm{IV}_{80}$,

где $S_4^2=(AC)(BD)(16)(34)$. Результирующая подстановка $(AC)(BDE)(16)$ отображает граф I_1 в граф IV_{80}. Группа автоморфизмов графа I_1 совпадает с группой автоморфизмов графа I, ее образующими служат подстановки $w_1=(ABC)(132)(456)$, $S_1=(ABCD)(13)(4567)$.

Для графа $\mathrm{II}_1=\mathrm{II}+4356$ подгруппа группы автоморфизмов графа II, сохраняющая вершину *E*, имеет образующую $t_2=(AB)(CD)(34)$. Множество вершин графа II относительно этой подгруппы образует два класса транзитивности вершин (*A*,*B*), (*C*,*D*). В этом случае подстановки $(BDE)(1354)$ и $(BED)(143)(56)$ отображают, соответственно, граф II_1 в графы III_{13} и IV_1. Группа автоморфизмов графа II_1 имеет порядок 2 и образующую $\tilde{t}_2=(AB)(CD)(34)(56)$.

Для графа $\mathrm{II}_5=\mathrm{II}+4567$ подгруппа автоморфизмов графа II, сохраняющая вершину *E*, имеет порядок 2 и образующую $t_2S_2=(BC)(12)(56)$. Множество вершин графа II относительно подгруппы образует три класса транзитивности вершин (*A*), (*B*, *C*) и (*D*).

Перестановка вершин D и E приводит к следующей схеме преобразований:

$$\mathrm{II}_5 = \Delta 2 + 321 + 4567 \xrightarrow{(DE)} \Delta 2 + 456 + 3217 \in \xrightarrow{(36)} \Delta 2 + 453 +$$
$$+ 6217 \xrightarrow{w^2} \Delta 2 + 531 + 4267 \xrightarrow{(35)} \Delta 2 + 351 + 4267 =$$
$$= \mathrm{III} + 4267 \xrightarrow{S_3^{-1}} \mathrm{III} + 6732 = \mathrm{III}_{35}.$$

Результирующая подстановка (BDE)(1364) отображает граф II_5 в III_{35}.

Перестановка вершин C и E, с предварительной перестановкой вершины C на место D подстановкой t_2, приводит к следующей схеме:

$$\mathrm{II}_5 \xrightarrow{t_2} \mathrm{II} + 5376 = \Delta 2 + 321 + 5376 \xrightarrow{(DE)} \Delta 2 + 537 + 3216 \xrightarrow{(35)(67)} \Delta 2 +$$
$$+ 356 + 5217 = \mathrm{IV} + 5217 = \mathrm{IV}_{39}.$$

Подстановка $t_4 S_4^2 t_4 S_4^2 = (AB)(CD)(25)(34)$ отображает граф IV_{39} в граф IV_{54}. Результирующая подстановка (CE)(254)(67) отображает граф II_5 в граф IV_{54}. Аналогично, перестановка вершин A и E, с предварительной перестановкой вершины A на место D, приводит к подстановке (AE)(1625)(37), отображающей граф II_5 в граф IV_{38}. Порядок группы автоморфизмов графа II_5 равен 2, образующая $t_2 S_2$.

Для графа $\mathrm{II}_9 = \mathrm{II} + 5678$ подгруппа группы автоморфизмов, сохраняющая вершину E, совпадает со всей группой. Множество вершин графа II относительно этой подгруппы образует один класс транзитивности вершин. Перестановка вершин D и E приводит к подстановке (DE)(3765), отображающей граф II_9 в граф IV_{127}. Порядок группы автоморфизмов графа II_9 равен 8, образующие S_2=($ABDC$)(2453) и t_2= (AB)(CD)(34)(78)(56).

Для графа III_1 = III + 4352 подгруппа группы автоморфизмов графа III, сохраняющая вершину E, совпадает со всей группой. Множество вершин графа III относительно этой подгруппы образует один класс транзитивности вершин. Перестановка вершин D и E приводит к автоморфизму $u = (ABCED)(14532)$ графа III_1. Порядок группы автоморфизмов графа III_1 равен 20, ее образующие S_3 и u.

Для графа $\mathrm{III}_{20} = \mathrm{III} + 4367$ множество вершин графа III относительно автоморфизма $(AB)(CD)(25)(34)(67)$ образует два класса транзитивности вершин. Подстановки $(AC)(DE)(14)(356)$ и $(BE)(164)(57)$ отображают, соответственно, граф III_{20} в графы III_{24} и IV_{47}. Порядок группы автоморфизмов графа III_{20} равен 2.

Для графа $\mathrm{III}_{23} = \mathrm{III} + 4637$ множество вершин графа III относительно автоморфизма $(AC)(BD)(34)(67)$, сохраняющего вершину E, образует два класса транзитивности вершин. Перестановка вершин D и E приводит к автоморфизму $(AC)(DE)(14)(56)$ графа III_{23}. Подстановка $(CE)(2764)$ отображает граф III_{23} в граф IV_{86}. Подстановка $(BED)(143)(567)$ является автоморфизмом графа III_{23}. Порядок группы автоморфизмов графа III_{23} равен 6.

Для графа III_{39} подгруппа группы автоморфизмов графа III, сохраняющая вершину $E(4678)$, является тождественной. Множество вершин графа III относительно этой подгруппы образует четыре класса транзитивности вершин. Перестановка D и E приводит к автоморфизму $(AC)(DE)(14)(37)(56)$ графа III_{39}. Подстановки $(CE)(27864)$ и $(BE)(1674)(58)$ соответственно отображают граф III_{39} в графы IY_{135} и IY_{116}. Порядок группы автоморфизмов графа III_{39} равен 2.

Для графа $\mathrm{III}_{47} = \mathrm{III} + 6789$ подстановки $(CD)(23)(45)(89)$ и $(ACBD)(2453)(6879)$ являются его автоморфизмами, сохраняющими вершину E. Перестановка вершин D и E приводит к подстановке $(ADEBC)(1658)(23974)$, отображающей граф III_{47} в граф IY_{153} . Порядок группы автоморфизмов графа III_{47} равен 8.

Для графа $\mathrm{IV}_7 = \mathrm{IV} + 4631$ подстановка $S_4 = (ABCD)(1463)(25)$ является его автоморфизмом, сохраняющим вершину E. Перестановка вершин D и E приводит к подстановке $(BDE)(137)(56)$, отображающей граф IV_7 в граф III_5. Порядок группы автоморфизмов графа IV_7 равен 4.

Для графа $\mathrm{IV}_{163} = \mathrm{IV} + 78910$ подстановки $(CD)(23)(45)(910)$ и $(ABCD)(1463)(25)(78910)$, образующие группу порядка 24, являются его автоморфизмами, сохраняющими вершину E. Перестановка вершин D и E приводит к автоморфизму $(DE)(37)(58)(69)$ графа IV_{163}. Порядок группы автоморфизмов графа IV_{163} равен 48

В результате получено 11 классов эквивалентности раскраски ребер полного пятивершинного графа S^5 без петель в число цветов $\sigma \le 10$. Соответствующие базисные 5-графы, их группы автоморфизмов и числа σ раскраски их ребер приведены в таблице ниже.

№	S^5	$\lvert G \rvert$	σ	$\langle G \rangle$

1	I_1	24	7	$w_1 = (ABC)(132)(456)$, $s_1 = (ABCD)(13)(4567)$
2	II_1	2	6	$t_2 = (AB)(CD)(34)(56)$
3	II_5	2	7	$t_2 S_2 = (BC)(12)(56)$
4	II_9	8	8	$s_2 = (ABDC)(12)(34)(5687)$, $\tau_2 = (AB)(CD)(34)(56)(78)$
5	III_1	20	5	$s_3 = (ACCD)(2453)$, $u = (ABCED)(14523)$
6	III_{20}	2	7	$\overline{s_3^2} = (AB)(CD)(25)(34)(67)$
7	III_{23}	6	7	$s_3 t_3 = (AC)(BD)(34)(67)$ $l = (AC)(DE)(14)(56)$
8	III_{39}	2	8	$p = (AC)(DE)(14)(37)(56)$
9	III_{47}	8	9	$t_3 = (CD)(23)(45)(89)$ $\overline{s_3} = (ACBD)(2453)(6879)$
10	IV_7	4	6	$s_4 = (ABCD)(1463)(25)$
11	IV_{163}	48	10	$t_4 = (CD)(23)(45)(910)$ $\overline{s_4} = (ABCD)(25)(1463)(78910)$ $d = (DE)(37)(58)(69)$

Продолжение работы может быть связанно с перечислением различных минимальных и близких к ним раскрасок ребер полного 6-графа без петель.