УДК 517.988

А.Р. Абдуллаев, А.А. Савочкина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рассматривается периодическая краевая задача для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены достаточные условия существования решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, периодическая задача, резонанс.

A.R. Abdullaev, A.A. Savochkina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russian Federation

SOLVABILITY OF THE PERIODIC PROBLEM FOR A SYSTEM OF TWO DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER

Periodic boundary value problem for a system of two ordinary differential equation is consider. Sufficient conditions for existence of solutions of the problem are obtained.

Keywords: system of differential equations, periodic problem, the resonance.

Рассмотрим периодическую краевую задачу для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка:

$$\begin{cases} x_1'(t) = f_1\left(t, x_1(t), x_2(t)\right), \\ x_2'(t) = f_2\left(t, x_1(t), x_2(t)\right), \end{cases} \tag{1}$$

$$x_1(0) = x_1(\omega), x_2(0) = x_2(\omega), \tag{2}$$

где $t \in [0,\omega]$, $x_1, x_2 : [0,\omega] \to R^1$ – искомые функции; функции $f_1, f_2 : [0,\omega] \times R^1 \times R^1 \to R^1$ удовлетворяют условиям Каратеодори.

Исследованию задачи (1), (2) уделяется значительное внимание в классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Литература, посвященная исследованию задачи (1), (2) и ее частных случаев, весьма обширна, и ее обзор в пределах статьи не представляется возможным. Отметим только, что в последние десятилетия для исследования периодических краевых задач применяется подход, основанный на использовании теорем существования для квазилинейных операторных уравнений в случае резонанса ([1]). Такая же схема применяется в данной работе, а именно: задача (1), (2) рассматривается как одно операторное уравнение

$$Lx = Fx, \tag{3}$$

с фредгольмовым линейным ограниченным оператором $L : X \to Y$ и вполне непрерывным оператором $F : X \to Y$; X, Y – действительные банаховы пространства. Используемая в работе теорема существования для операторного уравнения (3) сформулирована в п. 1. Основное утверждение работы (теорема 2) доказано в п. 3. Отметим следующую особенность полученного результата: условия, иногда называемые «знаковыми», на функции $f_1(\cdot,\cdot,\cdot), f_2(\cdot,\cdot,\cdot)$, как правило, неизбежно присутствующие в теоремах существования такого вида, имеют несколько иной вид (см. условия 1, 3 теоремы 2).

1. Квазилинейные операторные уравнения

Пусть X, Y – действительные банаховы пространства. Рассмотрим квазилинейное операторное уравнение

$$Lx = Fx$$

с линейным ограниченным оператором $L : X \to Y$ и непрерывным, вообще говоря, нелинейным оператором $F : X \to Y$. Всюду в работе предполагается, что оператор $L : X \to Y$ фредгольмов.

Определение 1. Если оператор $L : X \to Y$ необратим, то уравнение (3) называется *резонансным* [1], [2].

Приведем необходимые определения конструкции, а также теорему о существовании хотя бы одного решения для уравнения (3).

Через $\ker L$ и $R(L)$ будем обозначать *ядро* и *образ* оператора $L : X \to Y$. Проекторы на ядро и образ обозначим $P : X \to X$ и $Q : Y \to Y$ соответственно, и пусть $Q^c : Y \to Y$ – дополнительный проектор, т.е. $Q^c = I - Q$. Рассмотрим соответствующие этим проекторам разложения пространств X, Y в прямые суммы замкнутых подпространств

$$X = \ker L \oplus X_0, \ \ Y = R(L) \oplus Y_0,$$

где $X_0 = \ker P$ и $Y_0 = \ker Q$. В силу фредгольмовости оператора $L : X \to Y$ подпространства $\ker L$ и Y_0 изоморфны. Далее будем пользоваться конкретным изоморфизмом, который обозначим через $J : Y_0 \to \ker L$. Определим оператор $Q_0^c : Y \to Y_0$ (сужение проектора Q^c) равенством $Q_0^c y = y - Qy, \ y \in Y.$ Ввиду различных трактовок понятия обобщенно обратного оператора далее будем придерживаться следующего определения ([3]).

Определение 2. Оператор $K_P : R(L) \to X,$ удовлетворяющий условиям: 1) $K_P Lx = P^c x$ для любого $x \in X$; 2) $LK_P = I$; 3) $P^c K_P = K_P$, будем называть обобщенно обратным к оператору $L : X \to Y$, ассоциированному с проектором $P : X \to X.$

Будем рассматривать ядро оператора L как гильбертово пространство $H_0 \overset{\text{def}}{=} \ker L$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{H_0}$ таким, что порождаемая скалярным произведением норма $\|\cdot\|_{H_0} = (\cdot,\cdot)_{H_0}$ удовлетворяет оценке $\|x\|_{H_0} \le \|x\|_X$, $x \in H_0$.

Сформулируем в удобной форме теорему существования решения для уравнения (3) в резонансном случае, т.е. без предположения об обратимости оператора $L : X \to Y.$

Теорема 1. ([4]). Пусть выполнены условия: 1) существует такая константа $c > 0$, что для всех $x \in X_0$ и для любых пар $u, v \in H_0$ справедливо неравенство $\left(JQ_0^c\left(F(x+u) - F(x+v)\right), u - v\right)_{H_0} \ge c\|u - v\|_{H_0}^2$; 2) существуют константы $a \ge 0, b > 0$ такие, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $\|Fx\| \le a + b\|x\|$; 3) $b\left(1 + c^{-1}b\left\|JQ_0^c\right\|\right) < \|K_P\|^{-1}$. Тогда уравнение (3) имеет хотя бы одно решение.

2. Пространство решений. Вспомогательные утверждения

Определим следующие функциональные банаховы пространства: $L_2 = L_2[0,\omega]$ – пространство функций, суммируемых по Лебегу с квадратом на отрезке $[0,\omega]$, с нормой $\|y\|_{L_2} = \left\{\int_0^\omega |y(t)|^2\,dt\right\}^{1/2}$; $D_2 = D_2[0,\omega]$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,\omega]\to R^1$ таких, что $x' \in L_2$, с нормой $\|x\|_{D_2} = \sqrt{|x(0)|^2 + \|x'\|_{L_2}^2}$. Пусть $L_2^2 = L_2^2[0,\omega] = \left\{(y_1, y_2), y_i \in L_2, i = \overline{1,2}\right\}$ с нормой $\|y\|_{L_2^2} = \sqrt{\|y_1\|_{L_2}^2 + \|y_2\|_{L_2}^2}$, $D_2^2 = D_2^2[0,\omega] = \left\{(x_1, x_2), x_i \in D_2, i = \overline{1,2}\right\}$ с нормой $\|x\|_{D_2^2} = \sqrt{\|x_1\|_{D_2}^2 + \|x_2\|_{D_2}^2}$. Пространства D_2^2 и L_2^2 с указанными нормами будем рассматривать и как гильбертовы с соответствующими скалярными произведениями.

Символом $D_2^{2,0}$ обозначим подпространство пространства D_2^2 такое, что

$$D_2^{2,0} = D_2^{2,0}[0,\omega] = \left\{(x_1, x_2) \in D_2^2 \,/\, x_1(0) = x_1(\omega), x_2(0) = x_2(\omega)\right\}.$$

Под решением задачи (1), (2) будем понимать пару функций $(x_1, x_2) \in D_2^2$, которые удовлетворяют почти всюду на $[0,\ \omega]$ уравнениям системы (1) и периодическим краевым условиям (2) (или, что то же самое, пара функций $(x_1, x_2) \in D_2^{2,0}$, удовлетворяющих уравнениям системы (1)).

Операторы $L, F : D_2^{2,0} \to L_2^2$ определим равенствами

$$(Lx)(t) = \left(x_1'(t), x_2'(t)\right),$$
$$(Fx)(t) = \left(f_1\left(t, x_1(t), x_2(t)\right), f_2\left(t, x_1(t), x_2(t)\right)\right).$$

Оператор $L : D_2^{2,0} \to L_2^2$ является линейным ограниченным фредгольмовым оператором с ядром и образом соответственно:

$$\ker L = \left\{ (x_1, x_2) \in D_2^{2,0} \,/\, x_i \equiv \mathrm{const}, i = \overline{1,2} \right\},$$

$$R(L) = \left\{ (y_1, y_2) \in L_2^2 \,/\, \int_0^\omega y_i(t)\,dt = 0, i = \overline{1,2} \right\}.$$

Ограниченные проекторы на ядро и образ оператора L определим равенствами $P : D_2^{2,0} \to D_2^{2,0}$, $Px = (x_1(0), x_2(0))$, $Q : L_2^2 \to L_2^2$, $Qy = \left(y_1 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_1(t)\,dt, y_2 - \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_2(t)\,dt \right)$. Соответствующие этим проекторам разложения пространств $D_2^{2,0}, L_2^2$ в прямые топологические суммы имеют вид

$$D_2^{2,0} = \ker L \oplus X_0, L_2^2 = R(L) \oplus Y_0,$$

где $X_0 = \ker P,\ Y_0 = \ker Q.$

Оператор $Q_0^c : L_2^2 \to Y_0$ определим равенством $Q_0^c y = y - Qy,\ y \in L_2^2,$ а изоморфизм $J : Y_0 \to \ker L$ – равенством $Jy = y$, $y \in Y_0$. Тогда оператор $JQ_0^c : L_2^2 \to \ker L$ имеет вид $JQ_0^c y = \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_1(t)\,dt, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_2(t)\,dt \right).$

Лемма 1. Для нормы оператора $JQ_0^c : L_2^2 \to \ker L$ справедлива оценка

$$\left\| JQ_0^c \right\|_{\ker L} \le \frac{1}{\sqrt{\omega}}.$$

Доказательство. Действительно,

$$\left\| JQ_0^c y \right\|_{\ker L}^2 = \left| \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_1(s)ds \right|^2 + \left| \frac{1}{\omega}\int_0^\omega y_2(s)ds \right|^2 \le \left(\frac{1}{\omega}\left\{ \int_0^\omega |y_1(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^\omega 1^2 ds \right\}^{1/2} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{1}{\omega}\left\{ \int_0^\omega |y_2(s)|^2 ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^\omega 1^2 ds \right\}^{1/2} \right)^2 = \frac{1}{\omega^2}\omega \|y_1\|_{L_2}^2 + \frac{1}{\omega^2}\omega \|y_2\|_{L_2}^2 = \frac{1}{\omega}\|y\|_{L_2}^2.$$

Поэтому $\left\| JQ_0^c \right\|_{\ker L} \le \frac{1}{\sqrt{\omega}}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Обобщенно обратный к *L* оператор $K_P : R(L) \to X_0$, ассоциированный с проектором $P : D_2^{2,0} \to D_2^{2,0}$, имеет вид

$$K_P y = \left(\int_0^t y_1(s)\,ds, \int_0^t y_2(s)\,ds \right),$$

и его норма $\|K_P\| = 1$.

Доказательство. Непосредственная проверка условий определения обобщенно обратного оператора показывает, что оператор $K_P y = \left(\int_0^t y_1(s)\,ds, \int_0^t y_2(s)\,ds \right)$ является обобщенно обратным к *L*. Имеем

$$\|K_P y\|^2_{D_2^{2,0}} = \int_0^\omega \left| y_1(t) \right|^2 dt + \int_0^\omega \left| y_2(t) \right|^2 dt = \|y_1\|^2_{L_2} + \|y_2\|^2_{L_2} = \|y\|^2_{L_2^2}.$$

Отсюда и следует равенство $\|K_P\| = 1$. Лемма доказана.

3. Теорема существования

Теорема 2. Пусть существуют положительные константы A_i, k_i, a_i, b_i, $i = 1, 2$, такие, что функции $f_i(\cdot,\cdot,\cdot), i = 1, 2$ для любых $y_i, u_i, v_i \in R^1$, $i = 1, 2$, и почти для всех $t \in [0, \omega]$ удовлетворяют условиям:

1) $\left(f_1(t,u_1,u_2) - f_1(t,v_1,u_2) \right)(u_1 - v_1) \ge A_1 |u_1 - v_1|^2$,

2) $\left| f_1(t,u_1,u_2) - f_1(t,u_1,v_2) \right| \le k_1 |u_2 - v_2|$,

3) $\left(f_2(t,u_1,u_2) - f_2(t,u_1,v_2) \right)(u_1 - v_1) \ge A_2 |u_2 - v_2|^2$,

4) $\left| f_2(t,u_1,u_2) - f_2(t,v_1,u_2) \right| \le k_2 |u_1 - v_1|$,

5) $\left| f_1(t,y_1,y_2) \right| \le a_1 + b_1 \left(|y_1| + |y_2| \right)$,

6) $\left| f_2(t,y_1,y_2) \right| \le a_2 + b_2 \left(|y_1| + |y_2| \right)$.

Если выполнены неравенства

$$k_1 + k_2 < 2A_0, \tag{4}$$

$$\sqrt{2}\gamma_1 \left(\sqrt{\omega} \right)^{-1} (b_1 + b_2) \left(\sqrt{\omega} + \sqrt{2}\gamma_1 (b_1 + b_2) \left(A_0 - \frac{k_1 + k_2}{2} \right)^{-1} \right) < 1, \tag{5}$$

где $\gamma_1 = \max\left\{1, \sqrt{\omega}\right\}$, $A_0 = \min\left\{A_1, A_2\right\}$, то задача (1), (2) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство. В условиях теоремы для произвольно фиксированного $x \in X_0$ и произвольных $u, v \in H_0$ справедлива оценка

$$\left(JQ_0^c\left(F(x+u)-F(x+v)\right),u-v\right)_{H_0} = \left(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_1(t,x_1+u_1,x_2+u_2)dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_1(t,x_1+v_1,x_2+v_2)dt, \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_2(t,x_1+u_1,x_2+u_2)dt-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_2(t,x_1+v_1,x_2+v_2)dt\right)\cdot$$

$$(u_1-v_1,u_2-v_2)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left(f_1(t,x_1+u_1,x_2+u_2)-f_1(t,x_1+v_1,x_2+u_2)\right)\cdot(u_1-v_1)dt+$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left(f_1(t,x_1+v_1,x_2+u_2)-f_1(t,x_1+v_1,x_2+v_2)\right)\cdot(u_1-v_1)dt+$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left(f_2(t,x_1+u_1,x_2+u_2)-f_2(t,x_1+v_1,x_2+u_2)\right)\cdot(u_2-v_2)dt+$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\left(f_2(t,x_1+v_1,x_2+u_2)-f_2(t,x_1+v_1,x_2+v_2)\right)\cdot(u_2-v_2)dt\geq$$

$$\geq A_1|u_1-v_1|^2-k_1|u_2-v_2||u_1-v_1|+A_2|u_2-v_2|^2-k_2|u_1-v_1||u_2-v_2|\geq$$

$$\geq A_1|u_1-v_1|^2+A_2|u_2-v_2|^2-\frac{k_1+k_2}{2}\left(|u_1-v_1|^2+|u_2-v_2|^2\right)\geq$$

$$\geq\left(A_0-\frac{k_1+k_2}{2}\right)\|u-v\|^2.$$

Таким образом, условие 1 теоремы 1 выполняется с константой $c = A_0 - \dfrac{k_1+k_2}{2}$.

Оператор $F: D_2^{2,0} \to L_2^2$ является вполне непрерывным. Имеем

$$\|Fx\|_{L_2^2}^2 = \int_0^\omega\left|f_1\left(t,x_1(t),x_2(t)\right)\right|^2dt+\int_0^\omega\left|f_2\left(t,x_1(t),x_2(t)\right)\right|^2dt\leq$$

$$\leq\int_0^\omega\left(a_1+b_1\left(|x_1|+|x_2|\right)\right)^2dt+\int_0^\omega\left(a_2+b_2\left(|x_1|+|x_2|\right)\right)^2dt\leq$$

$$\le \left(a_1\sqrt{\omega}+b_1\left(\|x_1\|_{L_2}+\|x_2\|_{L_2}\right)\right)^2+\left(a_2\sqrt{\omega}+b_2\left(\|x_1\|_{L_2}+\|x_2\|_{L_2}\right)\right)^2 \le$$

$$\le \left(a_1\sqrt{\omega}+b_1\gamma_1\left(\|x_1\|_{D_2}+\|x_2\|_{D_2}\right)\right)^2+\left(a_2\sqrt{\omega}+b_2\gamma_1\left(\|x_1\|_{D_2}+\|x_2\|_{D_2}\right)\right)^2 \le$$

$$\le \left(a_1\sqrt{\omega}+b_1\gamma_1\sqrt{2}\,\|x\|_{D_2^2}\right)^2+\left(a_2\sqrt{\omega}+b_2\gamma_1\sqrt{2}\,\|x\|_{D_2^2}\right)^2 \le \left(a+b\|x\|_{D_2^2}\right)^2,$$

где $a=a_1+a_2,\, b=\gamma_1\sqrt{2}\left(b_1+b_2\right)$. Следовательно, неравенство $\|Fx\|\le a+b\|x\|$ выполнено.

Если справедливы неравенства (4), (5), то справедливо условие 3 теоремы 1, применение которой завершает доказательство. Теорема доказана.

В качестве примера применения теоремы 2 рассмотрим периодическую краевую задачу для следующей системы ОДУ первого порядка:

$$\begin{cases} x_1'(t)=\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\beta_1\cos x_2, \\ x_2'(t)=\alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\beta_2\cos x_1, \\ x_1(0)=x_1(1),\, x_2(0)=x_2(1), \end{cases} \tag{6}$$

где $t\in[0,1]$, $\alpha_{ij},\beta_i, i=\overline{1,2}$ – константы.

Следствие. Если выполнены неравенства:

1) $2\min\{|\alpha_{11}|,|\alpha_{22}|\}>|\alpha_{12}|+|\alpha_{21}|+|\beta_1|+|\beta_2|$;

2) $\sqrt{2}\left(\max\{|\alpha_{11}|,|\alpha_{12}|\}+\max\{|\alpha_{21}|,|\alpha_{22}|\}\right)\left(1+2\sqrt{2}\left(\max\{|\alpha_{11}|,|\alpha_{12}|\}+\right.\right.$

$\left.\left.+\max\{|\alpha_{21}|,|\alpha_{22}|\}\right)\left(2\min\{|\alpha_{11}|,|\alpha_{22}|\}-\left(|\alpha_{12}|+|\alpha_{21}|+|\beta_1|+|\beta_2|\right)\right)^{-1}\right)<1,$

то система (6) имеет хотя бы одно решение.

Доказательство этого следствия состоит в непосредственной проверке теоремы 2 в условиях данного следствия.

Список литературы

1. Mawhin J., Ward R. Resonance and existence for nonlinear elliptic boundary value problems // Nonlinear Anal. – 1981. – Vol. 6. – P. 677–684.

2. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Об одной схеме исследования на разрешимость резонансных краевых задач // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 11. – С. 14–22.

3. Абдуллаев А.Р., Бурмистрова А.Б. Элементы теории топологически нетеровых операторов. – Челябинск, 1994. – 93 с.

4. Абдуллаев А.Р., Плехова Э.В., Савочкина А.А. Разрешимость квазилинейного уравнения с монотонным оператором // Научно-технические ведомости СПбГПУ. – 2010. – № 2 (98). – С. 80–85.

References

1. Mawhin J., Ward R. Resonance and existence for nonlinear elliptic boundary value problems. *Nonlinear Analysis*, 1981, vol. 6, pp. 677-684.

2. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. Ob odnoi skheme issledovaniia na razreshimost’ rezonansnykh kraevykh zadach [A scheme for investigating the solvability of resonance boundary value problems]. *Izvestiia vuzov. Matematika*, 1996, no. 11, pp. 14-22.

3. Abdullaev A.R., Burmistrova A.B. Elementy teorii topologicheski neterovykh operatorov [Elements of the theory of topologically noetherian operators]. Chelyabinsk, 1994, 93 p.

4. Abdullaev A.R., Plekhova E.V., Savochkina A.A. Razreshimost’ kvazilineinogo uravneniia s monotonnym operatorom [Solvability of quasilinear equation with monotone operator]. *Nauchno-tekhnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta*, 2010, no. 2 (98), pp. 80-85.

Получено 05.12.2014

Об авторах

Абдуллаев Абдула Рамазанович (Пермь, Россия) – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшая математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: h.m@pstu.ru).

Савочкина Анна Александровна (Пермь, Россия) – старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Пермского национального исследовательского политехнического университета (614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29, e-mail: a.a.savochkina@pstu.ru).

About the authors

Abdula R. Abdullaev (Perm, Russian Federation) – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: h.m@pstu.ru).

Anna A. Savochkina (Perm, Russian Federation) – Senior Lecturer, Department of Mathematics, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky av., Perm, 614990, Russian Federation, e-mail: a.a.savochkina@pstu.ru).