

В.А. Лохов, В.А. Тропин

V.A. Lokhov, V.A. Tropin

Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Perm National Research Polytechnic University

МОДЕЛИРОВАНИЕ РОСТОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ В ANSYS

GROWTH STRAIN MODELING USING ANSYS

Рассматривается возможность использования программной системы ANSYS для моделирования ростовых деформаций в живых тканях. Описана постановка начально-краевой задачи определения ростовых деформаций в упругой области. Показаны дополнительные условия и предположения, использованные в выводе определяющих соотношений ростовых деформаций. Подобрана модель расчета из ANSYS, подходящая для расчета ростовых деформаций. Решены тестовые задачи о ростовых деформациях с помощью выбранной расчетной модели.

In this article review a possibility of using ANSYS for growth strain modeling in the living tissue. Was described the initial boundary problem of the growth strain calculation in elastic area. Showing the additional conditions and assumptions which used in derivation of growth strain defining relations. Was selected the ANSYS calculation model which fit to growth strain calculation. Was solve the growth strain test problems with using selected calculation model.

Ключевые слова: ростовые деформации, ANSYS, врожденная расщелина твердого неба, ортодонтическое сечение, аппарат Latham.

Keywords: growth strain, ANSYS, congenital cleft of the hard palate, orthodontic treatment Latham apparatus.

Для моделирования воздействия ортопедических аппаратов на живые ткани необходимо решить задачу определения ростовых деформаций. Эти задачи не являются распространенными, поэтому в программных системах типа ANSYS не предусмотрены модели для их решения. Как правило, для модификации и создания новых методов расчета используется APDL-программирование, что требует глубоких знаний системы ANSYS. Мы попробуем использовать стандартные методы расчета в ANSYS так, чтобы решить с их помощью задачу расчета ростовых деформаций.

Ростовые деформации – это неупругие необратимые деформации, возникающие в живых системах за счет притока массы и зависящие от внутренних параметров и механических напряжений. Рассмотрим математическую модель ростовых деформаций.

Уравнения ростовых деформаций в упругой области. Рассмотрим вывод определяющих соотношений для ростовых деформаций [1], чтобы понять ограничения имеющейся модели. Сформулируем общий случай постановки начально-краевой задачи определения ростовых деформаций в упругой области.

Рассмотрим область V с границей S , принадлежащую трехмерному евклидову пространству: $\bar{V} = V \cup S, \bar{V} \in E^3$. Граница S делится на две части – границы S_v , в каждой точке которой заданы три компоненты вектора скоростей, и S_σ , в каждой точке которой заданы три компоненты напряжений. Также допускается возможность задать смешанные граничные условия и граничные условия, в которых даны соотношения между компонентами векторов скоростей и напряжений.

Тогда постановка начально-краевой задачи определения ростовых деформаций в упругой области примет следующий вид:

1) уравнение движения (или равновесия):

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \rho \tilde{f} = 0, \quad \forall \bar{r} \in V;$$

2) геометрические соотношения:

$$\nabla \cdot \tilde{\sigma} + \rho \tilde{f} = 0, \quad \forall \bar{r} \in V;$$

3) определяющее соотношение ростовых деформаций [2]:

$$\tilde{\xi} = \tilde{\xi}^g + \tilde{\xi}^b, \quad \forall \bar{r} \in V,$$

где

$$\tilde{\xi}^g = \tilde{A} + \tilde{B} \cdot \tilde{\sigma},$$

$$\tilde{\xi}^b = \frac{d}{dt} \tilde{\xi}_b = \frac{d}{dt} (\tilde{S} \cdot \tilde{\sigma});$$

4) уравнение изменения плотности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = q, \quad \forall \bar{r} \in V,$$

где q – источник массы в единицу объема в любой момент времени;

5) граничные условия:

$$\tilde{v} = \bar{v}, \quad \bar{r} \in S_v,$$

$$\bar{n} \cdot \tilde{\sigma} = \hat{T}, \quad \bar{r} \in S_\sigma;$$

6) начальные условия $\rho, \bar{v}, \tilde{\sigma}$ даны при $t = 0, \forall \bar{r} \in \bar{V}$.

В итоге получаем систему дифференциальных уравнений начально-краевой задачи определения ростовой деформации в упругой системе, состоящую из 16 скалярных уравнений и 16 скалярных функций координат и времени ($\tilde{\sigma}, \tilde{\xi}, \bar{v}, \rho$).

Для упрощения модели предполагаем, что ростовые деформации развиваются в рассматриваемой области изотропно, т.е. компоненты тензоров \tilde{A} и \tilde{B} не зависят от ортогонального преобразования базисных векторов.

Из теории упругости известно, что среди тензоров второго ранга имеется только один линейно независимый изотропный тензор:

$$A_{ij} = A\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символы Кронекера.

Среди тензоров четвертого ранга имеется три линейно независимых тензора:

$$B_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}, \quad B_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{il} \pm \delta_{il}\delta_{jk},$$

поэтому предположим, что тензор B_{ijkl} – линейная комбинация этих линейно независимых тензоров,

$$B_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \mu_1(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Из этого соотношения получим следующее выражение:

$$(\tilde{B} \cdot \tilde{\sigma}) = B_{ijkl}\sigma_{kl} = \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk} + \mu(\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) + \mu_1(\sigma_{ij} - \sigma_{ji}).$$

Далее, предполагая симметрию тензора напряжений ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) и учитывая, что $\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = I_1(\tilde{\sigma})$ есть первый инвариант тензора напряжений $\tilde{\sigma}$, получим

$$B_{ijkl}\sigma_{kl} = \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk} + 2\mu\sigma_{ij}. \quad (1)$$

Окончательно скорость деформации роста можно представить в следующем виде:

$$\xi_{ij}^g = A\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}\sigma_{kk} + 2\mu\sigma_{ij}. \quad (2)$$

Во многих случаях удобно разложить тензор напряжений на шаровую и девиаторную часть:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + s_{ij}.$$

В этом случае соотношение (2) принимает вид

$$\xi_{ij}^g = A\delta_{ij} + \frac{1}{\chi}\sigma_{kk}\delta_{ij} + \frac{1}{2\eta}s_{ij}, \quad (3)$$

где введены обозначения

$$2\mu = \frac{1}{2\eta}, \quad \lambda + \frac{2\mu}{3} = \frac{1}{\chi}.$$

Запишем соотношение (3) в тензорной форме:

$$\tilde{\xi}^g = \left(A + \frac{l_1(\tilde{\sigma})}{\chi} \right) \tilde{g} + \frac{1}{2\eta} \tilde{s},$$

где \tilde{g} – метрический тензор; \tilde{s} – девиатор тензора напряжений.

Далее приведены определяющие соотношения для ростовой деформации в другой форме.

Предполагается, что в соотношении (2) заложены дополнительные условия: $\lambda = 0$, $2\mu = B$ (новое обозначение).

Тогда в соответствии с (1)

$$\left(\tilde{B} \cdot \tilde{\sigma} \right)_{ij} = B\sigma_{ij},$$

соотношение (2) примет вид

$$\xi_{ij}^g = A\delta_{ij} + B\delta_{ij},$$

или, в тензорной форме,

$$\xi^g = A\tilde{g} + B\tilde{g}.$$

Для одноосного напряженного состояния получим

$$\xi^g = A + B\sigma. \quad (4)$$

Моделирование ростовых деформаций в ANSYS. Решим задачу определения ростовых деформаций в пакете ANSYS. Расчет деформации роста в ANSYS не предусмотрен, поэтому адаптируем под данную задачу имеющиеся методы.

Для данной задачи возможно использование расчета ползучести по модели TimeHardening, определяющие соотношения которой выглядят как

$$\varepsilon_{cr} = \frac{C_1\sigma^{C_2 C_a + 1} e^{-\frac{C_4}{T}}}{C_3 + 1} + C_5\sigma^{C_6} t e^{-\frac{C_7}{T}}, \quad C_1 > 0, \quad C_5 > 0. \quad (5)$$

Проинтегрируем соотношение (4) по времени от 0 до t при постоянных напряжениях и не зависящих от времени коэффициентах

$$\varepsilon^s = At + B\sigma t + C, \quad (6)$$

где A и B – коэффициенты собственного роста и влияния напряжений соответственно; C – начальная неупругая деформация, которая задается в виде геометрии тела и может не учитываться.

Приравняем константы соотношения (5) к следующим величинам:

$$C_1 = A, \quad C_5 = B, \quad C_6 = 1, \quad C_2 = C_3 = C_4 = C_7 = 0.$$

Таким образом,

$$\varepsilon_{cr} = At + B\sigma t, \quad A > 0, \quad B > 0,$$

что соответствует соотношению ростовых деформаций (6) при постоянных напряжениях, положительных коэффициентах собственного роста и влиянию напряжений на ростовую деформацию.

Тестовая задача. Для проверки правильности вычисления ростовых деформаций с помощью модели для расчета деформаций ползучести решим задачу на растяжение стержня. Условия задачи: один конец стержня закреплен по оси X , к другому концу прикладывается постоянная растягивающая нагрузка в виде давления, $P = 1$ Н/м (рис. 1). Модуль Юнга $E = 0,5$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

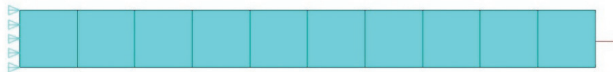


Рис. 1. Схема тестовой задачи

Значения коэффициентов уравнения $\varepsilon_{cr} = At + B\sigma t$ в целях упрощения проверки принимаем следующими: $A = 1,1 \cdot 10^{-6}$ 1/ч, $B = 1,0 \cdot 10^{-6}$ 1/Па·ч.

Время действия нагрузки $t = 500$ ч.

Результаты расчета тестовой задачи (рис. 2):

```

1
NODAL SOLUTION
                                         ANSYS 0.0
                                         JAN  0  0
                                         00:00:00
STEP=2
SUB  =48
TIME=500
EPCRX      (AVG)
RSYS=0
DMX  =.106E-03
SMN  =.00105
SMX  =.00105
    
```



Рис. 2. Ростовые деформации растягиваемого стержня

В результате расчета получаем однородное распределение ростовых деформаций по всей длине стержня, величина деформации 0,001 05.

Проверка результатов тестовой задачи. Проверим результаты расчета вручную. Подставим числовые значения в выражение (6):

$$\varepsilon^g = 1,1 \cdot 10^{-6} \cdot 500 + 1,0 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot 500 = 0,001 05.$$

Результаты проверки полностью совпадают с результатами численного расчета ростовых деформаций.

Плоская задача. Моделирование действия аппарата Latham проводится в инженерном пакете ANSYS. Рассчитаем результат применения аппарата Latham в виде плоской задачи. В качестве модели берем поперечное сечение небного отростка (фронтальная плоскость). Считаем, что:

- на его нижнюю поверхность действует давление со стороны языка, которое передается через альвеолярную каппу;
- на точку вблизи края небного отростка действует сосредоточенная сила, растягивающая его в горизонтальном направлении в сторону расщелины;
- связь небного отростка с костями верхней челюсти представляем как закрепление линии среза по оси X и закрепление нижней точки среза по оси Y ;
- небный отросток состоит из податливой хрящевой ткани.

Входные данные для расчета плоской задачи. Для расчета используем следующие данные:

- 1) геометрическая модель, создаваемая путем ввода координат ключевых точек и создания сетки между ними (рис. 3);

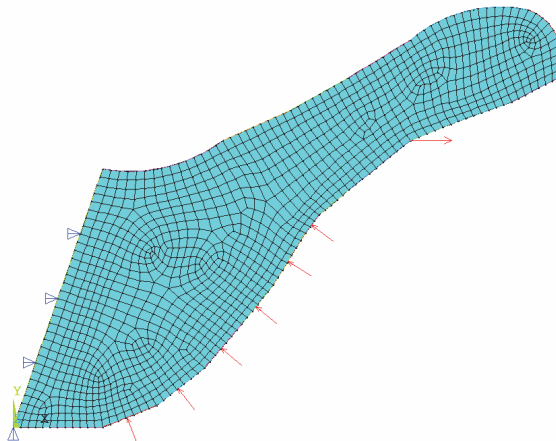


Рис. 3. Геометрия области, конечно-элементная сетка, закрепление и распределение сил

2) коэффициент собственного роста $A = 3,47 \cdot 10^{-6}$ 1/ч, и коэффициент влияния напряжений $B = 2,77 \cdot 10^{-6}$ 1/(Па·ч), взятые из экспериментальных данных [3] и пересчитанные для шага по времени 1 ч;

3) модуль Юнга $E = 0,5$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$ [1];

4) длительность нагружения 500 ч (примерно три недели);

5) расположение, характер и значения нагрузок. Распределенное давление $P = 4$ г/мм, действующее на нижнюю поверхность небного отростка и описывающее давление языка, и сосредоточенная нагрузка $F = 0,3$ Н (предельно допустимое значение нагрузок на ткань), действующая на конец небного отростка в направлении расщелины.

Для построения конечно-элементной сетки выбран квадратный элемент, так как он лучше подходит для расчета изгибающих нагрузок, чем треугольный, имеющий излишнюю жесткость. Стрелками, расположенными по нормали к нижней поверхности, обозначается распределенная нагрузка, горизонтальной стрелкой (по оси X) – сосредоточенная нагрузка. Треугольниками на левой границе области обозначены закрепления. Нижняя точка закреплена по осям X и Y , остальная часть границы – только по оси X .

Результаты решения плоской задачи. Изменения максимальных ростовых деформаций за расчетный период представлены в виде графика на рис. 4.

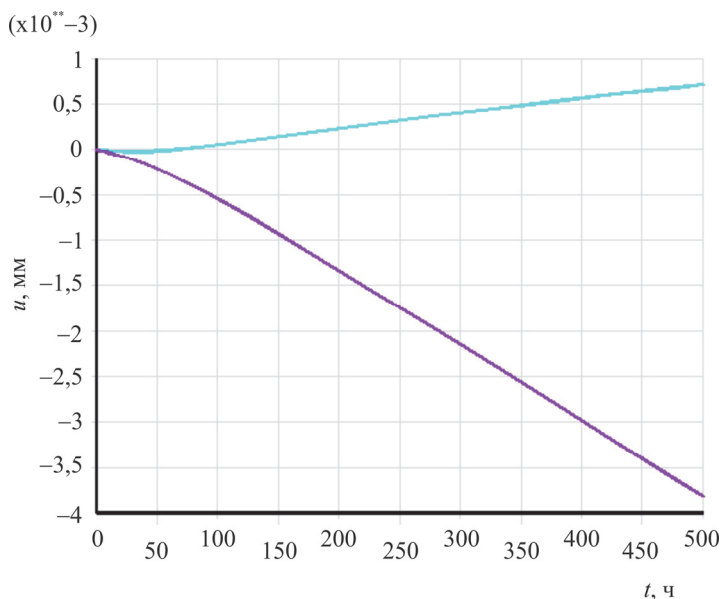


Рис. 4. Зависимость максимальных перемещений, вызванных ростовыми деформациями по осям X и Y (верхний график – по оси X , нижний – по Y)

К концу расчета максимальные ростовые деформации достигают 0,72 мм по оси X и -3,81 мм по оси Y . Эти значения меньше, чем полученные при реальном применении аппарата [4], это связано с тем, что использованные зна-

чения коэффициентов вычислены для более позднего периода, чем возраст ребенка-пациента при использовании аппарата. После полугодового возраста хрящи, из которых состоит твердое небо, начинают окостеневать, и ортопедические методы лечения становятся менее эффективными.

Сделаем следующие выводы:

1. Показана возможность использования стандартной модели расчета ползучести в качестве модели для расчета ростовых деформаций в ANSYS и коэффициенты определяющего соотношения для этой модели.

2. Показаны ограничения, накладываемые на математическую модель ростовых деформаций при использовании модели расчета ползучести, напряжения должны быть постоянными, а коэффициенты собственного роста и влияния напряжений на ростовую деформацию – положительными.

3. Показано качественное соответствие результатов численного моделирования и ортопедического лечения.

Отметим, что с позиций биомеханики данная задача может быть рассмотрена как задача управления напряжениями и ростовыми деформациями в живых системах, подход к решению таких задач разработан в работах [5–12].

Список литературы

1. Няшин Ю.И., Лохов В.А. Основы биомеханики: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2007. – 210 с.

2. Старикова Н.В. Раннее ортопедическое лечение детей с врожденной двусторонней расщелиной верхней губы и неба: дис. ... канд. мед. наук. – М., 2006. – 133 с.

3. Hsu F.H. The influences of mechanical loads on the form of a growing elastic body // *Journal of Biomechanics*. – 1968. – Vol. 1. – P. 303–313.

4. Masich A.G. Mathematical modelling of orthopedic reconstruction of children's congenital maxillary anomaly // *Russian Journal of Biomechanics*. – 1999. – Vol. 1. – P. 101–109.

5. Туктамышев В.С., Лохов В.А., Няшин Ю.И. Исследование методики независимого управления полными деформациями посредством собственных деформаций в дискретизированных системах // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 110–119.

6. Туктамышев В.С., Лохов В.А., Няшин Ю.И. Независимое управление напряжениями и деформациями в растущих живых тканях // *Российский журнал биомеханики*. – 2011. – Т. 15, № 2 (52). – С. 69–76.

7. Височно-нижнечелюстной сустав человека как элемент зубочелюстной системы: биомеханический анализ / Ю.И. Няшин, В.А. Лохов, В.М. Тверье, М. Менар // *Российский журнал биомеханики*. – 2009. – Т. 13, № 4. – С. 7–21.

8. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Decomposition method in linear elastic problems with eigenstrain // ZAMM. – 2005. – Vol. 85, no. 8. – P. 557–570.

9. Nyashin Y., Lokhov V., Ziegler F. Stress-free displacement control of structures // Acta Mechanica. – 2005. – Vol. 175. – P. 45–56.

10. Лохов В.А., Кучумов А.Г. Создание заданных усилий в фиксаторах, изготовленных из сплавов с памятью формы // Российский журнал биомеханики. – 2006. – Т. 10, № 3. – С. 41–52.

11. Федоров А.Е., Лохов В.А. О применении теории вязкоупругости в эстетической хирургии // Российский журнал биомеханики. – 2003. – Т. 7, № 4. – С. 34–46.

12. Туктамышев В.С., Лохов В.А. Метод независимого управления механическими напряжениями в деформируемых системах // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т. 14, № 2. – С. 269–281.

Получено 1.09.2014

Лохов Валерий Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, ПНИПУ, ФПММ, e-mail: valeriy.lokhov@yandex.ru.

Тропин Василий Андреевич – магистрант, ПНИПУ, ФПММ, гр. БМ-13-1м, e-mail: mengir91@mail.ru.